RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université d'Echahid Hamma Lakhdar El Oued

Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Thèse en vue de l'obtention du diplôme de doctorat LMD en mathématiques

Spécialité :Mathématiques appliquées

Thème :

Analyse de systèmes aux dérivées partielles modélisant des phénomènes en mécanique des milieux continus

---

Présentée Par : CHOUIA ABDALLAH

Soutenue le : 08/ 07/2023

devant le jury composé de :

M. Mansour Abdelouaheb	Pr.	Université d'El Oued	Président
M. Azeb Ahmed Abdelaziz	MCA	Université d'El Oued	Promoteur
M. Hadj Ammar Tedjani	Pr.	Université d'El Oued	Co-encadreur
M. Aissaoui Adel	Pr.	Université d'El Oued	Examinateur
M. Chougui Nadhir	MCA	Université de Sétif 1	Examinateur
M. Saadallah Abdelkader	MCA	Université de Sétif 1	Examinateur

Année universitaire : 2022/2023

Remerciements

*Nous remercions **Dieu** Tout-Puissant qui nous a permis de terminer ce travail.*

*Je tiens également à remercier les rapporteurs de cette thèse, **Dr.Azeb Ahmed Abdelaziz** et **Pr.Hadj Ammar Tedjani**, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je leur suns également reconnaissant pour le temps conséquent qu'ils m'ont accordé malgré leurs nombreuses responsabilités, leurs qualités humaines et scientifiques qu'ils m'ont apportées lors de l'encadrement de ma thèse. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je leur adresse ma gratitude pour tout cela. C'est très difficile en quelques lignes de remercier mon directeur de thèse.*

*Ma reconnaissance va aussi à **Pr. Mansour Abdelouahab**, Professeur à l'Université d'Eloued, pour avoir accepté d'être président de ce jury. Je le remercie profondédement pour les suggestions importantes qu'il m'a faits.*

*J'associe à ces remerciement aur membres du jury **Dr. Chougui Nadhir**, Maitre de Conférence à l'Université de Setif, et **Dr. Saadallah Abdelkader**, Maitre de Conférence à l'Université de Setif, et **Pr. Aissaoui Adel**, Professeur à l'Universite d'Eloued pour avoir accepte d'examiner mon travail.*

Enfin, nous remercions mes amis qu'on n'a pas citres et qui ont toujours ete la pour mot Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

Table des matières

Introduction générale **x**

Notations **xiii**

Liste des figures **xiv**

1 Modélisation **1**

1.1 Cadres physiques - Modèles mathématiques 1

1.2 Lois de comportement 6

1.2.1 Loi de comportement viscoélastique-viscoplastique 7

1.2.2 Loi de comportement thermo-viscoélastique-viscoplastique avec endommagement 7

1.2.3 Loi de comportement électro-viscoélastique avec variable interne d'état . 8

1.3 Conditions aux limites 9

1.3.1 Condition aux limites de déplacement 9

1.3.2 Condition aux limites de traction. 10

1.3.3 Conditions aux limites électriques. 10

1.4 Lois de contact 10

1.4.1 Contact sans frottement 10

1.4.2 Contact bilatéral 10

1.4.3 Contact unilatéral 11
1.4.4 Contact avec compliance normale 12
1.4.5 Contact avec compliance normale, contrainte unilatérale et adhésion . . 13
1.4.6 Condition de contact avec compliance normale, frottement et usure . . . 16
1.4.7 Condition thermique à la surface de contact 17
1.4.8 Condition électrique à la surface de contact 18

2 Outils Mathématiques 21

2.1 Espaces fonctionnels 21
2.1.1 Espaces de Sobolev 21
2.1.2 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles 23
2.1.3 Espaces fonctionnels pour la méanique 26
2.2 Eléments d'analyse dans les espaces de Hilbert 30
2.2.1 Opérateurs non linéaires 31
2.2.2 Inéquations variationnelles paraboliques 32
2.2.3 Équations différentielles ordinaires dans des espaces abstraits 32
2.2.4 Inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution 33
2.2.5 Théorème de point fixe de Banach 35
2.3 Compléments divers 36
2.3.1 Lemmes de type Gronwall 37
2.3.2 Théorème de représentation de Riesz-Fréchet 38
2.3.3 Sous différentiabilité 38

3 Problème de contact quasistatique thermo-viscoélastique-viscoplastique avec endommagement et usure 40

3.1 Problème thermo-mécanique et hypothèses 40
3.2 Formulation variationnelle 45

3.3 Existence et unicité de la solution 48

4 Problème de contact quasistatique électro-viscoélastique avec frottement et adhésion 62

4.1 Problème électro-mécanique et hypothèses 62

4.2 Formulation variationnelle 68

4.3 Existence et unicité de la solution 70

Bibliographie 81

Introduction générale

Dans la plupart des systèmes de la mécanique des milieux continus, ils existent des situations dans lesquelles un corps déformable entre en contact avec d'autre corps ou bien avec une fondation rigide ou déformable. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment les forces sont appliquées sur une structure et comment réagissent ces structures lorsqu'elles subissent ces forces. Les problèmes de contact mécanique se rencontrent principalement dans des domaines aussi variés que l'aéronautique, la mécanique automobile, le génie civil, les sciences du bois, la médecine, la production de l'énergie (assemblage des structures, fissuration dans les joints soudés) et les systèmes de transmissions. Prenant en compte les comportements divers des milieux continus, elle englobe l'hydrodynamique, la dynamique des gaz, l'élasticité, la plasticité et d'autres types de comportements. Vu l'importance du phénomène, des éfforts considérables ont été consacrés à la modélisation, l'analyse ainsi que l'approximation numérique des processus physiques provenant des contacts entre des corps déformables ou entre un corps et une base rigide, déformable ou lubrifiée. Par conséquent, une Théorie Mathématique générale de la Mécanique du contact(MTCM) est actuellement émergée. Elle est concernée par les structures mathématiques qui sont à la base des problèmes de contact avec des lois constitutives différentes, c'est à dire, différents matériaux, diverses géométries et des conditions de contact différentes ; voir par exemple [58, 69].

La modélisation des problèmes de contact d'un corps déformable avec une base dépent essentiellement de propriétés mécaniques du matériau considéré, ainsi que des conditions aux limites

de contact.

Le sujet de l'endommagement est extrêmement important dans les conceptions en ingénierie puisqu'il influence directement sur la vie usuelle de la structure ou la composante conçue. Il existe une littérature très riche sur ce sujet. Les modèles prenant en considération l'influence de l'endommagement interne du matériau sur le processus de contact ont été étudiés mathématiquement. L'analyse mathématique de problèmes unidimentionnels peut être trouvée dans [35]. Les premiers modèles de l'endommagement mécanique provenant des considérations thermodynamiques sont apparus dans [28]. De modèles généraux récents dans [33, 34, 36, 53, 62] sont issus du principe de la puissance virtuelle. Dans tous ces travaux, l'endomagemment du matériau est décrit par une fonction α ayant des valeurs entre zéro et un. Lorsque $\alpha = 1$, il n'ya pas d'endomagemment dans le matériau, lorsque $\alpha = 0$, le matériau est complètement endommagé et lorsque $0 < \alpha < 0$, il a un d'endomagemment partiel et le système a une capacité réduite. Certains problèmes en thermo-mécanique de contact avec endomagemment ont été étudiés dans [8, 15, 17, 52, 54, 57, 71].

Les matériaux piézoélectriques sont extrêmement utilisés comme interrupteurs et actuateurs dans beaucoups de systèmes d'ingénierie, en radioélectronique, l'électroacoustique et la mesure des équipements. Ils sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique suite à une déformation mécanique et, inversement, une déformation mécanique est générée lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Les matériaux piézoélectiques, pour lesquelles les propriétés mécaniques sont viscoélastiques sont appelés "les matériaux électro-viscoélastiques" et ceux pour lesquelles les propriétés mécaniques sont élasto-viscoplastiques sont appelés "les matériaux électro-élasto-viscoplastiques". De modèles généraux pour des matériaux électro-élastiques ayant un effet piézoélectiques peuvent être trouvés dans [13, 57, 84, 49]. Un problème de contact avec "slip-dependent" pour les matériaux électro-élastiques a été étudié dans [74], et pour les matériaux électro-élasto-viscoplastiques a été étudié dans [41]. Des problèmes de contact sans frotement pour des matériaux électro-

viscoélastiques ont été étudiés dans [80, 7, 12, 67, 75] sous l'hypothèse que la fondation est isolante.

Actuellement, un intérrêt considérable est porté aux problèmes de contact avec frottement impliquant les matériaux piézoélectriques voir par exemple [49]. Cependant, il n'existe virtuellement pas de résultats mathématiques à propos des problèmes de contact pour de tels matériaux et on a besoin de développer la Théorie Mathématique du Contact Mécanique (MTCM) pour inclure le couolpage entre les propriétés mécaniques et électriques.

Les processus d'adhésion sont importants en industrie lorsque des parties, souvent non métaliques, sont collées ensemble. Pour cette raison, le contact adhésif entre les corps, lorsqu'une colle est ajoutée pour empêcher les surfaces d'un mouvement relatif, a récement reçu, de plus en plus, une grande attention dans la littérature. Des modèles généraux avec adhésion peuvent être trouvés dans [31, 32, 60, 66]. Des résultats sur l'analyse mathématique de plusieurs problèmes de contact avec adhésion ; citons par exemple [80, 67, 69, 76]. Récement, les matériaux composites ont atteint le sommet, puisqu'ils sont très solides et très légers, et par conséquent une importance considérable en aviation et en industrie automobile. Cependant, les matériaux composites peuvent subir, sous des contraintes, une délimitation dans laquelle des plusieurs couches se décollent et se déplacent relativement les unes par rapport aux autres. Pour modéliser le processus lorsque le collage n'est pas permanent et un décollage peut avoir lieu, nous avons besoin de décrir l'adhésion et le contact ensemble. Un nombre de publications récentes traîte des tels modèles, voir par exemple [22, 80, 31, 30, 60, 65] et les références comprises. L'idée est d'introduire une variable de surface interne, le champ d'adhesion $\beta \in [0, 1]$ qui décrit la densité fractionnelle des adhésifs actifs sur la surface de contact. En un point de la surface de contact adhésif, lorsque $\beta = 1$, l'adhésion est complète et tous les adhésifs sont actifs ; lorsque $\beta = 0$, tous les adhésifs sont inactifs, sévères et il n'y a pas d'adhésion. Lorsque $0 < \beta < 1$, l'adhésion est partielle et seulement une fraction β des adhésifs est active.

La thermodynamique a pour objet principal, l'étude des phénomènes mécaniques (travail,

pression,...) couplés aux phénomènes thermiques (chaleur, température,...), tous deux considérés du point de vue macroscopique. Elle est née au XIXème siècle de la nécessité de comprendre le fonctionnement des machines thermiques produites au début de l'ère industrielle. En raison du caractère universel des principes produits par la thermodynamique, celle-ci a dépassé par la suite le cadre strict de l'étude des machines, pour toucher tous les domaines de la physique dans lesquels la chaleur joue un rôle (électromagnétisme, optique,..), ainsi que d'autres disciplines scientifiques (chimie, biologie,...).

L'objectif de cette thèse est de proposer une certaine contribution à l'étude de quelques problèmes aux limites en mécanique de contact quasistatique. Nous considérons ici une loi non linéaire pour des matériaux élasto-viscoplastiques prenant en considération l'influence de l'endommagement interne du matériau et un effet thermique. On décrit l'évolution de l'endommagement par une inclusion différentielle du type parabolique comme dans [62, 76]. Nous considérons également une loi de comportement pour des matériaux dites électro-viscoélastiques , ayant des propriétés mécaniques ainsi que des propriétés électriques (matériaux piézoélectriques). L'adhésion entre les surfaces de contact, lorsqu'une colle ajoutée pour éviter aux surfaces un mouvement relatif, est prise en considération dans ce travail.

Cette thèse est composée de quatre chapitres que nous décrivons brièvement.

Dans le premièr chapitre et deuxième chapitre, le but est d'introduire les outils nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités. Nous commençons par présenter les divers modèles mécaniques de contact étudiés, puis, nous indiquons les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées tout au long de la thèse. Enfin, nous rappelons quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle concernant les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz, les équations et les inéquations variationnelles d'évolution paraboliques et les lemmes de Gronwall.

Dans le troisième chapitre, on s'interesse à l'etude d'un problème d'évolution quasistatique modélisant le contact avec frottement d'un corps thermo-viscoélastique-viscoplastique avec une

fondation en mouvement. L'effet d'endommagement est pris en considération dans la loi constitutive. Le contact est modélisé par une condition de compliance normale avec une loi de frottement sec associée et usure décrit par la loi d'Archard. Nous présentons une formulation variationnelle du problème pour lequel nous démontrons qu'il existe une solution faible unique en utilisant des arguments d'inéquation variationnelle d'évolution, d'inéquation variationnelle parabolique, d'équation différentielle ordinaires du premier ordre et de point fixe de Banach.

Tandis que dans le quatrième chapitre, nous étudions un problème de contact sans frottement pour des matériaux électro-viscoélastiques avec adhésion. Nous obtenons une formulation variationnelle au problème mécanique puis présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution pour le modèle électro-mécanique. Les démontrations s'inspirent de celles utilisées dans le travail qui a fait l'objet du premier chapitre.

Notations

Soit Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhésion de Ω,
Γ	la frontière de Ω supposée régulière,
$mes\Gamma_1$	la mesure de Lebesgue $(d-1)$ dimensionnelle de Γ_1,
$\Gamma_i (i = \overline{1,3})$	une partie mesurable de Γ,
ν	la normale unitaire sortante à Γ,
v_ν, v_τ	les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel v,
$\sigma_\nu, \boldsymbol{\sigma}_\tau$	les composantes normales et tangentielles du champ tensoriel $\boldsymbol{\sigma}$,
$C^1(\bar{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continuement différentiables sur $\bar{\Omega}$,
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$,
Q	l'espace $L^2(\Omega)_s^{d\times d}$,
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$,
Q_1	l'espace $\{\boldsymbol{\sigma} \in Q,\ Div\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j}) \in H\}$,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ,
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$,
$\gamma : H_1 \to H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles,
W	l'espace $\{\zeta \in H^1(\Omega) \mid\ \zeta = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}$,
$\mathcal{W}$	l'espace $\{D = (D_i) \mid\ D_i \in L^2(\Omega),\ D_{i,i} \in L^2\}$.

Si X est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes :

$(.,.)_X$	le produit scalaire sur X,
$\langle .,. \rangle_{X' \times X}$	le produit de dualité entre Xet X',
$\|.\|_X$	la norme sur X,
$x_n \to x$	la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élement$x$ dans X,
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite(x_n) vers l'élement x dans X.

Si de plus $[0,T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$C(0,T;H)$	l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans H,
$C^1(0,T;H)$	l'espace des fonctions continûment dérévables sur $[0,T]$ dans H,
$L^p(0,T;H)$	l'espace des fonctions mesurables sur $[0,T]$ dans H,
$\|.\|_{L^p(0,T;H)}$	la norme de $L^p(0,T;H)$,
$W^{k,p}(0,T;H)$	l'espace de Sobolev de paramètres k et p,
$\|.\|_{W^{k,p}(0,T;H)}$	la norme de $W^{k,p}(0,T;H)$.

Pour une fonction f, on note par :

$\dot{f}, \ddot{f}$	les dérivées première et seconde de f par rapport au temps ,
$dom\ f$	le domaine de f,
$supp f$	le support de f,
$\partial_i f,\ f_{,i}$	la dérivée partielle de f par rapport à l'ième composante x_i,
∇f	le gradient de f,
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de f,
$\mathrm{Div} f$	la divergence de f,
∂f	le sous différentiel de f,
$\mathrm{div} f$	la divergence de f.

Autre notations :

lim inf	la limite inférieure,
lim sup	la limite supérieure,
$\mathbb{S}^d$	l'espace des tenseurs d'ordre deux symétriques sur $\mathbb{R}^d$,
"."	le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$,
"$\|.\|$"	la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$,
C	une constante générique strictement positive,
Λ^n	puissance n de l'operateur Λ,
p.p.	presque partout,
χ_K	fonction indicatrice de K,
$s.c.i$	semi-continue inférieurement .

Liste des figures

1.1 Cadre physique n°1 2

1.2 Cadre physique n°2 3

1.3 Contact unilatéral 12

1.4 Contact unilatéral avec interstice g 12

1.5 Représentation graphique de l'opérateur de troncation R_ν 14

1.6 Contact avec compliance normale et contrainte unilatérale et adhésion 15

1.7 Représentation graphique de la fonction Φ 19

1.8 Représentation graphique de la fonction ψ 20

Chapitre 1

Modélisation

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique des milieux continus où nous allons introduire les cadres physiques utilisés dans cette thèse ; il est déstiné à rappeler les modèles mathématiques des problèmes intervenant dans cette thèse, puis on y introduit un bref rappel sur les phénomènes mécaniques et thermiques. Ensuite nous considérons les lois de comportement des différents matériaux tels que la loi thermo- viscoélastique-viscoplastique avec endommagement et la loi électro-viscoélastiques avec variable interne d'état . En citant ensuite les différents types de conditions aux limites el les lois de contact avec ou sans frottement.

1.1 Cadres physiques - Modèles mathématiques

Dans cette section nous allons introduire les deux cadres physiques et leurs modèles mathématiques des problèmes mécaniques intervenant dans cette thèse.

Cadre physique n°1. Soit un corps thermo-viscoélastique-viscoplastique qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ avec une surface frontière régulière Γ, partitionnée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , tel que $mes\Gamma_1 > 0$. Nous notons par ν la normale unitaire sortante à Γ. Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité f_2 et dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0 et d'une source

de chaleur externe donnée par la fonction q_{th} (voir figure 1.1). On suppose que f_2 et f_0 varient très lentement par rapport au temps. Soient $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Sur la partie Γ_3, le corps est en contact frottant avec un obstacle en mouvement, s'appelle fondation constituée d'un corps rigide ouvert d'une couche molle. Le frottement implique l'usure de la fondation que nous modélisons avec une surface variable. Nous supposons que le matétiau peut être endommagé durant le contact. Nous prenons en considération les propriétés mécaniques du corps. Notre objectif sera d'étudier l'évolution de ces propriétés dans le temps, sous l'hypothèse des petites transformations.

Nous utiliserons ce cadre physique dans le chapitre 3 de la thèse. **Cadre physique n°2.** Soit un

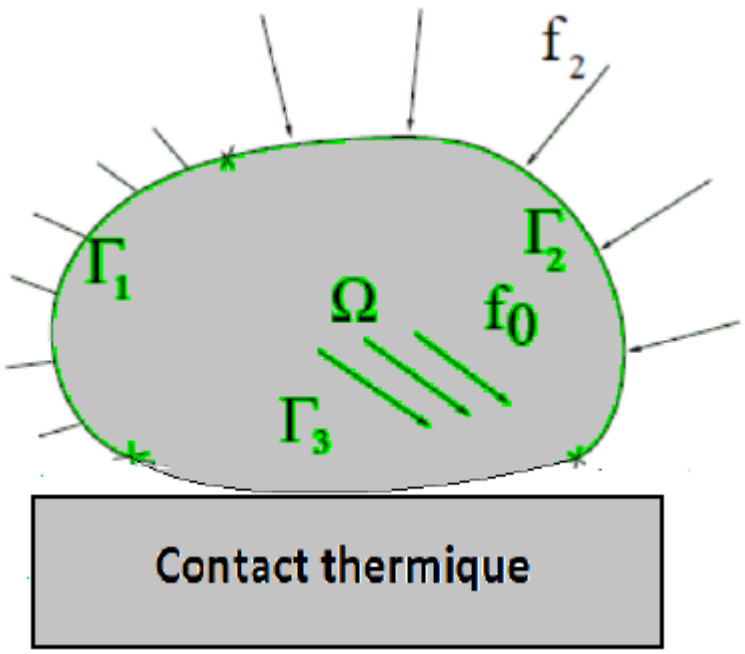

FIGURE 1.1 – Cadre physique n°1

corps électro-viscoélastique qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ avec une surface frontière régulière Γ, partitionnée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3, telles que $mes\Gamma_1 > 0$. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ. Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité f_2 et dans Ω agissent des forces volu-

miques de densité f_0 (voir figure 1.2). Nous supposons que f_2 et f_0 varient très lentement par rapport au temps. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question.

En plus de l'action des forces et des tractions, le corps est soumis à l'action des charges électriques de densité volumique q_0 et des charges électriques de surface. Pour les décrire, nous considérons une deuxième partition de la frontière Γ en trois parties mesurables Γ_a, Γ_b et Γ_3 telles que $mes\Gamma_a > 0$. Nous supposons que le corps est en contact frottant avec adhésion avec une fondation conductive sur Γ_3, le potentiel électrique s'annule sur Γ_a et une charge électrique superficielle de densité q_2 est préscrite sur Γ_b. La différence par rapport au cadre physique précédent résulte du fait que maintenant nous prenons en considération les propriétés mécaniques et aussi les propriétés électriques du corps matériel. Nous étudions l'évolution de ces propriétés dans l'intervalle de temps $[0, T]$ en admettant que le processus est quasistatique, dans l'hypothèse des petites transformations.

Nous utiliserons ce cadre physique dans le chapitre 4 de cette thèse. Avant d'obtenir les mo-

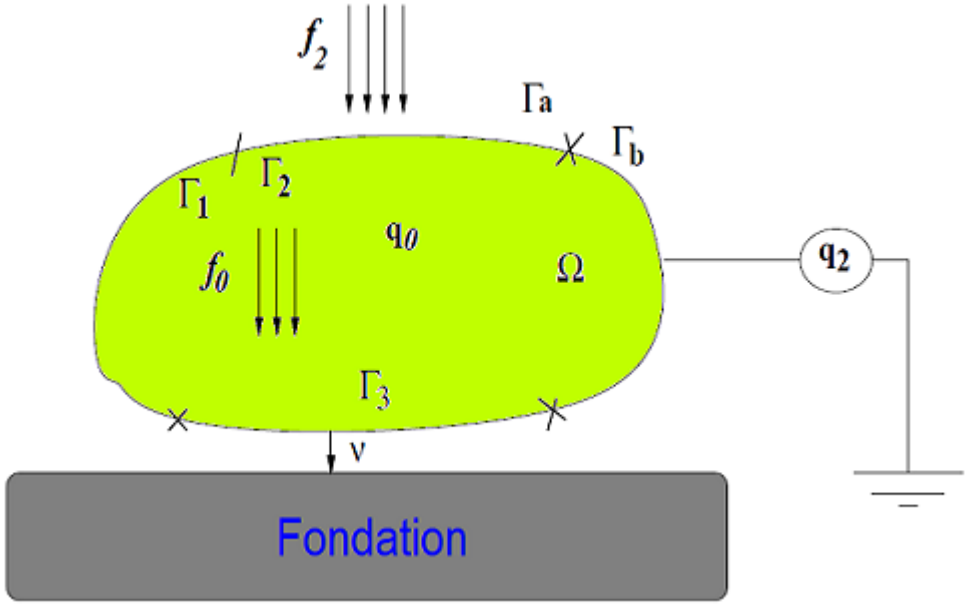

FIGURE 1.2 – Cadre physique n°2

dèles mathématiques qui correspondent au cadre physique presenté, voici quelques notations et

conventions que nous utiliserons tout au long de cette thèse.

Nous désignons par $\mathbb{S}^d$ $(d = 2, 3)$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}$; $(\ ,\ )$ et $\|.\|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_i v_i, & \|v\| &= (v \cdot v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d, \\ \sigma \cdot \tau &= \quad \sigma_{ij}\tau_{ij}, & \|\tau\| &= (\tau \cdot \tau)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \tau \in \mathbb{S}^d, \end{aligned}$$

avec la convention de l'indice muet. Pour un vecteur v, nous utilisons la notation v pour désigner la trace γv de v sur Γ. Nous notons par v_ν et v_τ les composantes normale et tangentielle de v sur la frontière données par

$$v_\nu = v \cdot \nu, \quad v_\tau = v - v_\nu \nu. \tag{1.1.1}$$

Nous désignons par $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(x, t)$ le champ des contraintes, par $u = u(x, t)$ le champ des déplacements et par $\varepsilon(u)$ le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \bar{\Omega}$ et $t \in [0, T]$.

Pour un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ nous dénotons par σ_ν et $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ les composantes normale et tangentielle à la frontière donnés par

$$\sigma_\nu = \sigma\nu \cdot \nu, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \cdot \nu. \tag{1.1.2}$$

En utilisant (1.1.1) et (1.1.2), nous obtenons la relation

$$(\sigma\nu) \cdot v = \sigma_\nu v_\nu + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot v_\tau, \tag{1.1.3}$$

qui va intervenir tout au long de cette thèse, dans l'établissement des formulations variationnelles des problèmes mécaniques de contact.

En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps, par exemple

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} \qquad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

où $\dot{u}$ désigne le champ des vitesses et $\ddot{u}$ désigne le champ des accélérations. Pour le champ des vitesses $\dot{u}$ les notations $\dot{u}_\nu$ et $\dot{u}_\tau$ représentent respectivement les vitesses normale et tangentielle à la frontière, c'est-à-dire

$$\dot{v}_\nu = \dot{v} \cdot \nu, \qquad \dot{v}_\tau = \dot{v} - \dot{v}_\nu \cdot \nu.$$

Rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \text{ dans } \Omega \times (0,T). \tag{1.1.4}$$

Notons qu'ici et tout au long de la thèse, un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante à la variable spatiale.

Passons maintenant à la description des modèles mathématiques associées aux cadres physiques ci-dessus.

Modèle mathématique n°1. Le premier modèle mathématique étudié dans cette thèse, décrit l'évolution du corps dans le cadre physique °1 (page 1). Les fonctions inconnues du problème sont le champ des déplacements $\boldsymbol{u} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$, le champ de température $\theta : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$, le champ d'endommagement $\zeta : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ et une fonction d'usure $w : \Gamma_3 \times [0,T] \to \mathbb{R}$.

On sait qu'en général, l'évolution d'un corps matériel est décrite par l'équation de mouvement de Cauchy.

$$\mathrm{Div}\boldsymbol{\sigma} + f_0 = \rho\ddot{u} \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T), \tag{1.1.5}$$

où $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ désigne la densité de masse ; ici "Div" représente l'opérateur divergence pour les tenseurs, $\mathrm{Div}\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j})$. Le processus d'évolution défini par (1.1.5) s'appelle processus dynamique. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple, dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}$ varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho\ddot{u}$ peut être négligé. Dans ce cas, le processus s'appelle quasistatique et l'équation (1.1.5) s'appelle l'équation

d'équilibre et devient

$$\mathrm{Div}\boldsymbol{\sigma} + f_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T),$$

Modèle mathématique n°2. Ce modèle mathématique décrit l'évolution du corps dans le cadre physique n°2 (page 2). C'est un modèle électro-mécanique. Les inconnues mécaniques du problème sont le champ des déplacements u, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$.A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir le champ de déplacements électriques $\boldsymbol{D} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0,T] \to [0,1]$ et un champ de variable interne d'état $\boldsymbol{k} : \Omega \times [0;T] \to \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques.

$$\mathrm{div} D = q_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T), \tag{1.1.6}$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\mathrm{div} D = (D_{i,i})$, et q_0 représente la densité des charges électriques volumiques.

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire le mouvement du corps matériel considéré. Il est nécessaire de décrire ce qui est propre au matériau lui même, c'est l'objet des lois de comportement que nous décrirons dans le deuxième paragraphe de ce chapitre.

1.2 Lois de comportement

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. Voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement mécanique, par loi de comportement (ou loi consti-

tutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, le tenseur des déformations infinitésimales ε et leurs dérivées temporelles $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{\varepsilon}$.

1.2.1 Loi de comportement viscoélastique-viscoplastique

Pour une phénomène mécanique, une loi de comportement de matériau viscoélastique-viscoplastique peut être écrite sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{G}\big(\boldsymbol{\sigma}(s), \varepsilon(u(s))\big)ds, \tag{1.2.1}$$

où les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des tenseur d'ordre quatre et non linéaires ; leurs composantes a_{ijkl} et b_{ijkl} s'appellent coefficients de viscosité et élasticité respectivement et $\mathcal{G}$ représente une fonction constitutive non linéaire qui décrit le comportement viscoplastique du matériau.

1.2.2 Loi de comportement thermo-viscoélastique-viscoplastique avec endommagement

Si nous prenons en considération l'effet thermique et l'endommagement du matériau durant le contact, nous arrivons à une généralisation de la loi (1.2.1), qui est une loi de comportement thermo-viscoélastique-viscoplastique avec endommagement ayant la forme

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) - \mathcal{M}(\theta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s)), \zeta(s))ds. \tag{1.2.2}$$

où, ici et ci-dessous $\boldsymbol{\sigma}$ désigne le tenseur des contraintes, $\boldsymbol{u}$ représente le champ de déplacement. $\dot{\mathbf{u}}$ est la vitesse, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ est le tenseur de déformation linéarisé, θ est le champ de température et ζ est une variable interne décrivant l'endommagement du matériau causé par les déformations viscoplastiques.

La température θ est définie par une équation parabolique, qui représente la conservation de l'énergie comme suit

$$\dot{\theta}(t) - \operatorname{div}(\mathcal{K}\nabla\theta(t)) = -\mathcal{M}.\nabla\dot{\mathbf{u}}(t) + q_{th}(t). \tag{1.2.3}$$

L'évolution du champ de température θ est gouvernée par une équation de la chaleur, obtenue à partir de la conservation de l'énergie, et définie par (1.2.3), où $\mathcal{K} = (k_{ij})$ représente le tenseur de conductivité thermique, $\mathrm{div}(\mathcal{K}\nabla\theta) = (k_{ij}\theta_{,i})$ et q_{th} représente la densité de sources de chaleur volumiques.

L'inclusion utilisée pour l'évolution du champ d'endommagement est

$$\dot{\zeta} - \Delta\zeta + \partial\varphi_K(\zeta) \ni \psi(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\boldsymbol{u}), \theta, \zeta),$$

où K désigne l'ensemble des fonctions d'endommagements admissibles défini par

$$K = \{\vartheta \in H^1(\Omega) : 0 \leq \vartheta \leq 1 \quad \text{a.e. in } \Omega\},$$

$\partial\varphi_K$ désigne le sous-différentiel de la fonction indicatrice φ_K et ψ est une fonction constitutive donnée qui décrit les sources d'endommagements dans le système.

Lorsque $\mathcal{G} = 0$, et pour l'endommagement ζ affecte la partie de l'élasticité, on peut définir une loi de comportement thermo-viscoélastique avec mémoire courte et endommagement comme suit

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}(\zeta, \varepsilon(u)) - \mathcal{M}\theta, \tag{1.2.4}$$

1.2.3 Loi de comportement électro-viscoélastique avec variable interne d'état

Les matériaux piézoélectrique sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique lors de l'application des contraintes mécaniques, et inversemment, des contraintes mécaniques sont générées lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Un matériau piézoélectrique dont les propriétés mécaniques sont viscoélastique est appelé matériau électro-viscoélastique. Nous obtenons une loi de comportement

électro-viscoélastique avec variable interne d'état comme suit

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})) + \int_0^t \mathcal{F}\big(t-s, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s)), \boldsymbol{k}(s)\big) ds - \mathcal{E}^* \boldsymbol{E}(\varphi), \\ \boldsymbol{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \mathcal{C}\boldsymbol{E}(\varphi), \\ \dot{\boldsymbol{k}} = \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{k}), \end{cases} \tag{1.2.5}$$

dans laquelle$\mathcal{F}$ est le tenseur de relaxation et dépendant de la variable interne d'état $\boldsymbol{k}$. ϕ est une fonction constitutive non linéaire qui dépend de $\boldsymbol{k}$. Il existe une variété de choix pour les variables internes d'état, pour référence dans le domaine voir [27], $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ est l'opérateur piézoélectrique reflétant la proportionnalité entre la charge électrique et la déformation à champ constant ou nul, $\mathcal{E}^* = (e^*_{ijk})$ est son transposée, $\boldsymbol{E}(\varphi) = -\nabla\varphi$ est le champ électrique et $\mathcal{C} = (C_{ij})$ désigne le tenseur de permittivité électrique à déformation nulle.

Nous utiliserons la loi de comportement (1.2.5) dans le chapitre 4 de cette thèse.

Finalement, afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps, il faut préciser les conditions aux limites sur Γ_3 et les conditions de contact avec ou sans frottement que nous décrirons dans les deux sections suivantes.

1.3 Conditions aux limites

Définitions maintenant, les conditions aux limites sur les parties Γ_1, Γ_2, Γ_a et Γ_b.

1.3.1 Condition aux limites de déplacement

Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie Γ_1, le champ des déplacements $\boldsymbol{u}$ est par conséquent nul

$$\boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T). \tag{1.3.1}$$

1.3.2 Condition aux limites de traction.

Une traction surfacique de densité f_2 agit sur Γ_2 et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma\nu}$ satisfait :

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = f_2 \qquad \text{sur } \Gamma_2 \times (0,T). \tag{1.3.2}$$

1.3.3 Conditions aux limites électriques.

Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations

$$\varphi = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_a \times (0,T), \tag{1.3.3}$$

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 \qquad \text{sur } \Gamma_b \times (0,T). \tag{1.3.4}$$

1.4 Lois de contact

1.4.1 Contact sans frottement

Dans un contact parfait, où sans frottement, l'action mécanique transmissible par obstacle entre deux solides ne peut être en tout point que normale au contact (perpendiculaire au plan tangent commun du contact). Ceci se traduit par la relation

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = 0 \;\; \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T),$$

qui signifie que la contrainte tangentielle est nulle. Si ce n'est pas le cas, on dit que le mouvement tangentielle se produit avec frottement ce qui nous oblige à introduire une lois de frottement qui prend en considération la composante tangentielle avec les autres variables du système.

1.4.2 Contact bilatéral

On note u_ν le déplacement normal et $\boldsymbol{u}_\tau$ le déplacement tangent

Le contact se fait d'une façon bilatérale, c'est à dire le contact est maintenu pendant le mouvement et il n'y a pas de séparation entre les deux corps.

La composante normale du champ des déplacements s'annule sur la surface de contact et donc

$$u_\nu = 0 \ \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T).$$

1.4.3 Contact unilatéral

Nous considérons ici le contact entre un corps déformable et une fondation qui est considérée comme étant rigide. De ce fait. quelques soient les forces appliquées, la fondation ne subira pas de déformations, et le corps ne pourra donc pas y pénétrer. Cette loi de contact a été proposé par Antonio Signori [70] en 1933. Elle est caractérisée par les 3 conditions suivantes :

$$\begin{cases} \text{(1) Condition de non pénétration } \ u_\nu \leq 0, \\ \text{(2) Condition de compression } \ \sigma_\nu \leq 0, \\ \text{(3) Condition de complémentarité } \ \sigma_\nu u_\nu = 0. \end{cases} \tag{1.4.1}$$

La condition de complémentarité se traduit de la manière suivante :

► Si $u_\nu = 0$, le corps est en contact et la force normale est orienté vers le corps $\sigma_\nu \leq 0$,

► Si $u_\nu < 0$, le corps quitte la base rigide et dans ce cas la réaction normale est nulle $\sigma_\nu = 0$.

Cette loi de contact peut être représentée sous la forme du graphe 1.3

D'autre part, si nous supposons qu'il y existe un interstice g entre la fondation et le corps, les conditions de Signorini s'écrivent de la maniére suivante :

$$\begin{cases} \text{(1) Condition de non pénétration } \ u_\nu \leq g, \\ \text{(2) Condition de compression } \ \sigma_\nu \leq 0, \\ \text{(3) Condition de complémentarité } \ \sigma_\nu(u_\nu - g) = 0. \end{cases} \tag{1.4.2}$$

Elle est également représentée dans la Figure 1.4.

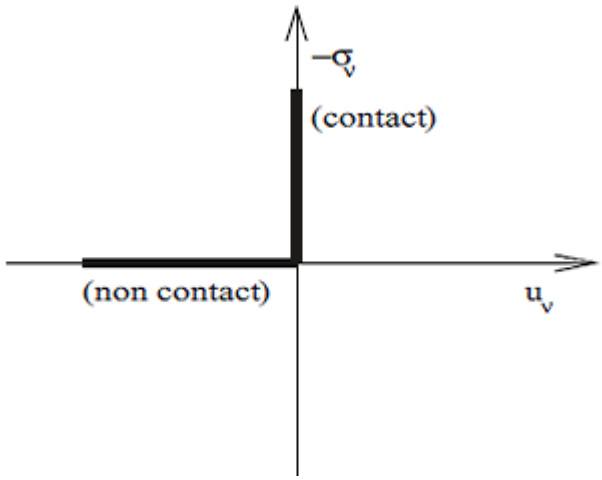

FIGURE 1.3 – Contact unilatéral

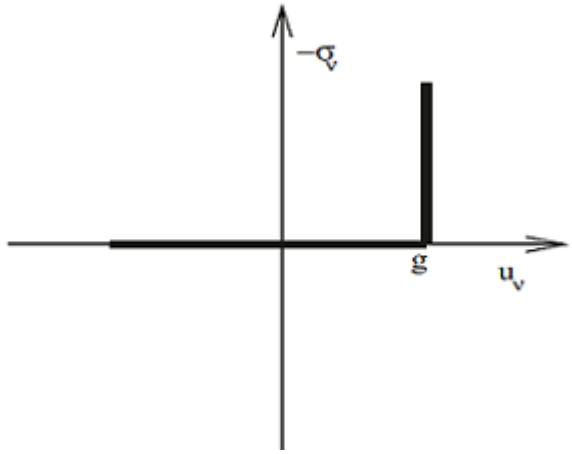

FIGURE 1.4 – Contact unilatéral avec interstice g

1.4.4 Contact avec compliance normale

Dans ce cas, les corps est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale σ_ν satisfait la condition dite de compliance normale

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) \tag{1.4.3}$$

où u_ν est le déplacement normal, g représente l'interstice entre les corps et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale. Cette condition indique que la fonda-

tion exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration $u_\nu - g$. . Comme exemple de la fonction p_ν nous pouvons considérer

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+, \tag{1.4.4}$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si} \quad r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{si} \quad r > \alpha, \end{cases} \tag{1.4.5}$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (1.4.3) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle dépasse α, la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

1.4.5 Contact avec compliance normale, contrainte unilatérale et adhésion

On va décrire la condition de contact avec compliance normale, contrainte unilatérale et adhésion sur $\Gamma_3 \times (0, T)$, on introduit une variable interne d'état β définie sur Γ_3, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'ya pas d'adhésion ; et quand $0 < \beta < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens. Pour plus détails sur ce paragraphe, on renvoit par exemple [12]. On suppose que la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale σ_ν satisfait la condition de compliance normale et contrainte unilatérale et adhésion, c'est-à-dire

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur} \;\; \Gamma_3 \times (0, T), \tag{1.4.6}$$

où σ_ν est le déplacement normal, γ_ν est un coefficient positif, $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée appelée fonction de compliance normale, et la fonction $R_\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de

troncature donné par

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si} \quad s < -L, \\ -s & \text{si} \quad -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si} \quad 0 < s. \end{cases} \tag{1.4.7}$$

Ici $L > 0$ est longeur caractéristique des liens (voir figure 1.5). Cette condition de contact peut

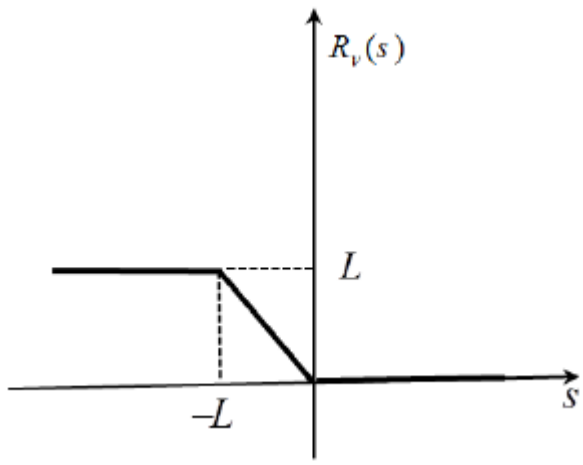

FIGURE 1.5 – Représentation graphique de l'opérateur de troncation R_ν

être formulée comme suit :

$$\begin{cases} u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu + p(u_\nu) - c_\nu \beta^2 R(u_\nu) \leq 0, \\ (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p(u_\nu) - c_\nu \beta^2 R(u_\nu)) = 0. \end{cases} \tag{1.4.8}$$

Dans (1.4.8) g est une constante strictement positive, donnée, et p est une fonction satisfait la condition (1.4.5). La condition (1.4.8) a été introduite dans [46] dans l'étude d'un problème dynamique pour des matériaux viscoplastiques. Elle montre que lorsqu'il ya séparation entre le corps et l'obstacle, alors la réaction de la fondation est nulle : en outre, la pénétration est limitée (puisque $u_\nu \leq g$). Lorsque $0 \leq u_\nu < g$. alors. la réaction de la fondation est déterminée uniquement par le déplacement normal (puisque $-\sigma_\nu = p(u_\nu) - c_\nu \beta^2 R(u_\nu)$) et lorsque $u_\nu = g$. la contrainte normale n'est pas uniquement déterminée mais est soumise à la restriction $-\sigma_\nu \geq p(u_\nu) - c_\nu \beta^2 R(u_\nu)$. Notons aussi que, dans le cas $g = 0$ la condition (1.4.8) devient la

condition de contact unilatéral (1.4.1).

Interprétation. La condition de contact (1.4.8) peut être interprétée physiquement de la façon suivante : la fondation est supposée être composée d'un matériau rigide recouvert d'une mince couche de matériau souple avec une épaisseur g. Le matériau souple est déformable et permet la pénétration, qui est modélisée avec compliane normale : le matériau dur est rigide et, par conséquent, il ne permet pas la pénétration. Il résulte de ce qui précède que la fondation a un comportement élastique-rigide : le comportement élastique est donné par la couche du matériau souple, et le comportement rigide est donné par le matériau rigide

Cette condition de contact (1.4.8) peut etre représentée sous la forme du graphe 1.6

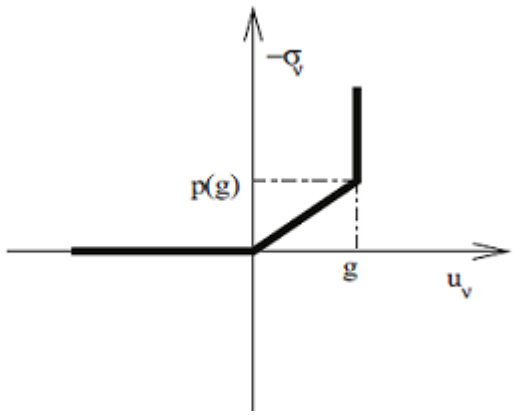

FIGURE 1.6 – Contact avec compliance normale et contrainte unilatérale et adhésion

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différentes. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme

$$\dot{\beta} = -[\beta(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu)^2 - \epsilon_a]_+ \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0,T), \tag{1.4.9}$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3, \tag{1.4.10}$$

où γ_ν et ε_a sont coefficients d'adhésion positifs, et β_0 l'adhésion initiale, tel que

$$0 \leq \beta_0 \leq 1, \quad \text{p.p.} x \in \Gamma_3, \tag{1.4.11}$$

Remarque 1.4.1 *Nous remarquons que le champ d'adhésion vérifie la restriction* $0 \leq \beta \leq 1$. *En effet, puisque* $\dot{\beta} \leq 0$ *donc* $\beta \leq \beta_0 \leq 1$. *En outre, si* $\beta = 0$ *quand* $t = t_0$, *donc* $\dot{\beta} = 0$ *pour tout* $t \geq t_0$, *et d'où* $\beta = 0$ *pour tout* $t \geq t_0$, *p.p.* $x \in \Gamma_3$. *Alors, nous concluons que* $0 \leq \beta \leq 1$ *pour tout* $t \in [0, T]$ *p.p.* $x \in \Gamma_3$.

1.4.6 Condition de contact avec compliance normale, frottement et usure

Nous supposons que l'usure de la surface de contact se produit en raison du glissement relatif entre la surface et la fondation et que les forces de frottement modifient les aspérités de la surface en enlevant de petites quantités de matière et en réarrangeant éventuellement les ondulations restantes. Nous introduisons une fonction d'usure $w : \Gamma_3 \times [0, T] \to \mathbb{R}$ qui mesurera l'usure de la surface de contact Γ_3. L'usure est identifiée comme la profondeur normale du matériau perdu. Nous utilisons la version modifiée de la loi d'Archard :

$$\dot{w}(t) = -k_w \|\boldsymbol{v}^*\| \sigma_\nu(t). \tag{1.4.12}$$

où $k_w > 0$ est un coefficient d'usure et v^* est la vitesse tangentielle de la fondation. Le matériau souple est thermo-viscoélastique-viscoplastique et pourrait s'user. Par conséquent, nous supposons que $\sigma_\nu(t)$ satisfait une condition de contact de conformité normale à l'usure, c'est-à-dire

$$-\sigma_\nu(t) = p_\nu(u_\nu(t) - w(t)) \text{ on } \Gamma_3. \tag{1.4.13}$$

où p_ν représente la fonction de compliance normale, cette condition montre qu'à chaque instant t, la réaction de la couche molle dépend de la valeur courante de la pénétration, représentée par

$u_\nu(t) - w(t)$. En effet, nous supposons qu'un processus d'usure de la fondation a lieu et que les débris sont immédiatement retirés du système. Ainsi, la pénétration devient $u_\nu(t) - w(t)$, au lieu de $u_\nu(t)$ comme dans le cas sans usure.

La généralisation correspondante de la loi de Coulomb du frottement sec peut être énoncée comme

$$\|\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\| \leq p_\tau(u_\nu(t) - w(t)) \text{ on } \Gamma_3, \tag{1.4.14}$$

$$\|\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\| < p_\tau(u_\nu(t) - w(t)) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t) = \boldsymbol{v}^*, \tag{1.4.15}$$

$$\|\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\| = p_\tau(u_\nu(t) - w(t)) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t) = \boldsymbol{v}^* - \alpha\boldsymbol{\sigma}_\tau(t),\ \alpha \geq 0. \tag{1.4.16}$$

Ici, p_τ représente la fonction de compliance tangentielle (appelée borne de friction) et $\dot{\boldsymbol{u}}_\tau$, est la vitesse tangentielle du corps. Les équations (1.4.15) et (1.4.16) peuvent être interprétées physiquement de la manière suivante. On peut dire que l'équation de condition (1.4.15) caractérise le comportement du corps dans la zone dite du bâton. Cela implique que lorsque la contrainte tangentielle est insuffisante, la frontière colle à la fondation et se déplace à la même vitesse que la fondation. L'équation de condition (1.4.16) décrit la zone dite de glissement, c'est-à-dire que lorsque la contrainte tangentielle atteint sa plus grande valeur, la frontière ne se déplace pas en tandem avec la fondation. Le scalaire $\alpha \geq 0$ est un multiplicateur indiquant la direction relative du glissement entre le corps et la fondation.

1.4.7 Condition thermique à la surface de contact

La condition aux limites de température associée sur Γ_3 est décrite

$$-k_{ij}\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\nu_j = k_e(\theta - \theta_F) - k_\tau(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{v}^*\|) \quad \text{on } \Gamma_3 \times (0, T), \tag{1.4.17}$$

où θ_F est la température de la fondation, k_e est le coefficient d'échange thermique entre le corps et l'obstacle, et $k_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction tangentielle donnée.

Pour simplifier la notation, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des différentes fonctions sur les variables $x \in \Omega \cup \Gamma$ et $t \in [0, T]$.

1.4.8 Condition électrique à la surface de contact

Dans cette section nous allons énoncer la condition de contact électrique, associée au problème électro-mécanique, sur la partie Γ_3 de la surface. Nous supposons que la fondation est électriquement conductive et son potentiel est maintenu à φ_0. La condition électrique sur Γ_3 est donnée par

$$D \cdot \nu = \psi(u_\nu - g)\Phi(\varphi - \varphi_0) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T). \tag{1.4.18}$$

où ψ et Φ sont des fonctions données qui seront décrites ultérieurement. Cette condition représente une condition régularisée qui peut être obtenue à partir des considérations suivantes.
Lorsqu'il n'y a pas de contact en un point sur la surface (i.e. $u_\nu < g$), l'interstice entre le corps et la base est supposé être isolant (disons qu'il est rempli d'air) et la composante normale du champ de déplacement électrique s'annule pour qu'il n'y ait aucune charge électrique libre sur la surface. Ainsi,

$$u_\nu < g \Rightarrow D \cdot \nu = 0. \tag{1.4.19}$$

Durant le processus de contact, (i.e. quand $u_\nu > g$) la composante normale du champ de déplacement électrique où la charge électrique libre est supposé être proportionnelle à la différence de potentiel entre la surface du corps et la fondation, avec une constante positive k_p comme facteur de proportionnalité. Ainsi,

$$u_\nu \geq g \;\; \Rightarrow \;\; D \cdot \nu = k_p\,(\varphi - \varphi_0). \tag{1.4.20}$$

Combinons (1.4.19), (1.4.20) pour obtenir

$$D \cdot \boldsymbol{\nu} = k_p\,\chi_{[0,\infty)}(u_\nu - g)\,(\varphi - \varphi_0), \tag{1.4.21}$$

où $\chi_{[0,\infty)}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,\infty)$, qui est donnée par

$$\chi_{[0,\infty)}(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } r < 0, \\ 1 & \text{if } r \geq 0. \end{cases}$$

La condition (1.4.21) décrit le contact électrique parfait. Pour la rendre plus réaliste, nous la régularisons par la condition (1.4.18) dans laquelle Φ est une fonction de troncation,

$$\Phi(s) = \begin{cases} -L_\Phi & \text{si } s < -L_\Phi, \\ s & \text{si } -L_\Phi \leq s \leq L_\Phi, \\ L_\Phi & \text{si } s > L_\Phi, \end{cases} \tag{1.4.22}$$

où L_Φ est une constante positive très grande. De cette façon, la différence $\varphi - \varphi_0$ est remplacée par

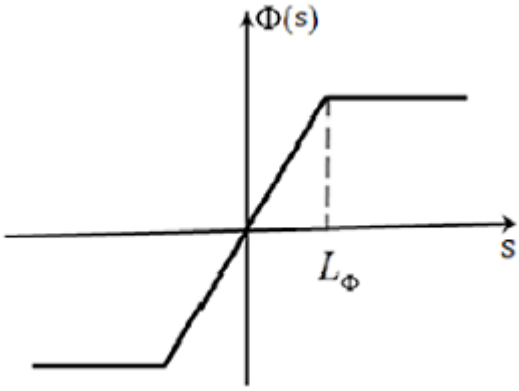

FIGURE 1.7 – Représentation graphique de la fonction Φ

$\Phi(\varphi - \varphi_0)$. Notons que cette troncation ne pose aucune limitation pratique sur l'applicabilité du modèle puisque L_Φ peut être arbitrairement grand (voir figure 1.7) et donc dans les applications $\Phi(\varphi - \varphi_0) = \varphi - \varphi_0$. Les raisons de la régularisation (1.4.18) de (1.4.21) sont mathématiques. Premièrement, nous avons besoin d'éviter les discontinuités dans les charges électriques lorsque le contact est établi et donc nous régularisons la fonction $k\chi_{[0,\infty)}$ dans (1.4.21) par une fonction Lipschitzienne ψ. Un choix possible est l'exemple suivant :

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ k\lambda r & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{1}{\lambda}, \\ k & \text{si } r > \frac{1}{\lambda}, \end{cases} \tag{1.4.23}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre assez grand.

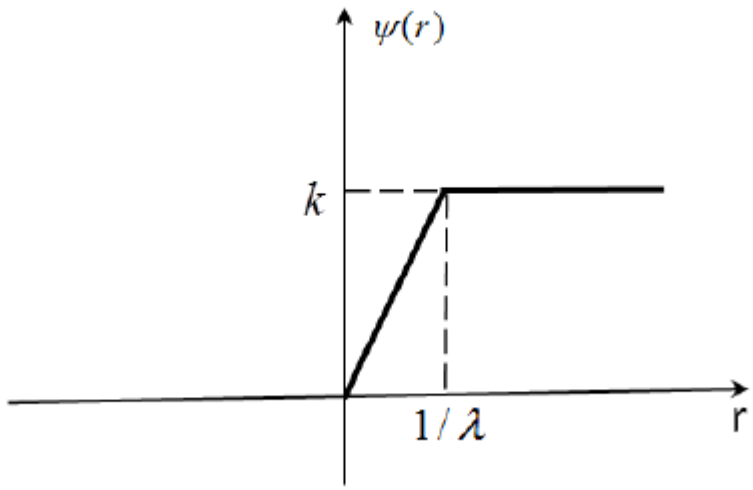

FIGURE 1.8 – Représentation graphique de la fonction ψ

Ce choix veut dire que durant le processus du contact, la conductivité électrique augmente avec le contact à travers les aspérités de la surface, et se stabilise quand la pénétration $u_\nu - g$ atteint la valeur $\frac{1}{\lambda}$. Deuxièmement, nous avons besoin du terme $\Phi(\varphi - \varphi_0)$ pour rendre le terme $\varphi - \varphi_0$ borné (voir figure 1.8). Notons que lorsque $\psi \equiv 0$ dans (1.4.18), nous obtenons

$$D \cdot \nu = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \tag{1.4.24}$$

ce qui découple les problèmes électriques et mécaniques sur la surface de contact. La condition (1.4.24) modélise le cas où l'obstacle est un isolant parfait et a été utilisée dans [74, 75, 49]. La condition (1.4.18) à la place de (1.4.24), introduit un couplage fort entre les conditions aux limites mécaniques et électriques et mène vers un nouveau modèle mathématique, non standard.

Chapitre 2

Outils Mathématiques

Dans ce chapitre, nous présentons quelques préliminaires de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisés partout dans cette thèse. Il nous est paru utile de donner quelques rappels sur les espaces fonctionnels et à valeurs vectorielles, les espaces fonctionnels pour la méanique, les équations et les inéquations variationnelles et quasi-variationnelles, les lemmes de Gronwall, le théorème de Cauchy-Lipschitz, et le théorème de point fixe. Partout dans ce chapitre Ω est un domaine borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, de frontière Γ représentable localement comme le graphe d'une fonction Lipschitzienne sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{d-1}$ étant situé localement d'un seul côté de Γ. Par ailleurs, nous considérons deux décompositions de Γ, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ et $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b \cup \Gamma_3$ avec $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$ telle que Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_a, Γ_b sont mesurables et $mes\Gamma_1 > 0$, $mes\Gamma_b > 0$.

2.1 Espaces fonctionnels

2.1.1 Espaces de Sobolev

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \ \partial_i u \in L^2(\Omega), \ i = 1, ...d\}.$$

D'abord, on note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$. On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \quad \text{et on écrit } \|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^d}. \tag{2.1.1}$$

On a les résultats suivants :

$$C^1(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega)$$

Théorème 2.1.1 . *(**Rellich**)*

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \quad \textit{avec injection compacte}$$

Théorème 2.1.2 . *(**trace de Sobolev**) Il existe une application linéaire et continue $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ telle que $\gamma u = u|_\Gamma$ pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$.*

Remarque 2.1.1 . *l'espace $L^2(\Gamma)$ ci-dessus represénte l'espace des fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle $d\Gamma$. L'application γ s'appelle application de trace ; elle est définie comme le pronlongement par densité de l'application $u \mapsto u|_\Gamma$ définie pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$. On note que l'application de trace $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ est un opérateur compact.*

Remarque 2.1.2 *On note que l'application de trace $\delta : H^1(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Gamma)$ est un opérateur compacte.*

Définition 2.1.1 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $\mathrm{W}^{k,p}(\Omega)$ par*

$$\mathrm{W}^{k,p}(\Omega) = \Big\{ u \in \mathrm{L}^p(\Omega) \ \ \forall \alpha,\ |\alpha| \leq k;\ \exists v_\alpha \in \mathrm{L}^p(\Omega),\ \textit{tel que}\, v_\alpha = D^\alpha u \Big\}.$$

Remarque 2.1.3 *Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^\alpha u$ et v_α.*

La norme sur l'espace $\mathrm{W}^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\| u \|_{\mathrm{W}^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}} & \text{si} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \max\limits_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} & \text{si} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $\mathrm{W}^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

Théorème 2.1.3 *Les espaces de Sobolev* $\mathrm{W}^{k,p}(\Omega)$*, pour* $k \in \mathbb{N}$ *et* $p \in [1, +\infty]$*, munis de la norme* $\| \cdot \|$*, sont des espaces de Banach. De plus, les espaces* $H^k(\Omega)$*, pour tout* k *entier, sont des espaces de Hilbert.*

Pour plus de détails sur les espaces de Sobolev nous renvoyons à [18].

2.1.2 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \| \cdot \|_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $C_c(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X.

Définition 2.1.2 . Une fonction $f : [0, T] \to X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que $\|f_n(t) - f(t)\|_X \to 0$ quand $n \to \infty$, pour tout $t \in [0, T]/E$.

Définition 2.1.3 . Une fonction $f : [0, T] \to X$ est dite fortement dérivable dans $t_0 \in (0, T)$ s'il existe un élément $\frac{df}{dt}(t_0) \in X$ appelé la dérivée forte de f dans t_0, tel que

$$\underset{h \to 0}{Lim} \| \frac{1}{h}(f(t_0 + h) - f(t_0)) - \frac{df}{dt}(t_0) \|_X = 0. \tag{2.1.2}$$

Définition 2.1.4 . Une fonction $f : [0,T] \to X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0,T;X)$ telle que

$$\underset{n\to+\infty}{Lim} \int_0^t \|(f_n(t) - f(t))\|_X dt = 0. \tag{2.1.3}$$

Théorème 2.1.4 ***(Bochner)*** *Une fonction $f : [0,T] \to X$ est dite mesurable et intégrable si et seulement si $x \to \|f(x)\|_X : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ est intégrable. Dans ce cas,*

$$\| \int_0^T f dt\|_X \leq \int_0^T \|f\|_X dt. \tag{2.1.4}$$

Soit $1 \leq p \leq \infty$ l'espace de Lebesgue $L^p(0,T;X)$ est l'ensemble des classes de fonctions f : $(0,T) \to X$ mesurables telles que l'application $t \to \|f(t)\|_X$ appartient à $L^p(0,T)$ On sait que $L^p(0,T;X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = (\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty, \tag{2.1.5}$$

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf\{C > 0 \ : \ \|f(t)\|_X \leq C, \ \text{p.p.} t \in (0,T)\}, \quad \text{si } p = \infty. \tag{2.1.6}$$

par ailleurs, on a les résultats suivants.

Proposition 2.1.1 *(1) $L^p(0,T;X)$ $(1 \leq p < \infty)$ est un espace de Banach.*
(2) Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_X$ alors $L^2(0,T;X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt.$$

(3) $L^r(0,T;X) \subset L^q(0,T;X)$ avec injection continue $1 \leq q \leq r \leq \infty$.
(4) Si X est un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0,T;X)' \subset L^q(0,T;X) \quad si\ 1 < p\ ,q < \infty, \quad \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0,T;X)' \subset L^\infty(0,T;X),$$

où $L^p(0,T;X)'$ reprèsente le dual de l'espace $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 2.1.5 . Soit $u, v \in L^1(0,T;X)$. La fonction v s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $(0,T)$ si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)v(t)dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0,T). \tag{2.1.7}$$

$C_c^\infty(0,T)$ étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables, à support compact dans $(0,T)$. Nous écrivons $v = \dot{u}$ pour $n = 1$ et $v = u^{(n)}$ pour $n \geq 2$.

Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0,T;X)$ est l'espace des fonctions $u : [0,T] \to X$ telles que $u \in L^p(0,T;X)$ et $\dot{u} \in L^p(0,T;X)$ et $W^{1,p}(0,T;X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \|u\|_{L^p(0,T;X)}.$$

Définition 2.1.6 Une fonction $f : [0,T] \to X$ est dite absolument continue si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_j, b_j) disjoints, inclus dans $[0,T]$, tels que $\sum_j (b_j - a_j) < \delta$ on a $\sum_j \|f(b_j) - f(a_j)\|_X < \varepsilon$

Maintenant nous rappelons le lien entre les fonctions absolument continues et les fonctions de l'espace $W^{1,p}(0,T;X)$.

Théorème 2.1.5 . *Soit $1 \leq p \leq \infty$ un espace de banach reflexif et soit $u \in L^p(0,T;X)$. Les propriétés suivantes sont èquivalentes :*

(1) $u \in W^{1,p}(0,T;X)$.

(2) u admet un reprèsentant absolument continu presque partout dérivable ayant la dèrivée forte dans $L^p(0,T;X)$.

(3) Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^p(0,T;X)$ telles que $u(t) = u_0 + \int_0^t g(s)ds \quad \forall t \in [0,T]$.

Il découle de la démonstration du Théorème 2.1.5 que, si X est un espace réflexif, alors toute fonction $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ est fortement dérivable p.p sur $(0,T)$ et $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ p.p sur $(0,T)$ par

ailleurs $W^{1,1}(0,T;X)$ coincide avec l'ensemble des fonctions lipschitziennes $u : [0,T] \to X$.

Étant donné un entier $k \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$ on définit par récurrence l'espace

$$W^{k,p}(0,T;X) = \{u \in W^{k-1,p}(0,T;X); \dot{u} \in W^{k-1,p}(0,T;X)\}.$$

on vérifie aisément que $u \in W^{k,p}(0,T;X)$ si et seulement s'il existe k fonctions $g_1, ...g_k \in L^\infty(0,T;X)$ telles que

$$\int_0^T u(t)\varphi^{(j)}(t)dt = (-1)^j \int_0^T g_j(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \forall j = 1, 2, ..., k$$

où $\varphi^{(j)}$ désigne la dérivée d'ordre j de φ. On peut donc considérer les dérivée successives $\dot{u} = g_1$,$u^{(2)} = g_2, ..., u^{(k)} = g_k$. L'espase $W^{k,p}(0,T;X)$ est un espase de banach munidela norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=k} \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

Nous dénotons aussi par $C([0,T];X)$ et $C^1([0,T];X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0,T]$ à valeurs dans X, respectivement, avec les normes

$$\begin{aligned} \|x\|_{C([0,T];X)} &= \underset{t\in[0,T]}{Max} \|x(t)\|_X, \\ \|x\|_{C^1([0,T];X)} &= \underset{t\in[0,T]}{Max} \|x(t)\|_X + \underset{t\in[0,T]}{Max} \|\dot{x}(t)\|_X \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Pour plus de détails sur les résultats résumés dans ce paragraphe nous renvoyons le lecteur par exemple à [18].

2.1.3 Espaces fonctionnels pour la méanique

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques u et $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\begin{aligned} H =& \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\}, \\ H_1 =& \{u = (u_i) \in H \mid u_i \in H^1(\Omega)\}, \\ Q =& \{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\}, \\ Q_1 =& \{\boldsymbol{\sigma} \in Q \mid \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j}) \in L^2(\Omega)^d\}. \end{aligned}$$

Les espaces H, H_1, Q et Q_1 sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires donnés par

$$
\begin{aligned}
&(u,v)_H = \int_\Omega u_i v_i dx, \quad \forall u,v \in H,\\
&(u,v)_{H_1} = (u,v)_H + (\varepsilon(u),\varepsilon(v))_Q, \quad \forall u,v \in H_1,\\
&(\boldsymbol{\sigma},\tau)_Q = \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij} dx, \quad \forall \boldsymbol{\sigma},\tau \in Q,\\
&(\boldsymbol{\sigma},\tau)_{Q_1} = (\boldsymbol{\sigma},\tau)_Q + (\operatorname{Div}\boldsymbol{\sigma},\operatorname{Div}\tau)_H, \quad \forall\ \boldsymbol{\sigma},\tau \in Q_1,
\end{aligned}
$$

respectivement, où $\boldsymbol{\varepsilon} : H_1 \to Q$ et $\operatorname{Div} : Q_1 \to H$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \operatorname{Div}\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,i}).$$

Soit X un espace de Banach, nous désignons par $\|\cdot\|_X$ la norme associée, en particulier les normes associées aux espaces H, H_1, Q et Q_1.

Puisque la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est définie p.p. Pour tout champ de vecteurs $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour désigner la trace γv de v sur Γ. Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \to H_\Gamma$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par H_Γ, ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Désignons par H'_Γ le dual de H_Γ, et $(\cdot,\cdot)$ le produit de dualité entre H'_Γ et H_Γ Pour tout $\boldsymbol{\sigma} \in Q_1$, il existe un élément $\sigma\nu \in H'_\Gamma$ tel que

$$(\sigma\nu, \gamma v) = (\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(v))_Q + (\operatorname{Div}\boldsymbol{\sigma}, v)_H \quad \forall v \in H_1. \tag{2.1.9}$$

En outre, si $\boldsymbol{\sigma}$ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\sigma\nu, \gamma v) = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot v da, \quad \forall v \in H_1. \tag{2.1.10}$$

Donc, pour $\boldsymbol{\sigma}$ assez régulier nous avons la formule suivante (Formule de Green) :

$$(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(v))_Q + (\operatorname{Div}\boldsymbol{\sigma}, v)_H = \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma}\nu \cdot v da, \quad \forall v \in H_1. \tag{2.1.11}$$

Nous définissons l'espace des déplacements admissibles V défini par

$$V = \{v \in H^1(\Omega)^d \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}. \tag{2.1.12}$$

et soit le sous-ensemble convexe des déplacements admissibles donné par

$$U = \{v \in V \mid v_\nu \leq g \text{ sur } \Gamma_3\}. \tag{2.1.13}$$

Puisque $mes\Gamma_1 > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V, alors, il existe une constante $C_K > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$\|\varepsilon(v)\|_Q \geq C_K \|v\|_{H_1}, \tag{2.1.14}$$

Nous considérons sur l'espace V, le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q \quad \forall u, v \in V. \tag{2.1.15}$$

et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée, i.e.

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_Q, \quad v \in V. \tag{2.1.16}$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert. En outre, par le Théorème de trace de Sobolev il existe une constante C_0 dépendant uniquement de Ω, Γ_1 et Γ_3 telle que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 \|v\|_V, \quad \forall v \in V. \tag{2.1.17}$$

De plus, on note par V' le duale de V. Nous utilisons la notation $\langle ., . \rangle_{V' \times V}$ pour représenter la dualité entre V' et V.

Pour une fonction scalaire β, qui représente le champ d'adhésion sur Γ_3 la surface du contact, nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{Z} = \{\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \to \mathbb{R} \mid 0 \leq \beta(t) \leq 1 \ \text{ sur } \Gamma_3\}. \tag{2.1.18}$$

Pour le champ de températeure, nous définissons l'ensemble E de $H^1(\Omega)$ par

$$E = \{\omega \in H^1(\Omega) \quad \omega = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}, \tag{2.1.19}$$

et on considère le produit scalaire et la norme correspondante donnés par :

$$(\theta, \eta)_E = (\nabla\theta, \nabla\eta)_{L^2(\Omega)^d}, \quad \|\eta\|_E = (\eta, \eta)_E^{\frac{1}{2}} \ \forall \theta, \eta \in E \tag{2.1.20}$$

D'après le théorème de la trace de Sobolev, il existe une constante $C_1 > 0$ qui ne dépend que d' Ω et de Γ telle que

$$\|\eta\|_{L^2(\Gamma_3)} \leqslant C_1 \|\eta\|_E \ \ \forall \eta \in E \tag{2.1.21}$$

Puisque $mes(\Gamma_1) > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est satisfaite, ainsi,

$$\| \bigtriangledown \eta \|_{L^2(\Omega)^d} \geq \tilde{C}_F \ \|\eta\|_E \ \ \forall \eta \in E \tag{2.1.22}$$

$L^2(\Omega)$ s'identifie à son dual et à un sous-espace du dual E' of E,c'est-à-dire., $E \subset L^2(\Omega) \subset E'$, et on dit que les inclusions ci-dessus définissent un triplet de Gelfand.

Nous utilisons la notation $\langle ., . \rangle_{E',E}$ pour la dualité entre E' et E. On a

$$\langle \theta, \eta \rangle_{E',E} = (\theta, \eta)_{L^2(\Omega)} \ \ \forall \theta, \eta \in E \tag{2.1.23}$$

Dans ce qui suit, nous définissons les espaces de Sobolev associés aux inconnues électriques (champ du déplacement électrique D et le potentiel électrique φ) de problème électro-mécaniques qui vont être introduit dans la chapitre 4 de la thèse.

Soient les espaces

$$\mathcal{W} = \{ \ D = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega), \mathrm{div} D \in L^2(\Omega)\}, \tag{2.1.24}$$

$$W = \{\zeta \in H^1(\Omega) \mid \zeta = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}, \tag{2.1.25}$$

où $\mathrm{div} D = (D_{i,i})$. Ces espaces $\mathcal{W}$ et W sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires donnés par

$$(D, E)_{\mathcal{W}} = (D, E)_{L^2(\Omega)^d} + (\mathrm{div}\, D, \mathrm{div}\, E)_{L^2(\Omega)}, \tag{2.1.26}$$

$$(\varphi, \phi)_W = (\nabla\varphi, \nabla\phi)_{L^2(\Omega)^d}, \tag{2.1.27}$$

et leurs normes associées $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ et $\|\cdot\|_W$, respectivement.

$$\|D\|^2_{\mathcal{W}} = \|D\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathrm{div} D\|^2_{L^2(\Omega)} \quad , \|\phi\|_W = \|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)^d}. \tag{2.1.28}$$

Puisque $mes(\Gamma_a) > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est satisfaite, ainsi,

$$\|\nabla\zeta\|_{L^2(\Omega)^d} \geq C_F \, \|\zeta\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall\, \zeta \in W, \tag{2.1.29}$$

où $C_F > 0$ est une constante qui dépend uniquement de Ω et Γ_a et $\nabla\xi = (\xi_{.,i})$.
Il s'ensuit de (2.1.29) que $\|\cdot\|_{H_1(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_W$ sont des normes équivalentes sur W et donc $(W, \|\cdot\|_W)$ est un espace réel de Hilbert . De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $\tilde{C}_0$ dépendant uniquement de Ω, Γ_a et Γ_3 telle que

$$\|\zeta\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{C}_0 \|\zeta\|_W, \quad \forall\, \zeta \in W. \tag{2.1.30}$$

Aussi, rappelons que lorsque $\mathbf{D} \in L^2(\Omega)^d$ est une fonction régulière, la formule de Green (2.1.11) est satisfaite :

$$(\mathbf{D}, \nabla\zeta)_{\mathcal{W}} + (\mathrm{div}\,\mathbf{D}, \zeta)_{\mathcal{W}} = \int_\Gamma \mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\nu}\zeta da, \quad \forall\zeta \in H^1(\Omega), \tag{2.1.31}$$

Enfin, nous definissons les formules de green suivants :

$$(\Delta\theta, \xi)_{L^2(\Omega)} + (\nabla\theta\cdot\nabla\xi)_{L^2(\Omega)} = \int_\Gamma \frac{\partial\theta}{\partial\nu} \;\; \delta dx, \quad \forall\theta \in L^2(\Omega).\; \xi \in H^1(\Omega), \tag{2.1.32}$$

$$(\Delta\zeta, \xi)_{L^2(\Omega)} + (\nabla\zeta\cdot\nabla\xi)_{L^2(\Omega)} = \int_\Gamma \frac{\partial\zeta}{\partial\nu} \;\; \xi dx, \quad \forall\zeta \in L^2(\Omega), \xi \in H^1(\Omega). \tag{2.1.33}$$

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le lecteur par exemple à [1, 18, 28].

2.2 Eléments d'analyse dans les espaces de Hilbert

Dans cette section nous allons rappeler quelques notions d'analyse non linéaire qui seront d'une grande utilité pour la réalisation de ce travail. En particulier des résultats sur les opérateurs monotones, et quelques résultats concernant les inéquations quasi-variationnelles elliptiques

et d'évolution, et les équations et les inéquations variationnelles d'évolution paraboliques du première ordre qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques.

2.2.1 Opérateurs non linéaires

Nous commonçons ce paragraphe par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert V muni du produit scalaire $(.,.)_V$ et la norme associée $\|.\|_V$ et V' l'espase dual de V en notant par $\langle .,. \rangle_{V' \times V}$ pour le produit de dualité entre V et V'.

Définition 2.2.1 . L'opérateur $A : V \to V'$ est dite :

(a) monotome si

$$\langle Au - Av, v - u \rangle_{V \times V'} \geq 0 \quad \forall u, v \in V;$$

(b) fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_{V \times V'} \geq m \|u - v\|_V^2 \quad \forall\, u, v \in V;$$

(c) de Lipschitz s'il existe $L > 0$

$$\|Au - Av\|_{V'} \leq L \|u - v\|_V \quad \forall\, u, v \in V.$$

(d) est dite hemicontinu si pour toute suite numérique $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ telle que $\lambda_n \to \lambda$ lorsque $n \to +\infty$ on a

$$\langle A(u + \lambda_n v), w \rangle_{V' \times V} \to \langle A(u + \lambda v), w \rangle_{V' \times V} \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

En utilisant la définition précédente, on a le résultat suivant :

Proposition 2.2.1 . *Tout opérateur de Lipschitz est hemcontinu.*

2.2.2 Inéquations variationnelles paraboliques

Théorème 2.2.1 . *Soit $V \subset H \subset V'$ est un triple de Gelfand, K est un sous-ensemble fermé non vide et convexe de V, et soit $A : V \to V'$ est un opérateur linéaire, symétrique et continu qui satisfait*

$$\text{il existe } C_2 \in \mathbb{R} \text{ et } C_3 > 0 \text{ tel que } \langle Av, v\rangle_{V'\times V} + C_2\|v\|_H^2 \geq C_3\|v\|_V^2, \quad \forall v \in V. \tag{2.2.1}$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0,T;V')$, il existe une unique fonction u qui satisfaite

$$u \in L^2(0,T;V)) \cap C(0,T;H) \cap W^{1,2}(0,T;V') \tag{2.2.2}$$

$$u(t) \in K, \quad \forall t \in [0,T], \tag{2.2.3}$$

$$\begin{aligned} &\langle \dot{u}(t), v - u(t)\rangle_{V'\times V} + \langle Au(t), v - u(t)\rangle_{V'\times V} \\ &\geq \langle f(t), v - u(t)\rangle_{V'\times V}, \ \forall v \in K, \ p.p.t \in (0,T), \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2.2.5}$$

Si $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0,T;H)$, alors il existe une unique fonction u qui satisfaite (2.2.3)-(2.2.5) *et vérifie*

$$u \in W^{1,2}(0,T;H) \cap L^2(0,T;V) \tag{2.2.6}$$

Ce théorème sera utilisé au chapitre 3 dans l'étude du problème de contact avec endommagement.

2.2.3 Équations différentielles ordinaires dans des espaces abstraits

Le résultat abstrait suivant sera utilisé dans chapitre 3 pour prouver l'existance et l'unicité de la solution du problème intermédiaire impliquant le champ de temperature.

Théorème 2.2.2 . *Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : V \to V'$ un opérateur hemicontinu et monotone qui satisfait.*

$$\langle Av, v\rangle_{V'\times V} \geq \omega\|v\|_V^2 + \lambda, \quad \forall v \in V, \tag{2.2.7}$$

$$\|Av\|_{V'} \leq C_1(\|v\|_V + 1), \quad \forall v \in V \tag{2.2.8}$$

Pour des constantes $\omega > 0$, $C_1 > 0$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Etant donnée $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0,T;V')$, alors il existe une fonction unique u satisfait

$$\begin{aligned}
&u \in L^2(0.T;V) \cap C([0,T];H), \quad \dot{u} \in L^2(0.T;V'),\\
&\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \ p.p.t \in (0,T),\\
&u(0) = u_0.
\end{aligned}$$

Les démonstrations de deux théorèmes précédentes peuvent être trouvées par exemple dans [10, 11].

2.2.4 Inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution

On considère un espace de Hilbert X muni du produit scalaire $(.,.)_X$ et de la norme associée $\|\,.\,\|_X$, et K est un sous-ensemble convexe non vide de X, et soit $A : K \to X$ un opérateur non linéaire, $J : K \times K \to \mathbb{R}$ et $f \in X$. Compte tenu de ces données, nous considérons l'inéquation quasi-variable suivante

$$u \in K, \qquad (Au, v-u)_X + J(u,v) - J(u,u) \geq (f, v-u) \qquad \forall v \in K. \tag{2.2.9}$$

Pour résoudre cette inéquation, on suppose que A est fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire

$$\begin{cases}
\text{(a) Il existe } m_\Lambda > 0 \text{ tel que}\\
\quad (\Lambda u - \Lambda v, u-v)_X \geq m_\Lambda \|u-v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X.\\
\text{(b) Il existe } M_\Lambda > 0 \text{ tel que}\\
\quad \|\Lambda u - \Lambda v\|_X \leq M_\Lambda \|u-v\|_X \quad \forall u,\, v \in X.
\end{cases} \tag{2.2.10}$$

et la fonctionnelle $J : K \times K \to \mathbb{R}$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(a)Pour tout } \eta \in K, J(\eta, \cdot) : K \to \mathbb{R} \\ \quad \text{est convexe et semi-continu inférieur sur } K \\ \text{(b) Il existe } \alpha \geq 0 \text{ tel que} \\ \quad J(u_1, v_2) - J(u_1, v_1) + J(u_2, v_1) - J(u_2, v_2) \\ \qquad \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \quad \forall\, u_1, u_2, v_1, v_2 \in K \end{cases} \tag{2.2.11}$$

L'existence et l'unicité d'une solution au problème (2.2.9) est donnée par le résultat suivant.

Théorème 2.2.3 *Supposons que les hypothèses* (2.2.10) *et* (2.2.11) *soient satisfaites. Alors, si* $\alpha < m_\Lambda$*, pour tout* $f \in X$*, il existe une solution unique* $u \in X$ *au problème* (2.2.9)*.*

Une preuve du théorème peut être trouvée par exemple dans ([77],p.83).

Dans le troisième chapitre du mémoire, nous utiliserons un résultat abstrait sur les inéquations quasi-variationnelles d'évolution. Ce résultat concerne les problèmes du type suivant

Trouver $u : [0, T] \to X$ tel que

$$\begin{aligned} &(\Lambda \dot{u}(t), v - \dot{u}(t))_X + (Bu(t), v - \dot{u}(t))_X + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \\ &\geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X \quad \forall\, v \in X,\ t \in [0, T], \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2.2.13}$$

La différence entre le problème (2.2.9) et le problème (3.3.1)–(2.2.13) consiste dans le fait que le dernier problème est évolutif. En effet, f et u dépendent maîntenant du temps, la dérivée $\dot{u}$ apparaît dans la formulation du problème et par conséquent, une condition initiale, (2.2.13), est rajoutée.

Pour étudier le problème (3.3.1)–(2.2.13), en plus des hypothèses (2.2.10) et (2.2.11), nous avons besoin des hypothèses suivantes.

L'opérateur non linéaire $B : X \to X$est de Lipschitz, c'est-à-dire, Il existe $L_B > 0$ tel que

$$\exists L_B > 0 \text{telque } \|Bu_1 - Bu_2\|_X \leq L_B \|u_1 - u_2\|_X \quad \forall\, u_1, u_2 \in X. \tag{2.2.14}$$

Aussi, nous supposons que

$$f \in C([0,T];X), \tag{2.2.15}$$

$$u_0 \in X. \tag{2.2.16}$$

Dans l'étude du problème (3.3.1)–(2.2.13), nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.2.4 *Soient* (2.2.10)*,* (2.2.11) *et* (4.3.3)-(3.3.5) *satisfaites. Alors :*

(1) Il existe une unique solution $u \in C^1([0,T];X)$ *au problème* (3.3.1) *and* (2.2.13)*.*

(2) Si u_1 *et* u_2 *sont deux solutions du problème* (3.3.1) *and* (2.2.13)*correspondant aux données* $f_1, f_2 \in C([0,T];X)$*, alors il existe* $c > 0$ *tel que*

$$\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_X \leq c\,(\|f_1(t) - f_2(t)\|_X + \|u_1(t) - u_2(t)\|_X) \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{2.2.17}$$

Ce résultat d'existence, d'unicité et de régularité a été prouvé dans [43] et peut être aussi trouvé dans [44, p. 230–234].

2.2.5 Théorème de point fixe de Banach

Le théorème de point fixe de Banach va être utilisé plus tard dans cette thèse pour démontrer l'existence et l'unicité. Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_X$, $K \subset X$ une partie de X et soit $\Lambda : K \to X$ un opérateur défini sur K. On s'intéresse à l'exitence d'une solution de l'équation

$$\Lambda(u) = u, \quad u \in K \tag{2.2.18}$$

Une telle solution de (2.2.18) s'appelle un point fixe de Λ dans K.

Théorème 2.2.5 *. (de point fixe de Banach) Soit* K *une partie non vide et fermé de l'espace de Banach* X *et soit* $\Lambda : K \to K$ *une contractante, i.e,* $\exists k \in]0,1[$ *tel que*

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq k\|u - v\|_X, \quad u, v \in K.$$

Alors il exists un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$, i.e, Λ possède un point fixe unique dans K

Nous allons ainsi utiliser une version du théorème de point fixe de Banach que nous présentons ci-dessus.
Pour cela, nous rappelons que les puissances de l'opérateur Λ sont définies récursivement par

$$\Lambda^n = \Lambda(\Lambda^{n-1}) \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Théorème 2.2.6 . *Sous les mêmes conditions du Théorème 2.2.5, on suppose que Λ^n est une contractante pour un certain entier $n \geq 2$. Alors Λ admet un point fixe unique dans K.*

2.3 Compléments divers

Dans cette section, nous allons rappeler une version du théorème de Cauchy- Lipschitz (voir par exemple [83] ,p.48).

Théorème 2.3.1 *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ est un espace de Banach réel et soit $F(t,\cdot) : X \to X$ un opérateur défini p.p. sur $(0,T)$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

il existe $L_F > 0$ tel que $\|F(t,x) - F(t,y)\|_X \leq L_F\|x-y\|_X$, $\forall x, y \in X$, p.p. $t \in (0,T)$,

il existe $1 \leq p \leq \infty$ tel que $F(\cdot, x) \in L^p(0,T;X)$, $\quad \forall x \in X$.

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique, $x \in W^{1,p}(0,T;X)$ tel que

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad \text{p.p. } t \in (0,T), \\ &x(0) = x_0. \end{aligned}$$

Le Théorème 2.3.1 sera utilisé pour prouver la solvabilité unique du problème intermédiaire impliquant le champ d'adhésion ou le champ d'usure.

Nous rappelons encore les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration et d'estimation d'erreur, en particulier pour ètablir l'unicitè de la solution. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans cette section, on pourra consulter par exemple [45]. **Preuve.** pour une démonstration, voir ([18], page 81-82).

2.3.1 Lemmes de type Gronwall

Lemme 2.3.1 . *Soient $m, n \in C([0,T] : \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$ une constante, et $\phi \in C([0,T]; \mathbb{R})$. est une fonction telle que*

(1) *Si*

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\phi(s)ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

alors

$$\phi(t) \leq (a + \int_0^t m(s)ds) \exp(\int_0^t n(s)ds), \quad \forall t \in [0,T].$$

(2) *Si*

$$\phi(t) \leq m(t) + a \cdot \int_0^t \phi(s)ds \quad \forall t \in [0,T],$$

alors

$$\int_0^t \phi(s)ds \leq e^{aT} \cdot \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0,T],$$

pour le cas particulier $m = 0$ la partie (1) de ce lemme devient

Corollaire 2.3.1 . Soit $n \in C([0,T] : \mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$.une constante, et $\phi \in C([0,T] : \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s\phi(s)ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

alors

$$\phi(t) \leq a \cdot \exp(\int_0^t n(s)ds), \quad \forall t \in [0,T],$$

Le corollaire 2.3.1 est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. On suppose deux solutions, en notant par ϕ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ϕ sous la forme

$$\phi(t) \leq \int_0^t n(s)\phi(s)ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$. En appliquant corollaire 2.3.1 donne immédiatement la nullité de ϕ.

2.3.2 Théorème de représentation de Riesz-Fréchet

Théorème 2.3.2 *Soit H un espace de Hilbert et soit $H^{'}$ son espace dual. Alors, pour tout $\phi \in H^{'}$ il existe $f \in H$ unique tel que*

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H.$$

De plus

$$\| \phi \|_{H'} = \| f \|_H .$$

2.3.3 Sous différentiabilité

Nous considérons partout dans ce paragraphe que X est un espace normé, X' l'espace dual de X et K un sous-ensemble de l'espace X.

Définition 2.3.1 . On appelle fonction indicatrice de K , la fonction χ_K définie par

$$\chi_K = \begin{cases} 0 & \text{si } \ u \in K, \\ +\infty & \text{si } \ u \notin K \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Il est important d'introduire des notions telles que la sous-différentiabilité et le sous-gradiant d'une fonction. La notion de sous-différentiabilité intervient fréquement en mécanique et notamment dans la mécanique du contact.

Définition 2.3.2 . Soit une fonction $j : X \to \bar{\mathbb{R}}$ et u un élément de X tel que $j(u) \neq \pm\infty$.
Le sous-différentiel de j en u, noté $\partial j(u)$ est l'ensemble de X' défini par

$$\partial j(u) = \{u' \in X' : \ j(v) \geq j(u) + \langle u', v - u\rangle_{X' \times X}, \quad \forall\, v \in X\}. \tag{2.3.2}$$

Tout élément u' de l'ensemble $\partial j(u)$ est appelé sous-gradient de j en u. La fonction j est dite sous-différentiable en u si $\partial j(u) \neq \emptyset$, et on dit sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X.

Dans le cas d'un espace de Hilbert X, le sous-différentiel de j en u peut aussi être écrit comme

$$\partial j(u) = \{u' \in X : \ j(v) \geq j(u) + (u', v - u)_X, \quad \forall\, v \in X\}\,.$$

Maintenant nous supposons que K est un convexe non vide. Nous considérons la fonction indicatrice χ_K de l'ensemble K. Nous avons de suite que si $u \notin K$ alors $\partial\chi_K(u) = \emptyset$. Supposons alors que $u \in K$. Il vient que si $u' \in \partial\chi_K(u)$ alors $\langle u', v - u\rangle_{X' \times X} \leq 0$, $\forall v \in K$.
Nous pouvons ainsi caractériser le sous-différentiel $\partial\chi_K$ d'une fonction indicatrice χ_K d'un ensemble convexe non vide

$$\partial\chi_K(u) = \{u' \in X' \ : \ \langle u', v - u\rangle_{X' \times X} \leq 0, \ \forall v \in K\} \tag{2.3.3}$$

Chapitre 3

Problème de contact quasistatique thermo-viscoélastique-viscoplastique avec endommagement et usure

Dans ce chapitre, nous allons traiter un problème de contact quasistatique entre un corps thermo-viscoélastique-viscoplastique et une fondation en mouvement. Le contact est modélisé par une condition de compliance normale avec une loi de frottement sec associée et usure decrit par la loi d'Archard. L'effet d'endommagement est pris en considération dans la loi constitutive thermo-viscoélastique. Ensuite, nous décrivons une formulation variationnelle. Enfin, dans la troisième section, nous énonçons Théorème 3.3.1 et nous fournissons l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème, et nous le prouvons. Les résultats présentés dans ce chapitre font l'objet d'un article [26].

3.1 Problème thermo-mécanique et hypothèses

Nous plaçons dans le cadre physique (n°1 (page 1)). Nous considérons que le corps est thermo-viscoélastique-viscoplastique qui peut subir une usure sur la surface en contact avec une fondation en mouvement, plus exactement on utlise une loi de comportement de la forme (1.2.2). En ce qui

concerne le contact, nous le modelisons par une condition de compliance normale, frottement et usure. Avec ces considerations, le modèle mathématique (n°1 (page 6)) nous conduit au problème thermo-mécanique suivant

Problème $\mathcal{P}$. Trouver un champ des déplacements $\boldsymbol{u} : \Omega\times[0,T] \to \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$, un champ de température $\theta : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$, un champ d'endommagement $\zeta : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ et une fonction d'usure $w : \Gamma_3 \times [0,T] \to \mathbb{R}$ telles que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - \mathcal{M}\theta + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s)), \zeta(s))ds, \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \tag{3.1.1}$$

$$\dot{\theta} - \operatorname{div}(\mathcal{K}\nabla\theta) = -\mathcal{M}.\nabla\dot{\mathbf{u}} + q_{th} \quad \text{dans } \ \Omega \times (0,T), \tag{3.1.2}$$

$$\dot{\zeta} - \Delta\zeta + \partial\varphi_K(\zeta) \ni \psi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \theta, \zeta) \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \tag{3.1.3}$$

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \tag{3.1.4}$$

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T), \tag{3.1.5}$$

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0,T), \tag{3.1.6}$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times (0,T), \tag{3.1.7}$$

$$\begin{cases} -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - w), \quad \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq p_\tau(u_\nu - w), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < p_\tau(u_\nu - w) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{u}}_\tau = \boldsymbol{v}^*, \qquad\qquad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = p_\tau(u_\nu - w) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{u}}_\tau = \boldsymbol{v}^* - \alpha\boldsymbol{\sigma}_\tau, \ \alpha > 0, \end{cases} \tag{3.1.8}$$

$$-k_{ij}\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\nu_j = k_e(\theta - \theta_F) - k_\tau(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{v}^*\|) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{3.1.9}$$

$$\dot{w} = k_w\|\boldsymbol{v}^*\|p_\nu(u_\nu - w) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{3.1.10}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0,T), \tag{3.1.11}$$

$$w(0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3, \tag{3.1.12}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \ , \ \theta(0) = \theta_0, \ \zeta(0) = \zeta_0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{3.1.13}$$

Ici, les équations (3.1.1) et (3.1.2) représentent la loi de comportement thermo viscoélastique-viscoplastique avec endommagement introduite dans la première section, l'évolution de l'en-

dommagement est gouvernée par l'inclusion de type parabolique donnée par la relation (3.1.3). L'équation (3.1.4) représente l' équation d'équilibre pour les contraintes. Les égalités (3.1.5) et (3.1.6) sont respectivement les conditions aux limites déplacement-traction. (3.1.8) décrit le contact de frottement avec compliance normale et usure sur la surface de contact potentielle Γ_3. L'équation (3.1.10) représente l'équation différentielle ordinaire qui décrit l'évolution de la fonction d'usure. L'égalité (3.1.11) décrit une condition aux limites de Neumann homogène, où $\dfrac{\partial \zeta}{\partial \nu}$ est la dérivée normale de ζ. Dans l'équation (3.1.12), $w(0) = 0$ signifie qu'au moment initial le corps n'est soumis à aucune usure préalable. Ensuite, les fonctions u_0, θ_0 et ζ_0 dans (3.1.13) sont les données initiales.

Pour l'étude du problème thermo-mécanique $\mathcal{P}$, nous considérons les hypothèses suivantes.

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe } \ L_{\mathcal{A}} > 0 \ \text{ tel que } \|\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \text{pour tous } \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{a.e.} \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \ \text{ tel que} \\ (\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{A}} \, \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\ \text{ pour tous } \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \ \text{a.e. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ pour toute } \ \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \ \text{ appartient à } \ Q. \end{cases} \tag{3.1.14}$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe une constante } L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ telle que} \\ \|\mathcal{B}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{B}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{B}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \text{pour tous } \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{a.e.} \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{B}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ pour toute } \ \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } Q. \end{cases} \tag{3.1.15}$$

L'opérateur viscoplastique $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe une constante } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que} \\ \|\mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \zeta_1) - \mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \zeta_2)\| \\ \quad \leq L_{\mathcal{G}}(\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2\| + \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| + |\zeta_1 - \zeta_2|) \\ \text{ pour tous } \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \zeta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \text{ pour tous } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d \text{ et } \zeta \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 0) \text{ appartient à } Q. \end{cases} \tag{3.1.16}$$

La fonction source d'endommagement $\psi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe une constante } L_{\psi} > 0 \text{ telle que} \\ |\psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \theta_1, \zeta_1) - \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \theta_2, \zeta_2)| \\ \quad \leq L_{\psi}(\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2\| + \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| + |\theta_1 - \theta_2| + |\zeta_1 - \zeta_2|) \\ \text{pour tous } \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \theta_1, \theta_2, \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \zeta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \text{ pour tous } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d \text{ et } \theta, \zeta \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \psi(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 0, 0) \text{ appartient à } L^2(\Omega). \end{cases} \tag{3.1.17}$$

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe } L_\nu > 0 \text{ tel que } |p_\nu(\mathbf{x}, u_1) - p_\nu(\mathbf{x}, u_2)| \leq L_\nu \, |u_1 - u_2| \\ \text{pour tous } u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto p_\nu(\mathbf{x}, u) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tous } u \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto p_\nu(\mathbf{x}, 0) \text{ appartient à } L^2(\Gamma_3). \end{cases} \tag{3.1.18}$$

La fonction de contact tangentiel $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe } L_\tau > 0 \text{ tel que } |p_\tau(\mathbf{x}, u_1) - p_\tau(\mathbf{x}, u_2)| \leq L_\tau \, |u_1 - u_2| \\ \text{pour tout } \ u_1,\, u_2 \in \mathbb{R}, \ \ \text{a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto p_\tau(\mathbf{x}, u) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } \ u \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto p_\tau(\mathbf{x}, 0) \text{ appartient à } \ L^2(\Gamma_3). \end{cases} \tag{3.1.19}$$

La fonction tangentielle $k_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe } M_\tau > 0 \text{ tel que } |k_\tau(\mathbf{x}, r_1) - k_\tau(\mathbf{x}, r_2)| \leq M_\tau \, |r_1 - r_2| \\ \text{pour tout } \ r_1,\, r_2 \in \mathbb{R}_+, \ \text{a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto k_\tau(\mathbf{x}, 0) \in L^2(\Gamma_3) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3. \ \forall\, r \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \tag{3.1.20}$$

Un exemple concret de fonction tangentielle k_τ est donné par

$$k_\tau(\mathbf{x}, r) = \rho(\mathbf{x}) r, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3,$$

où $\rho \in L^\infty(\Gamma_3, \mathbb{R}_+)$ représente un coefficient de vitesse pour le gradient de température.

Le tenseur de dilatation thermique $\mathcal{M} = (m_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, la densité des sources de chaleur q_{th} et le tenseur de conductivité thermique $\mathcal{K} : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ satisfont

$$\mathcal{M} = (m_{ij}), \ m_{ij} = m_{ji} \in L^\infty(\Omega), q_{th} \in C(0, T; L^2(\Omega)), \tag{3.1.21}$$

$$\mathcal{K} = (k_{ij}) = (k_{ji}) \in L^\infty(\Omega), \tag{3.1.22}$$

$$\exists c_k > 0 \text{ such that } k_{ij}\xi_i\xi_j \geq c_k \xi_i \xi_j, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{3.1.23}$$

Nous supposons aussi que les forces volumiques et les tractions surfaciques aient la régularité

$$\mathbf{f}_0 \in C([0, T]; L^2(\Omega)^d), \quad \mathbf{f}_2 \in C([0, T]; L^2(\Gamma_2)^d). \tag{3.1.24}$$

On suppose que les conditions initiales et aux limites sont satisfaites

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u}_0 \in V \ , \qquad \theta_0 \in E \ , \qquad \zeta_0 \in K, \\ k_e \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+) \ , \quad \theta_F \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_3)). \end{gathered} \tag{3.1.25}$$

Enfin, nous définissons les applications $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $P : V \times V \times L^2(\Gamma_3) \to \mathbb{R}$, $\mathbf{f} : V \times V \to \mathbb{R}$, $S : [0,T] \to \mathbb{R}$ et les fonctions $\mathcal{Z} : E \to E'$ et $\mathcal{R} : V \to E'$, respectivement, par

$$a(\zeta,\xi) = \int_\Omega \nabla\zeta \cdot \nabla\xi \, dx, \tag{3.1.26}$$

$$P(w,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - w)v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - w)\|\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{v}^*\| da, \tag{3.1.27}$$

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \mathbf{f}_0 \cdot \boldsymbol{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \boldsymbol{v} da, \tag{3.1.28}$$

$$\langle S(t),\mu\rangle_{E'\times E} = \int_\Omega q_{th}(t)\mu dx + \int_{\Gamma_3} k_e\theta_F(t)\mu dx, \tag{3.1.29}$$

$$\langle \mathcal{Z}\tau,\mu\rangle_{E'\times E} = \int_\Omega k_{ij}\frac{\partial\tau}{\partial x_j}\frac{\partial\mu}{\partial x_i}dx + \int_{\Gamma_3} k_e\tau\mu \, da, \tag{3.1.30}$$

$$\langle \mathcal{R}\boldsymbol{v},\mu\rangle_{E'\times E} = -\int_\Omega (\mathcal{M}\cdot\nabla\boldsymbol{v})\mu dx + \int_{\Gamma_3} k_\tau(\|\dot{\boldsymbol{v}}_\tau - \boldsymbol{v}^*\|)\mu \, da. \tag{3.1.31}$$

3.2 Formulation variationnelle

Supposons que le problème (3.1.1)-(3.1.13) admet une solution régulière $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\sigma},\theta,\zeta,w)$ et soient $\boldsymbol{v} \in V$ et $t \in [0,T]$ donnés. Premièrement, en utilisant la formule de Green (2.1.11), il vient que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(t)\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)))\,dx = \int_\Omega \mathbf{f}_0(t)\cdot(\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t))\,dx + \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t))\,da\,.$$

En utilisant les égalités $\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t) = \mathbf{0}$ sur Γ_1, $\boldsymbol{\sigma}(t)\nu = \mathbf{f}_2(t)$ sur Γ_2 et définition (3.1.28) pour en déduire que

$$(\boldsymbol{\sigma}(t),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)))_Q - \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t))\,da = (\mathbf{f}(t),\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t))_V. \tag{3.2.1}$$

En utilisant (1.1.3), on obtient

$$\begin{aligned} -\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t))\,da &= \int_{\Gamma_3} -\sigma_\nu(v_\nu - \dot{u}_\nu)\,da + \int_{\Gamma_3} -\boldsymbol{\sigma}_\tau\cdot(\boldsymbol{v}_\tau - \dot{\boldsymbol{u}}_\tau)\,da, \\ &= \int_{\Gamma_3} -\sigma_\nu(v_\nu - \dot{u}_\nu)\,da + \int_{\Gamma_3} -\boldsymbol{\sigma}_\tau\cdot(\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{v}^*)\,da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau\cdot(\dot{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{v}^*))\,da. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

En revanche, les conditions aux limites (3.1.8) donnent

$$\int_{\Gamma_3} -\sigma_\nu(v_\nu - \dot{u}_\nu)\, da = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - w)v_\nu - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - w)\dot{u}_\nu\, da, \tag{3.2.3}$$

$$\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\dot{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{v}^*)\, da \;=\; \int_{\Gamma_3} -\mid \boldsymbol{\sigma}_\tau \mid \|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{v}^*\|\, da = -\int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - w)\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{v}^*\|\, da, \tag{3.2.4}$$

$$\int_{\Gamma_3} -\boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{v}^*)\, da \;\leq\; \int_{\Gamma_3} \mid \boldsymbol{\sigma}_\tau \mid \|\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{v}^*\|\, da \leq \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - w)\|\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{v}^*\|\, da. \tag{3.2.5}$$

L'igalité (3.2.4) et l'inéglité (3.2.5), donnent

$$\int_{\Gamma_3} -\boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\boldsymbol{v}_\tau - \dot{\boldsymbol{u}}_\tau)\, da \;\leq \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - w)\|\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{v}^*\|\, da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - w)\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{v}^*\|\, da. \tag{3.2.6}$$

Nous combinons maintenant, (3.2.3) et (3.2.6) avec (3.2.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} -\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma\nu} \cdot (\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}})\, da \leq & \Big(\int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - w)v_\nu\, da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - w)\|\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{v}^*\|\, da \Big) \\ & - \Big(\int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - w)\dot{u}_\nu\, da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - w)\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{v}^*\|\, da \Big). \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

En utilisant (3.2.7) et (3.2.1) et la notations (3.1.27) pour déduire que

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)))_Q + P(w(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) - & P(w(t), \boldsymbol{u}(t), \dot{\boldsymbol{u}}(t)) \\ & \geq (\mathbf{f}(t), \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t))_V \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Maintenant, pour tout $t \in [0, T]$ et de (3.1.2), on obtient

$$(\dot{\theta}(t) - q_{th}(t), \xi)_{L^2(\Omega)} - \; (\mathrm{div}(\mathcal{K}\nabla\theta(t)), \xi)_{L^2(\Omega)} = (-\mathcal{M} \cdot \nabla \boldsymbol{u}(t), \xi)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \xi \in E. \tag{3.2.9}$$

En utilisant la formule de Green (2.1.32) et la définition (2.1.19) de l'ensemble E, pour obtenir

$$-(\mathrm{div}(\mathcal{K}\nabla\theta(t)), \xi)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega k_{ij} \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_j} \frac{\partial \xi}{\partial x_j}\, dx - \int_{\Gamma_3} k_{ij} \frac{\partial \theta(t)}{\partial \nu} \nu_j\, \xi\, da, \quad \forall \xi \in E, \tag{3.2.10}$$

Nous utilisons (3.2.10), (3.2.9) et (3.1.9), on trouve

$$\begin{aligned} (\dot{\theta}(t), \xi)_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \xi}{\partial x_j}\, dx + \int_{\Gamma_3} k_e \theta(t)\, \xi\, da = (-\mathcal{M}.\nabla \dot{\mathbf{u}}, \xi)_{L^2(\Omega)} + \int_{\Gamma_3} k_\tau \|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{v}^*\|\, \xi\, da \\ + (q_{th}(t), \xi)_{L^2(\Omega)} + \int_{\Gamma_3} k_e \theta_F(t)\, \xi\, da, \quad \forall \xi \in E. \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

En utilisant les notations (3.1.29), (3.1.30) et (2.1.23), (3.1.31), l'équation (3.2.11) devient

$$(\dot{\theta}(t), \xi)_{L^2(\Omega)} + \langle \mathfrak{T}\theta, \xi \rangle_{E' \times E} = \langle \mathcal{R}\dot{\boldsymbol{u}}, \xi \rangle_{E' \times E} + \langle S(t), \xi \rangle_{E' \times E}, \quad \forall \xi \in E. \tag{3.2.12}$$

Enfin, soit $\zeta(t) \in K$ et pour tout $t \in [0, T]$. De la définition (2.3.3) de $\partial\varphi_K(\beta)$ et de (3.1.3), on obtient

$$\Big(\psi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \theta, \zeta) - \dot{\zeta}(t) + \Delta\zeta(t), \vartheta - \zeta(t)\Big)_{L^2(\Omega)} \leq 0, \quad \forall \vartheta \in K,$$

donc

$$(\psi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \theta, \zeta), \vartheta - \zeta(t))_{L^2(\Omega)} \leq (\dot{\zeta}(t), \vartheta - \zeta(t))_{L^2(\Omega)} - (\Delta\zeta(t), \vartheta - \zeta(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \vartheta \in K.$$

Nous utilisons la formule de Green (2.1.33) et le condition (3.1.11) afin d'obtenir

$$(\Delta\zeta(t), \vartheta - \zeta(t))_{L^2(\Omega)} = -\int_\Omega \nabla\zeta(t) \cdot \nabla(\vartheta - \zeta(t))\, dx, \quad \forall \vartheta \in K.$$

En suite

$$(\dot{\zeta}(t), \vartheta - \zeta(t))_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \nabla\zeta(t) \cdot \nabla(\vartheta - \zeta(t))\, dx \geq (\psi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \theta, \zeta), \vartheta - \zeta(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \vartheta \in K.$$

En utilisant la notation (3.1.26), on trouve

$$(\dot{\zeta}(t), \vartheta - \zeta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\zeta(t) \cdot \vartheta - \zeta(t)) \geq (\psi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \theta, \zeta), \vartheta - \zeta(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \vartheta \in K. \tag{3.2.13}$$

Alors, la formulation variationnelle du problème thermo-mécanique (3.1.1)-(3.1.13) est la suivante.

Problème $\mathcal{P}^V$.

Trouver un champ des déplacements $\boldsymbol{u} : [0; T] \to V$, un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : [0; T] \to Q_1$, un champ de température $\theta : [0; T] \to E$, un champ d'endommagement $\zeta : [0; T] \to H^1(\Omega)$ et

une usure fonction $w : [0;T] \to L^2(\Gamma_3)$ telle que pour tout $t \in [0;T]$,

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) - \mathcal{M}\theta(t) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s)), \zeta(s))ds, \tag{3.2.14}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)))_Q + P(w(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) - \quad & P(w(t), \boldsymbol{u}(t), \dot{\boldsymbol{u}}(t)) \\ & \geq (\mathbf{f}(t), \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t))_V \quad \forall \boldsymbol{v} \in V,\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

$$\begin{aligned}(\dot{\zeta}(t), \vartheta - \zeta(t) \quad)_{L^2(\Omega)} + a(\zeta(t), \vartheta - \zeta(t)) \\ \geq (\psi(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \theta(t), \zeta(t)), \vartheta - \zeta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \zeta(t) \in K, \ \forall \vartheta \in K,\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

$$\dot{\theta}(t) + \mathfrak{T}\theta(t) = \mathcal{R}\dot{u}(t) + S(t) \text{ in } E', \tag{3.2.17}$$

$$\dot{w}(t) = k_w \|\boldsymbol{v}^*(t)\| p_\nu(u_\nu(t) - w(t)), \tag{3.2.18}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \zeta(0) = \zeta_0, \quad w(0) = w_0. \tag{3.2.19}$$

On remarque que le problème variationnel $\mathcal{P}^V$ est formulé en termes de champ des déplacements, de champ des contraintes, de champ de température, de champ d'endommagement et d'une fonction d'usure. Les fonctions $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \theta, \zeta$ et w qui satisfont (3.2.14)-(3.2.19) sont appelées solution faible du problème de contact $\mathcal{P}$. L'existence de l'unique solution du problème $\mathcal{P}^V$ est énoncée et démontrée dans la section suivante.

3.3 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous obtenons un résultat d'existence et d'unicité de la solution $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \theta, \zeta, w)$ du problème $\mathcal{P}^V$.

Théorème 3.3.1 *Supposons que* (3.1.14)-(3.1.25) *sont vérifiés. Alors il existe une solution unique* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \theta, \zeta, w)$ *au problème* $\mathcal{P}^V$. *De plus, la solution satisfait*

$$\boldsymbol{u} \in C^1(0, T; V), \tag{3.3.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in C(0, T; Q_1), \tag{3.3.2}$$

$$\theta \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; E) \cap W^{1,2}(0, T; E'), \tag{3.3.3}$$

$$\zeta \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \tag{3.3.4}$$

$$w \in C^1(0, T; L^2(\Gamma_3)). \tag{3.3.5}$$

La preuve du Théorème 3.3.1 s'effectue en plusieurs étapes que nous démontrons dans ce qui suit. Partout dans cette section, nous supposons que les hypothèses du Théorème 3.3.1 sont vérifiées. Ci-dessous, C désigne une constante positive générique qui peut dépendre de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \mathcal{A}$, $\mathcal{B}, \mathcal{M}, p_\nu, p_\tau$ et T mais ne dépend pas de t ni du reste des données d'entrée, et dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre.

Première étape, soit $(\lambda, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \in C(0,T; L^2(\Gamma_3) \times Q \times Q)$ être donnée et considérons le problème variationnel suivant.

Problème $\mathcal{P}^V_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}$: Trouver un champ des déplacements $\boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}} : [0,T] \to V$ et un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}[0;T] \to Q_1$ tel que pour tout $t \in [0,T]$.

$$\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}(t)) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}(t)) + \boldsymbol{\eta}(t) + \boldsymbol{\xi}(t), \tag{3.3.6}$$

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}(t)))_Q + P(\lambda(t), \boldsymbol{u}_{w\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}(t), \boldsymbol{v})\\ &-P(\lambda(t), \boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \boldsymbol{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}(t))_V \quad \forall \boldsymbol{v} \in V,\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

$$\boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}(0) = \boldsymbol{u}_0. \tag{3.3.8}$$

Pour l'étude du problème $\mathcal{P}^V_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}$ nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.3.1 *Il existe une solution unique* $(\boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}})$ *au problème* $\mathcal{P}^V_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}$ *et sa régularité est exprimée en* (3.3.1)-(3.3.2).

Démonstration. On utilise le théorème de représentation de Riesz, pour définir les opérateurs $A : V \to V$, $B : V \to V$ et la fonction $\mathbf{F} : [0,T] \to V$ par

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q, \tag{3.3.9}$$

$$(B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V = (\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q, \tag{3.3.10}$$

$$(\mathbf{F}(t), \boldsymbol{v})_V = (\mathbf{f}(t), \boldsymbol{v})_V - (\boldsymbol{\eta}(t) + \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q, \tag{3.3.11}$$

pour tout $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ et $t \in [0,T]$. Les hypothèses (3.1.14)(b), (3.1.14)(c) et (3.1.14) impliquent que l'opérateur A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz sur V et que B est un

opérateur de Lipschitz sur V. Pour $\boldsymbol{u} \in V$ et $\lambda \in L^2(\Gamma_3)$, la fonctionnelle $P(\lambda, \boldsymbol{u}, .)$ est convexe et s.c.i sur V. Nous utilisons (2.1.17), (3.1.18) et (3.1.19) pour trouver

$$\begin{aligned} &P(\lambda, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2) - P(\lambda, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1) + P(\lambda, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1) - P(\lambda, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2) \\ &\quad \leq c_0^2(L_\nu + L_\tau)\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_V \|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\|_V, \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

pour tout $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$. De plus, en utilisant (3.1.24), il est facile de voir que la fonction $\mathbf{f}$ définie par (3.1.28) vérifie $\mathbf{f} \in C(0, T; V)$ et, en gardant à l'esprit que $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \in C(0, T; Q \times Q)$, on déduit de (3.3.11) que $\mathbf{F} \in C(0, T; V)$, en appliquant le résultat d'existence et d'unicité pour les inéquations quasi-variationnelles (Théorème 2.2.4), on démontre qu'il existe une fonction unique $\boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}} \in C(0, T; V)$.

On utilise la relation (3.3.6), les hypothèses (3.1.14), (3.1.15) et la régularité des fonctions $\boldsymbol{\eta}$ et $\boldsymbol{\xi}$ avec les propriétés du tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ pour obtenir que $\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}} \in C(0, T; Q)$.

On choisit une fonction $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}(t) \pm z$ in (3.3.7), où $z \in \mathcal{D}(\Omega)^d$ est arbitraire, en utilisant les définitions (3.1.27) et (3.1.28) pour obtenir

$$Div\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}(t) + \boldsymbol{f}_0(t) = \mathbf{0}. \tag{3.3.13}$$

pour tout $t \in [0, T]$. La régularité des fonctions $\boldsymbol{f}_0$, la relation (3.3.13) et puisque $\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}} \in C(0, T; Q)$ montre que $\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}} \in C(0, T; Q_1)$.

Dans la deuxième étape, nous donnons $\mu \in C(0, T; L^2(\Omega))$ et considérons le problème variationnel suivant pour le champ d'endommagement.

Problème $\mathcal{P}_\mu^V$. Trouver un champ d'endommagement $\zeta_\mu : [0, T] \to H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} &\zeta(t) \in K \quad (\dot{\zeta}_\mu(t), \vartheta - \zeta_\mu(t))_{L^2(\Omega)} + a(\zeta_\mu(t), \vartheta - \zeta_\mu(t)) \\ &\geq (\mu(t), \vartheta - \zeta_\mu(t))_{L^2(\Omega)} \qquad \forall \vartheta \in K, \text{ a.e. } t \in [0, T], \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

$$\zeta_\mu(0) = \zeta_0. \tag{3.3.15}$$

Lemme 3.3.2 *Le problème $\mathcal{P}_\mu^V$ a une solution unique ζ_μ qui satisfait la régularité exprimée dans* (3.3.4) *De plus, si ζ_i est la solution du problème $\mathcal{P}_{\mu_i}^V$ correspondant à $\mu_i \in C(0,T;L^2(\Omega)), i=1,2$ alors, il existe $C>0$, tel que*

$$\|\zeta_1(t)-\zeta_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\int_0^t \|\mu_1(s)-\mu_2(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds \quad \forall t\in[0,T]. \tag{3.3.16}$$

Pour résoudre $\mathcal{P}_\mu^V$, on utilise un résultat classique d'existence et d'unicité sur les inéquations variationnelles paraboliques (Théorème 2.2.1, voir par exemple [11, p. 124]).

De (3.3.14) on déduit que

$$(\dot{\zeta}_1-\dot{\zeta}_2,\zeta_1-\zeta_2)_{L^2(\Omega)}+a(\zeta_1-\zeta_2,\zeta_1-\zeta_2)\leq(\mu_1-\mu_2,\mu_1-\mu_2)_{L^2(\Omega)} \quad \forall t\in[0,T].$$

En intégrant l'inéquation précédente par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\zeta_1(0)=\zeta_2(0)=\zeta_0$ et l'inégalité $a(\zeta_1-\zeta_2,\zeta_1-\zeta_2)\geq 0$, on trouve

$$\frac{1}{2}\|\zeta_1(t)-\zeta_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\int_0^t(\mu_1(s)-\mu_2(s),\zeta_1(s)-\zeta_2(s))_{L^2(\Omega)}ds \quad \forall t\in[0,T].$$

ce qui implique que

$$\|\zeta_1(t)-\zeta_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\int_0^t|\mu_1(s)-\mu_2(s)|^2_{L^2(\Omega)}ds+\int_0^t\|\zeta_1(s)-\zeta_2(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds.$$

Cette inégalité combinée avec l'inégalité de Gronwall conduit à (3.3.16) qui conclut la preuve.

Dans la troisième étape, on définit l'opérateur $\mathcal{L}:C(0,T;Q)\to C(0,T;Q)$ par

$$\mathcal{L}\boldsymbol{G}=\mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}),\zeta_\mu) \text{ où } \boldsymbol{\xi}(t)=\int_0^t\boldsymbol{G}(s)ds, \quad \forall\boldsymbol{G}\in C([0,T];Q), \tag{3.3.17}$$

et $\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}$ est le champ de contraintes

$$\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}=\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}})+\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}})+\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}. \tag{3.3.18}$$

Notons que puisque $(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})\in C(0,T;Q\times Q)$, il est simple que $\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}\in C(0,T;Q)$. Nous obtenons les résultats suivants.

Lemme 3.3.3 *L'opérateur $\mathcal{L}$ a un unique point fixe $\boldsymbol{G}^* \in C(0,T;Q)$.*

Démonstration. La continuité de $\mathcal{L}$ est une conséquence directe de la continuité de $\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\eta\boldsymbol{\xi}}$, $\boldsymbol{u}_{\lambda\eta\boldsymbol{\xi}}$ et ζ_μ et (3.1.16) . De plus, soit $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in C(0,T;Q)$ et $\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{G}_2 \in C(0,T;Q)$ leurs intégrales correspondantes en temps et soit $\mu_1, \mu_2 \in C(0,T;L^2(\Omega))$. Par souci de simplicité, nous utilisons la notation $\boldsymbol{u}_{\lambda\eta\boldsymbol{\xi}_i} = \boldsymbol{u}_i$, $\dot{\boldsymbol{u}}_{\lambda\eta\boldsymbol{\xi}_i} = \dot{\boldsymbol{u}}_i$, $\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\eta\boldsymbol{\xi}_i} = \boldsymbol{\sigma}_i$ et $\zeta_{\mu_i} = \zeta_i$ pour $i = 1,2$. Soit $t \in [0,T]$, de (3.1.16), on trouve que

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{L}\boldsymbol{G}_1(t) - \mathcal{L}\boldsymbol{G}_2(t)\|_Q \\ &\leq C(\|\boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t)\|_Q + \|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)\|_V + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

De (3.3.17) et (3.3.18), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t)\|_Q^2 \\ &\leq C\big(\|\dot{\boldsymbol{u}}_1(t) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(t)\|_V^2 + \|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)\|_V^2 + \int_0^t |\boldsymbol{G}_1(s) - \boldsymbol{G}_2(s)|_Q^2 ds\big). \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

De plus, à partir de (3.3.6) et (3.3.7), on obtient

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_1(t)) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_2(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_1(t)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_2)(t))_Q \\ &+ (\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_1(t)) - \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_2(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_1(t)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_2(t)))_Q \\ &\leq P(\lambda, \boldsymbol{u}_1(t), \dot{\boldsymbol{u}}_2(t)) - P(\lambda, \boldsymbol{u}_1(t), \dot{\boldsymbol{u}}_1(t)) \\ &+ P(\lambda, \boldsymbol{u}_2(t), \dot{\boldsymbol{u}}_1(t)) - P(\lambda, \boldsymbol{u}_2(t), \dot{\boldsymbol{u}}_2(t)) \\ &- (\boldsymbol{\xi}_1(t) - \boldsymbol{\xi}_2(t), (\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_1(t)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_2(t)))_Q. \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Aussi de (3.1.14)(b), (3.1.15)(a) et (3.3.12), il s'ensuit que

$$\|\dot{\boldsymbol{u}}_1(t) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(t)\|_V \leq C(\|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)\|_V + \|\boldsymbol{\xi}_1(t) - \boldsymbol{\xi}_2(t)\|_Q). \tag{3.3.22}$$

En utilisant ce résultat, l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$ et (3.3.17), on obtient

$$\|\dot{\boldsymbol{u}}_1(t) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(t)\|_V^2 \leq C(\|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|\boldsymbol{G}_1(s) - \boldsymbol{G}_2(s)\|_Q^2 ds). \tag{3.3.23}$$

Puisque $\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{u}_2(0) = \boldsymbol{u}_0$, nous avons

$$\|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|\dot{\boldsymbol{u}}_1(s) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(s)\|_V^2 ds \tag{3.3.24}$$

Il découle de (3.3.23), (3.3.24) et (3.3.16) on en déduit que

$$\begin{aligned} &\|\dot{\boldsymbol{u}}_1(t) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(t)\|_V^2 + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\Bigg(\int_0^t \|\dot{\boldsymbol{u}}_1(s) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(s)\|_V^2 ds \\ &+ \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \|\boldsymbol{G}_1(s) - \boldsymbol{G}_2(s)\|_Q^2 ds \Bigg). \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on trouve que

$$\|\dot{\boldsymbol{u}}_1(t) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(t)\|_V^2 + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\boldsymbol{G}_1(s) - \boldsymbol{G}_2(s)\|_Q^2 ds. \tag{3.3.26}$$

Cette dernière inéquation combinée avec (3.3.20), (3.3.24), et (3.3.26) nous permet d'avoir, à partir de (3.3.19) l'estimation suivante :

$$\|\mathcal{L}\boldsymbol{G}_1(t) - \mathcal{L}\boldsymbol{G}_2(t)\|_Q^2 \leq C \int_0^t \|\boldsymbol{G}_1(s) - \boldsymbol{G}_2(s)\|_Q^2 ds. \tag{3.3.27}$$

Réitérons l'inégalité (3.3.27) n fois conduit à

$$\|\mathcal{L}^n\boldsymbol{G}_1 - \mathcal{L}^n\boldsymbol{G}_2\|_{C(0,T;Q)}^2 \leq \frac{C^n T^n}{n!} \|\boldsymbol{G}_1 - \boldsymbol{G}_2\|_{C(0,T;Q)}^2. \tag{3.3.28}$$

Donc, pour n assez grand, $\mathcal{L}^n$ est un opérateur un opérateur contractant dans l'espace de Banach $C(0,T;Q)$ et on conclut qu'il existe un unique $\boldsymbol{G}^* \in C(0,T;Q)$ tel que $\mathcal{L}\boldsymbol{G}^* = \boldsymbol{G}^*$.

Dans la quatrième étape, on donne $(\lambda, \boldsymbol{\eta}) \in C(0,T;L^2(\Gamma_3) \times Q)$ et on considère le problème auxiliaire suivant.

Problème $\mathcal{P}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}^V$. Trouver un champ des déplacements $\boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}} : [0,T] \to V$, un champ des contraintes

$\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}} : [0,T] \to Q_1$ et un champ de température $\theta_{\lambda\boldsymbol{\eta}} : [0,T] \to E$ tel que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t) &= \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t)) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t)) + \boldsymbol{\eta}(t) \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(s)), \zeta_\mu(s))ds,\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t)))_Q + P(\lambda(t), \boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t), \boldsymbol{v}) \\ &- P(\lambda(t), \boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \boldsymbol{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t))_V \quad \forall \boldsymbol{v} \in V,\end{aligned} \tag{3.3.30}$$

$$\dot{\theta}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathfrak{T}\theta_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathcal{R}\dot{\boldsymbol{u}}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t) + S(t) \text{ dans } E', \tag{3.3.31}$$

$$\boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \theta_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(0) = \theta_0. \tag{3.3.32}$$

Lemme 3.3.4 *Il existe une solution unique* $(\boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}, \theta_{\lambda\boldsymbol{\eta}})$ *au problème auxiliaire* $\mathcal{P}^V_{\lambda\boldsymbol{\eta}}$ *satisfaisant la régularité* (3.3.1)-(3.3.3). *De plus, si* $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{\sigma}_i, \theta_i)$ *et* ζ_i *représentent les solutions des Problèmes* $\mathcal{P}^V_{\lambda\boldsymbol{\eta}_i}$ *et* $\mathcal{P}^V_{\zeta_i}$, *respectivement, pour* $(\boldsymbol{\eta}_i, \mu_i) \in C(0,T; Q \times L^2(\Omega)), i = 1,2$ *alors il existe* $C > 0$ *tel que*

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t)\|_Q^2 &\leq C\big(\|\dot{\boldsymbol{u}}_1(t) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|\dot{\boldsymbol{u}}_1(s) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(s)\|_V^2 ds \\ &\quad + \|\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t)\|_Q^2 + \int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds\big),\end{aligned} \tag{3.3.33}$$

$$\|\dot{\boldsymbol{u}}_1(t) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(t)\|_V^2 \leq C\big(\|\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t)\|_Q^2 + \int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds\big), \tag{3.3.34}$$

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)\|_Q^2 ds. \tag{3.3.35}$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{G}^* \in C(0,T;Q)$ le point fixe de l'opérateur $\mathcal{L}$ défini par (3.3.17) et notons $\boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}^*}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}^*}$ soit la solution du problème $\mathcal{P}^V_{\lambda\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}}$ obtenu dans le Lemme 3.3.1, pour $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^* = \int_0^t \boldsymbol{G}^*(s)ds$. L'équation $\mathcal{L}\boldsymbol{G}^* = \boldsymbol{G}^*$ combinée avec (3.3.17) montre que $\boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}$ satisfait (3.3.29) et (3.3.30). Suivant (3.3.32), les régularités (3.3.1) et (3.3.2) découlent du Lemme 3.3.1. En utilisant maintenant le champ des déplacements $\boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}$ obtenu dans le Lemme 3.3.4, on obtient (3.3.31) et on sait que l'application d'inclusion de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ est continue

et dense, on peut écrire le triplet d'évolution de Gelfand

$$E \subset L^2(\Omega) \subset E'.$$

L'opérateur $\mathfrak{T}$ est linéaire et coercitif. En utilisant l'inégalité de Friedrichs-Poincaré , on a

$$\langle \mathfrak{T}\tau, \tau \rangle_{E \times E'} \geq C\|\tau\|_E^2. \tag{3.3.36}$$

Par (3.1.23) et (3.1.30) pour tout $\tau, \omega \in E$, on a

$$\langle \mathfrak{T}\tau, \omega \rangle_{E' \times E} \leq \sum_{i,j=1}^{d} \|k_{i,j}\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\tau_{,i}\|_{L^2(\Omega)} \|\omega_{,i}\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant le théorème de la trace de Sobolev, nous trouvons

$$\langle \mathfrak{T}\tau, \omega \rangle_{E' \times E} \leq C\|\tau\|_E \|\omega\|_E. \tag{3.3.37}$$

D'autre part, des définitions de $\mathcal{R}$, S et de la régularité de $\dot{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}$, on déduit que

$$\varphi_{\lambda\boldsymbol{\eta}} = \mathcal{R}\dot{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}} + S \in L^2(0, T; E'). \tag{3.3.38}$$

Puisque $\theta_0 \in E$, des inéquations (3.3.36), (3.3.37) et de la régularité (3.3.38), il résulte que l'opérateur $\mathfrak{T}$ est hémicontinu et monotone, alors en utilisant la théorie des équations d'évolution classiques du premier ordre donnée dans Théorème (2.2.2)(voir par exemple [76], p 48) on peut facilement prouver l'existence et l'unicité de $\theta_{\lambda\boldsymbol{\eta}}$ satisfaisant

$$\begin{cases} \theta_{\lambda\boldsymbol{\eta}} \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; E) \cup W^{1,2}(0, T; E'), \\ \dot{\theta}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathfrak{T}\theta_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t) = \varphi_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t) \text{ dans } E', \\ \theta_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(0) = \theta_0. \end{cases} \tag{3.3.39}$$

Considérons maintenant $(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1), (\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2) \in C(0, T; Q \times L^2(\Omega))$ et pour $i = 1; 2$, dénote $\boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}_i} =$

$\boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{\sigma}_{\lambda\ \boldsymbol{eta_i}} = \boldsymbol{\sigma_i},\ \theta_i = \theta_{w\boldsymbol{\eta_i}}$ et $\zeta_{\mu_i} = \zeta_i$. En utilisant (3.3.29) et (3.1.16), nous avons

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t)\|_Q^2 \leq & C\big(\|\dot{\boldsymbol{u}}_1(t) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(t)\|_V^2 + \|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)\|_V^2 \\ & + \|\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t)\|_Q^2 + \int_0^t \|\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)\|_Q^2 ds \\ & + \int_0^t \|\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s)\|_V^2 ds \\ & + \int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds\big).\end{aligned} \tag{3.3.40}$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall et (3.3.24) pour l'inéquation précédente on en déduit (3.3.33). Nous utilisons (3.3.29), (3.3.30), (3.3.33) et des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (3.3.23) pour obtenir

$$\begin{aligned}\|\dot{\boldsymbol{u}}_1 - \dot{\boldsymbol{u}}_2\|_V^2 \leq C\big(\|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s)\|_V^2 ds \\ \int_0^t \|\dot{\boldsymbol{u}}_1(s) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(s)\|_V^2 + \int_0^t \|\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)\|_Q^2 ds + \int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds\big).\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité combinée avec (3.3.24), (3.3.16) et l'inégalité de Gronwall nous permet d'obtenir (3.3.34).

Maintenant pour $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in C([0,T];V)$, nous avons pour $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}\langle \dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t)\rangle_{E'\times E} + \langle \mathfrak{T}\theta_1(t) - \mathfrak{T}\theta_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t)\rangle_{E'\times E} \\ = \langle \mathcal{R}\dot{u}_1(t) - \mathcal{R}\dot{u}_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t)\rangle_{E'\times E}.\end{aligned} \tag{3.3.41}$$

Ensuite, en intégrant sur $(0,t)$, (3.3.35) suit en utilisant (3.1.31), (3.1.21), (3.1.22) et (3.1.23).

Enfin, en utilisant les propriétés de l'opérateur $\mathcal{M}$, et de la fonction ψ, pour $t \in [0,T]$, on considère l'élément

$$\Pi_\lambda(\boldsymbol{\eta}, \mu)(t) = (\Pi_\lambda^0(\boldsymbol{\eta})(t), \Pi_\lambda^1(\boldsymbol{\eta}, \mu)(t)) \in Q \times L^2(\Omega), \tag{3.3.42}$$

défini par les égalités

$$\Pi_\lambda^0(\boldsymbol{\eta})(t) = -\mathcal{M}(\theta_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t)), \tag{3.3.43}$$

$$\Pi_\lambda^1(\boldsymbol{\eta}, \mu)(t) = \psi(\boldsymbol{\sigma}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t), \boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t), \theta_{\lambda,\boldsymbol{\eta}}(t), \zeta_\mu(t)). \tag{3.3.44}$$

Nous avons le résultat suivant

Lemme 3.3.5 *Pour* $(\boldsymbol{\eta}, \mu) \in C(0,T;Q \times L^2(\Omega))$*, la fonction* $\Pi_\lambda(\boldsymbol{\eta}, \mu) : [0,T] \to Q \times L^2(\Omega)$ *est continue, et il existe un unique élément* $(\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*) \in C(0,T;Q \times L^2(\Omega))$ *tel que* $\Pi_\lambda(\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*) = (\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*)$.

Démonstration. Soit $(\boldsymbol{\eta}, \mu) \in C(0,T;Q \times L^2(\Omega))$, et $t_1, t_2 \in [0,T]$. En utilisant (3.3.43) et (3.1.21), on a

$$\begin{aligned} \|\Pi^0_\lambda(\boldsymbol{\eta})(t_1) - \Pi^0_\lambda(\boldsymbol{\eta})(t_2)\|_Q &\leq \|\mathcal{M}(\theta_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t_1)) - \mathcal{M}(\theta_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t_2))\|_Q \\ &\leq L_{\mathcal{M}} \|\theta_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t_1) - \theta_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t_2)\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.3.45}$$

où $L_{\mathcal{M}} = \sup_{i,j} \|m_{i,j}\|_{L^2(\Omega)}$. Ensuite, en raison de la régularité de $\theta_{\lambda\boldsymbol{\eta}}$ exprimée dans le lemme 3.3.3, on déduit de (3.3.45) que $\Pi^0_\lambda(\boldsymbol{\eta}) \in C(0,T;Q)$. Par des arguments similaires, de (3.3.44), (2.1.16) et (3.1.17) il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \|\Pi^1_\lambda(\boldsymbol{\eta}, \mu)(t_1) - \Pi^1_\lambda(\boldsymbol{\eta}, \mu)(t_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\big(&\|\boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t_1) - \boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t_2)\|_V \\ &+ \|\theta_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t_1) - \theta_{\lambda\boldsymbol{\eta}}(t_2)\|_V + \|\zeta_\mu(t_1) - \zeta_\mu(t_2)|_{L^2(\Omega)}\big) \end{aligned} \tag{3.3.46}$$

Par conséquent, $\Pi^1_\lambda(\boldsymbol{\eta}, \mu) \in C(0,T;L^2(\Omega))$ et $\Pi_\lambda(\boldsymbol{\eta}, \mu) \in C(0,T;Q \times L^2(\Omega))$.

Soit maintenant $(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1), (\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2) \in C(0,T;Q \times L^2(\Omega))$. Nous utilisons la notation $\boldsymbol{u}_{w\boldsymbol{\eta}_i} = \boldsymbol{u}_i, \dot{\boldsymbol{u}}_{\lambda\boldsymbol{\eta}_i} = \dot{\boldsymbol{u}}_i, \theta_{\lambda\boldsymbol{\eta}_i} = \theta_i$ et $\zeta_{\mu_i} = \zeta_i$ pour $i = 1,2$. On utilise des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve des relations (3.3.45) et (3.3.46) pour trouver que pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \|\Pi_\lambda(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1)(t) - \Pi_\lambda(\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2)(t)\|^2_{Q \times L^2(\Omega)} \leq C(&\|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)|^2_V \\ &+ \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)}), \end{aligned} \tag{3.3.47}$$

on utilise (3.3.24), (3.3.16), (3.3.34) et (3.3.35) pour obtenir

$$\|\Pi_\lambda(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1)(t) - \Pi_\lambda(\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2)(t)\|^2_{Q \times L^2(\Omega)} \leq C \int_0^t \|(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1)(s) - (\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2)(s)\|^2_{Q \times L^2(\Omega)})ds \ \forall t \in [0,T].$$

Réitérons cette inégalité m fois conduit à

$$\|\Pi^m_\lambda(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1) - \Pi^m_\lambda(\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2)\|^2_{C(0,T;Q \times L^2(\Omega))} \leq \frac{C^m T^m}{m!} \|(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1) - (\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2)\|^2_{C(0,T;Q \times L^2(\Omega))}.$$

Ainsi, pour m suffisamment grand, Π_λ^m est une contraction sur l'espace de Banach $C(0,T;Q)$, et donc Π_λ a un point fixe unique.

Soit $\lambda \in C(0,T;L^2(\Gamma_3))$. Dans la cinquième étape, nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème $\mathcal{P}_\lambda^V$ Trouver un champ des déplacements $\boldsymbol{u}_\lambda : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_\lambda : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$, un champ de température $\theta_\lambda : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$, et un champ d'endommagements $\zeta_\lambda : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_\lambda(t) &= \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_\lambda(t)) + \mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\lambda(t))) - \mathcal{M}\theta_\lambda(t)\\ &\quad + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}_\lambda(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\lambda(s)), \zeta_\lambda(s))ds,\end{aligned} \tag{3.3.48}$$

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{\sigma}_\lambda(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}_\lambda(t)))_Q + P(\lambda(t), \boldsymbol{u}_\lambda(t), \boldsymbol{v}) - P(\lambda(t), \boldsymbol{u}_\lambda(t), \dot{\boldsymbol{u}}_\lambda(t))\\ &\geq (\mathbf{f}(t), \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}_\lambda(t))_V \ \forall \boldsymbol{v} \in V,\end{aligned} \tag{3.3.49}$$

$$\begin{aligned}&(\dot{\zeta}_\lambda(t), \vartheta - \zeta_\lambda(t))_{L^2(\Omega)} + a(\zeta(t), \vartheta - \zeta_\lambda(t))\\ &\geq (\psi(\boldsymbol{\sigma}_\lambda, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\lambda(t)), \theta_\lambda(t), \zeta_w(t)), \vartheta - \zeta_x(t))_{L^2(\Omega)} \quad \zeta_\lambda(t) \in K, \ \forall \vartheta \in K,\end{aligned} \tag{3.3.50}$$

$$\dot{\theta}_\lambda(t) + \mathfrak{T}\theta_\lambda(t) = \mathcal{R}\dot{u}_\lambda(t) + S(t) \text{ dans } E', \tag{3.3.51}$$

$$\boldsymbol{u}_\lambda(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \theta_\lambda(0) = \theta_0, \quad \zeta_\lambda(0) = \zeta_0. \tag{3.3.52}$$

Lemme 3.3.6 *Le problème* $\mathcal{P}_\lambda^V$ *a une solution unique* $(\boldsymbol{u}_\lambda, \boldsymbol{\sigma}_\lambda, \theta_\lambda, \zeta_\lambda)$ *satisfaisant* (3.3.1)-(3.3.5).

Démonstration. Soit $(\boldsymbol{\eta}_\lambda, \mu_\lambda) \in C(0,T;Q \times L^2(\Omega))$ le point fixe de Π_λ défini par (3.3.42)-(3.3.44) et on dénote $\boldsymbol{u}_\lambda = \boldsymbol{u}_{\lambda\boldsymbol{\eta}_\lambda}, \theta_\lambda = \theta_{\lambda\boldsymbol{\eta}_\lambda}, \zeta_\lambda = \zeta_{\mu_\lambda}$ solutions des problèmes $\mathcal{P}_{\lambda\boldsymbol{\eta}}^V$ et $\mathcal{P}_\mu^V$ obtenus dans les lemmes 3.3.4 et 3.3.2 pour $(\boldsymbol{\eta}, \mu) = (\boldsymbol{\eta}_\lambda, \mu_\lambda)$ et on a

$$\boldsymbol{\sigma}_\lambda(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_\lambda(t)) + \mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\lambda(t))) - \mathcal{M}\theta_\lambda(t) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}_\lambda(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\lambda(s)), \zeta_\lambda)ds.$$

Relations $\Pi^0_\lambda(\boldsymbol{\eta}_\lambda) = \boldsymbol{\eta}_\lambda$, et $\Pi^1_\lambda(\boldsymbol{\eta}_\lambda, \mu_\lambda) = \mu_\lambda$ combinées avec (3.3.43) et (3.3.44), montre que $(\boldsymbol{u}_\lambda, \boldsymbol{\sigma}_\lambda, \theta_\lambda, \zeta_\lambda)$ satisfait (3.3.48)-(3.3.51).Ensuite, (3.3.52) et les régularités (3.3.1)-(3.3.4) découlent des lemmes 3.3.2 et 3.3.4, et des hypothèses sur $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$ ce qui conclut la partie existence du lemme 3.3.6.

La partie unicité du Lemme 3.3.6 est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Π_λ défini par (3.3.42)-(3.3.44) et de la résolution unique des problèmes $\mathcal{P}^V_{\lambda\boldsymbol{\eta}_\lambda}$ et $\mathcal{P}^V_{\mu_\lambda}$.

Considérons maintenant l'opérateur $\Phi : C(0,T;L^2(\Gamma_3)) \to C(0,T;L^2(\Gamma_3))$ défini par

$$\Phi\lambda = -k_w\|\boldsymbol{v}^*\| \int_0^t p_\nu(u_\nu - \lambda)ds \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.3.53}$$

Lemme 3.3.7 *L'opérateur Φ a un unique point fixe $\lambda^* \in C(0,T;L^2(\Gamma_3))$.*

Démonstration. Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in C(0,T;L^2(\Gamma_3))$ et notons $\boldsymbol{u}_i, i = 1,2$, solution de (3.3.49) pour $\lambda = \lambda_i$, soient $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_{\lambda_i}$ et $\dot{\boldsymbol{u}}_i = \dot{\boldsymbol{u}}_{\lambda_i}$. De plus, on note dans la suite par C diverses constantes positives qui peuvent dépendre de k_w et $\boldsymbol{v}^*$. En prenant en compte (3.3.53), (2.1.17) et (3.1.18) on en déduit que

$$\begin{aligned}\|\Phi\lambda_1(t) - \Phi\lambda_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma_3)} \leq C\Big(&\int_0^t \|\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s)\|^2_V ds \\ &+ \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|^2_{L^2(\Gamma_3)} ds\Big).\end{aligned} \tag{3.3.54}$$

On utilise des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de la relation (3.3.23) pour trouver que

$$\begin{aligned}\int_0^t \|\dot{\boldsymbol{u}}_1(s) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(s)\|^2_V ds \leq C\Big(&\int_0^t \|\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s)\|^2_V \, ds \\ &+ \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|^2_{L^2(\Gamma_3)} ds\Big).\end{aligned} \tag{3.3.55}$$

Puisque $\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{u}_2(0) = \boldsymbol{u}_0$ et en utilisant (3.3.55) on obtient

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)\|_V^2 &\leq C \int_0^t \|\dot{\boldsymbol{u}}_1(s) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(s)\|_V^2 ds \\ &\leq C \int_0^t \|\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s)\|_V^2 ds \\ &+ C \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \, ds.\end{aligned} \tag{3.3.56}$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on en déduit que

$$\|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds. \tag{3.3.57}$$

Il résulte de l'inéquation précédente que

$$\int_0^t \|\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s)\|_V^2 ds \leq C \int_0^t \int_0^s \|\lambda_1(r) - \lambda_2(r)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 dr ds$$

Puisque $s \leq t$

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_0^s \|\lambda_1(r) - \lambda_2(r)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 dr ds &\leq C \int_0^t \int_0^t \|\lambda_1(r) - \lambda_2(r)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 dr ds \\ &= C \int_0^t \|\lambda_1(r) - \lambda_2(r)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 dr \int_0^t ds\end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^t \|\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s)\|_V^2 ds \leq C \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \tag{3.3.58}$$

En combinant maintenant (3.3.54) avec (3.3.58), on obtient

$$\|\Phi\lambda_1(t) - \Phi\lambda_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds. \tag{3.3.59}$$

Réitérons cette inéquation n fois conduit à

$$\|\Phi^n\lambda_1 - \Phi^n\lambda_2\|_{C(0,T,L^2(\Gamma_3))}^2 \leq \frac{C^n T^n}{n!} \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{C(0,T,L^2(\Gamma_3))}^2.$$

Ainsi, pour n suffisamment grand, Φ^n est une contraction de $C(0,T;L^2(\Gamma_3))$, et donc Φ a un unique point fixe λ^* dans cet espace de Banach.

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaires pour fournir la preuve du Théorème 3.3.1.

Démonstration. Soit λ^* le point fixe de l'opérateur $\mathcal{L}$ donné par (3.3.53). Avec (3.3.48)-(3.3.53) il est facile de vérifier que $(\boldsymbol{u}_{\lambda^*}, \boldsymbol{\sigma}_{\lambda^*}, \theta_{\lambda^*}, \zeta_{\lambda^*}, \lambda^*)$ est l'unique solution du problème $\mathcal{P}^V$ satisfaisant les régularités (3.3.1)- (3.3.5).

Chapitre 4

Problème de contact quasistatique électro-viscoélastique avec frottement et adhésion

Ce chapitre aborde une analyse variationnelle d'un problème quasi-statique décrivant le contact entre un corps électro-viscoélastique avec une foundation conductrice. Le contact est unitérale avec adhesion et contrainte unilatérale. Cette classe de problèmes traduisant un phénomène non linéaire de mécanique de contact, ils sont formulés à l'aide d'inéquations quasi variationnelles d'évolution en terme de déplacement et de potentiel électrique. Nous écrivons le problème et précisons les hypothèses adéquates sur les données. Ensuite, nous établissons une formulation variationnelle et un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible pour ce problème.

4.1 Problème électro-mécanique et hypothèses

Nous nous plaçons dans le cadre physique n°2 (page 2) que nous avons présenté dans Chapitre 1 de cette thèse avec une base conductrice. Le contact est modélisé par une condition unilatéral

avec frottement, adhésion et contrainte unilatérale prescrite dans (1.4.8). Avec ces considerations, le modèle mathématique n°2 (page 6) nous conduit au problème électro-mécanique suivant.

Problème $\mathcal{P}$

Trouver un champ des déplacements $\boldsymbol{u} : \Omega \times [0;T] \to \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0;T] \to \mathbb{S}^d$, un champ de potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$; un champ des déplacement électriques $\boldsymbol{D} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0,T] \to [0,1]$ et un champ de variable interne d'état $\boldsymbol{k} : \Omega \times [0;T] \to \mathbb{R}^d$ telles que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})) + \int_0^t \mathcal{F}\big(t-s, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s)), \boldsymbol{k}(s)\big) ds - \mathcal{E}^* \boldsymbol{E}(\varphi) \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T), \tag{4.1.1}$$

$$\boldsymbol{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \mathcal{C}\boldsymbol{E}(\varphi) \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \tag{4.1.2}$$

$$\dot{\boldsymbol{k}} = \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{k}) \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \tag{4.1.3}$$

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}(t) + \boldsymbol{f}_0(t) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \tag{4.1.4}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} - q_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \tag{4.1.5}$$

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T), \tag{4.1.6}$$

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \boldsymbol{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0,T), \tag{4.1.7}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu + p(u_\nu) - c_\nu \beta^2 R(u_\nu) \leq 0, \\ (\sigma_\nu + p(u_\nu) - c_\nu \beta^2 R(u_\nu))(u_\nu - g) = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = 0 \end{array} \right\} \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T). \tag{4.1.8}$$

$$\dot{\beta} = -(c_\nu \beta (R(u_\nu))^2 - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{4.1.9}$$

$$\varphi(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0,T), \tag{4.1.10}$$

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0,T), \tag{4.1.11}$$

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = \psi(u_\nu - g)\Phi(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{4.1.12}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \boldsymbol{k}(0) = \boldsymbol{k}_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \tag{4.1.13}$$

Nous décrivons maintenant le problème (4.1.1)–(4.1.13) et expliquons les équations et les conditions aux limites. Premièrement, les équations (4.1.1)-(4.1.3) représentent la loi de comportement électro-viscoélastique avec variable interne d'état introduite dans la première section.

Les équations (4.1.4)–(4.1.5) représentent respectivement les équation d'équilibre pour le champ des contraintes et le champ de déplacements électriques. Les équations (4.1.6)-(4.1.7) sont les conditions de déplacement-traction. Les conditions (4.1.8) représentent le contact unilatéral avec adhésion dans lequel c_ν est un coefficient d'adhésion donné. L'équation (4.1.9) représente l'équation différentielle ordinaire qui décrit l'évolution du champ d'adhésion et elle a déjà été utilisée dans[22] , voir aussi [76] pour plus de détails. Ici, en plus de c_ν, de nouveaux coefficients d'adhésion sont impliqués, ϵ_a. Notons que dans ce modèle, une fois que le décollement se produit, l'adhésion ne peut pas être rétablie car, comme il ressort de (4.1.9), $\dot{\beta} \leq 0$. Les équations (4.1.10) et (4.1.11) représentent les conditions aux limites électriques. Ensuite, (4.1.12) est la condition de contact électrique sur Γ_3 que nous avons défini dans (1.4.18) et qui décrit l'échange du potentiel entre le corps piézoélectrique et la fondation. (4.1.13), $\boldsymbol{u}_0$ est le déplacement initial, β_0 désigne le champ d'adhésion initial et $\boldsymbol{k}_0$ est la variable interne d'état initiale.

Pour l'étude du problème (4.1.1)−(4.1.13) on suppose que l'opérateur d'élasticité $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe une constante } M_{\mathcal{B}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{B}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{B}(x, \varepsilon_2)\| \leq M_{\mathcal{B}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \quad \text{p.p.} x \in \Omega. \\ \text{(b) Il existe une constante } m_{\mathcal{B}} > 0 \text{ tel que } \quad \mathcal{B}\varepsilon \cdot \varepsilon \geqslant m_{\mathcal{B}} \|\varepsilon\|^2 \\ \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \quad \text{p.p.} x \in \Omega. \\ \text{(c)L'application } x \to \mathcal{B}(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable} \\ \quad \text{sur } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d) L'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, 0) \text{ appartient à } Q. \end{cases} \tag{4.1.14}$$

L'opérateur de relaxation $\mathcal{F}$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad \mathcal{F} : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ \text{(b)} \quad \mathcal{F}\left(x,t,\varepsilon,\boldsymbol{k}\right) = \left(f_{ijkl}(x,t)\varepsilon_{kl}\boldsymbol{k}_j\right) \\ \qquad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d, \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d, \quad \text{p.p.} x \in \Omega. \\ \text{(c)} \quad f_{ijkl} = f_{jilk} = f_{klij} \in C([0,T]; L^\infty(\Omega)) \quad 1 \leq i,j,k,l \leq d. \end{cases} \tag{4.1.15}$$

Il découle des hypothèses (4.1.15) que $\mathcal{M}$ est un tenseur symétrique du quatrième ordre, pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $t \in [0,T]$.

Soit $\mathbf{Q}_\infty$ l'espace des champs tensoriels du quatrième ordre donné par

$$\mathbf{Q}_\infty = \{ \ \mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl}) : \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i,j,k,l \leq d \ \}.$$

L'espace $\mathbf{Q}_\infty$ est un espace réel de Banach de norme

$$\|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty} = \max_{1 \leq i,j,k,l \leq d} \|\mathcal{E}_{ijkl}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

et de plus,

$$\|\mathcal{E}\tau\|_Q \leq d\|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty}\|\tau\|_Q \quad \forall \mathcal{E} \in \mathbf{Q}_\infty, \ \tau \in Q. \tag{4.1.16}$$

De plus, on remarque que la condition (4.1.15) est équivalente à la condition

$$\mathcal{F} \in C([0,T]; \mathbf{Q}_\infty). \tag{4.1.17}$$

La fonction $\phi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe une constante } L_\Phi > 0 \text{ tel que} \\ \qquad \|\Phi\left(x,\varepsilon_1,\boldsymbol{k}_1\right) - \Phi\left(x,\varepsilon_2,\boldsymbol{k}_2\right)\| \leq L_\Phi\left(\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + \|\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2\|\right) \\ \qquad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2 \in \mathbb{R}^d, \quad \text{p.p.} x \in \Omega. \\ \text{(b)L'application } x \to \Phi\left(x,\varepsilon,\boldsymbol{k}\right) \text{ est Lebesgue mesurable} \\ \qquad \text{sur } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto \Phi(x,0,0) \text{ appartient à } H. \end{cases} \tag{4.1.18}$$

L'opérateur de permittivité électrique $\mathcal{C} = (c_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) } \mathcal{C}(x, \boldsymbol{E}) = (c_{ij}(x)E_j) \ \ \forall \boldsymbol{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \ \text{p.p.} x \in \Omega. \\ \text{(b) } c_{ij} = c_{ji} \in L^\infty(\Omega), \ 1 \leq i, j \leq d. \\ \text{(c) Il existe une constante } m_{\mathcal{C}} > 0 \text{ telle que} \\ \qquad \mathcal{C}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E} \geq m_{\mathcal{C}} \|\boldsymbol{E}\|^2 \ \ \forall \boldsymbol{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d \text{ p.p.} x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.1.19}$$

L'opérateur piézoélectrique $\mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\begin{cases} \textbf{(a)} \ \mathcal{E} = (e_{ijk}), \ e_{ijk} \in L^\infty(\Omega), \ 1 \leq i, j, k \leq d. \\ \textbf{(b)} \ \mathcal{E}(x)\boldsymbol{\sigma} \cdot \tau = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{E}^* \tau \ \ , \ \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}^d, \ \ \forall \tau \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{4.1.20}$$

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ satisfait

$$\begin{cases} \textbf{(a)} \text{ Il existe une constante } L_\nu > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu \, |r_1 - r_2| \ \ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \ \ \text{p.p.} x \in \Gamma_3. \\ \textbf{(b)} \ p_\nu(., r) \ \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \ \ \text{pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \textbf{(c)} \ p_\nu \, (x, r) = 0 \ \ \ \forall r \leq 0, \ \text{p.p.} x \in \Gamma_3. \end{cases} \tag{4.1.21}$$

La fonction de conductivité électrique de surface $\psi : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ satisfait

$$\begin{cases} \textbf{(a)} \text{ Il existe une constante } L_\psi > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\psi \, (x, u_1) - \psi \, (x, u_2)| \leq L_\psi \, |u_1 - u_2| \ \ \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R} \ , \ \text{p.p.} \ \ x \in \Gamma_3. \\ \textbf{(b)} \text{ Il existe une constante } M_\psi > 0 \ \text{ telle que} \\ \qquad |\psi \, (x, u)| \leq M_\psi \ \forall u \in \mathbb{R}, \ \text{p.p.} \ \ x \in \Gamma_3. \\ \textbf{(c)} \ \psi \, (., u) \ \text{ est Lebesgue mesurable on } \Gamma_3, \ \forall u \in \mathbb{R}. \\ \textbf{(d)} \ \psi(x, u) = 0 \text{ pour tout } \ u \leq 0. \end{cases} \tag{4.1.22}$$

Les forces volumiques, les tractions surfaciques et les densités des charges électriques volumiques et surfaciques vérifient

$$f_0 \in C(0, T; H), \quad f_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \tag{4.1.23}$$

$$q_0 \in C(0,T;L^2(\Omega)), \quad q_2 \in C(0,T;L^2(\Gamma_b)), \tag{4.1.24}$$

Les coefficients d'adhésion satisfont

$$c_\nu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \varepsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad c_\nu, \varepsilon_a \geq 0, \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \tag{4.1.25}$$

Les champs initials de déplacement et de variable interne d'état satisfont

$$\boldsymbol{u}_0 \in U, \qquad \boldsymbol{k}_0 \in H \tag{4.1.26}$$

le champ d'adhésion initial satisfait

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1, \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \tag{4.1.27}$$

et le potentiel donné φ_0 satisfait

$$\varphi_0 \in L^2(\Gamma_3). \tag{4.1.28}$$

Finalement, nous supposons qu'il y a un interstice g entre le corps et la base qui vérifie

$$g \in L^2(\Gamma_3), \quad g \geq 0, \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \tag{4.1.29}$$

Soit $f: [0,T] \to V$ la fonction définie par

$$(f(t), \boldsymbol{v})_V = \int_\Omega f_0(t) \cdot \boldsymbol{v} dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot \boldsymbol{v} da \ \ \forall\, \boldsymbol{v} \in V, \ \forall t \in [0,T] \tag{4.1.30}$$

et on note $q : [0,T] \to W$ la fonction définie par

$$(q(t), \zeta)_W = \int_\Omega q_0(t)\zeta dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t)\zeta da \ \ \forall \zeta \in W, \ \forall t \in [0,T], \tag{4.1.31}$$

Rappelons ici que V et W sont des espaces donnés par (2.1.12) et (2.1.25) respectivement. Par ailleurs les conditions (4.1.23) et (4.1.24) impliquent

$$f \in C([0,T];V), \qquad q \in C([0,T];W). \tag{4.1.32}$$

4.2 Formulation variationnelle

Supposons que $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{k}, \varphi, \boldsymbol{D}, \beta$ sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (4.1.1)–(4.1.13). Soient $\boldsymbol{v} \in V$ et $t \in [0, T]$ donnés. On utilise la formule de Green (2.1.11) et l'équation d'équilibre (4.1.4) pour en déduire que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)))\, dx \\ &= \int_\Omega \mathbf{f}_0(t) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))\, dx + \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))\, da\,.\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant les égalités $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t) = \mathbf{0}$ sur Γ_1 et $\boldsymbol{\sigma}(t)\nu = \mathbf{f}_2(t)$ sur Γ_2 et définition (4.1.30) pour en déduire que

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)))_Q = (\mathbf{f}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))_V + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))\, da. \tag{4.2.1}$$

Notons que

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\, \boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t)) = \sigma_\nu(t)(v_\nu - u_\nu(t)) + \boldsymbol{\sigma}_\tau(t) \cdot (\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3, \tag{4.2.2}$$

et, en utilisant la condition de contact (4.1.8) et la définition (2.1.13) de l'ensemble U, on a

$$\begin{aligned}\sigma_\nu(t)(v_\nu - u_\nu(t)) =&(\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) - c_\nu\beta^2 R(u_\nu(t)))(v_\nu - g) \\ &+(\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) - c_\nu\beta^2 R(u_\nu(t)))(g - u_\nu(t)) \\ &- (p(u_\nu(t)) - c_\nu\beta^2 R(u_\nu(t)))(v_\nu - u_\nu(t)) \\ &\geq - (p(u_\nu(t)) - c_\nu\beta^2 R(u_\nu(t)))(v_\nu - u_\nu(t)) \qquad \text{sur } \Gamma_3,\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Ainsi, en tenant compte (4.2.2), de l'inéquation (4.2.3) et de la loi de frottement (4.1.8) on obtient que

$$\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t)\, \boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))\, da \geq - \int_{\Gamma_3} (p(u_\nu(t)) - c_\nu\beta^2 R(u_\nu(t)))(v_\nu - u_\nu(t))\, da \tag{4.2.4}$$

Nous combinons maintenant (4.2.1) avec (4.2.4) pour obtenir que

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)))_Q + \int_{\Gamma_3} (p(u_\nu(t)) - c_\nu \beta^2 R(u_\nu(t)))(v_\nu - u_\nu(t))\, da \\ \geq (\mathbf{f}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))_V\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Ensuite, nous définissons la fonctionnelle d'adhésion $j_{ad} : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \to \mathbb{R}$ et la fonctionnelle de compliance normale $j_{cn} : V \times V \to \mathbb{R}$ comme suit :

$$j_{ad}(\beta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_3} -c_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) v_\nu \, da, \tag{4.2.6}$$

$$j_{cn}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) v_\nu \, da. \tag{4.2.7}$$

Combinons l'inégalité (4.2.5) avec (4.2.6) et (4.2.7) pour obtenir

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(t) \in U, \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t)))_Q + j_{ad}(\beta, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t)) + j_{cn}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t)) \\ \geq (\mathbf{f}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))_V \quad \forall \boldsymbol{v} \in U.\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

On définit la fonctionnelle $h : V \times W \to W$ par

$$(h(\boldsymbol{u}, \varphi), \zeta)_W = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - g) \Phi(\varphi - \varphi_0) \zeta \, da. \tag{4.2.9}$$

Maintenant, nous utilisons la formule de Green (2.1.31) pour les inconnues électriques du problème ainsi que les conditions (4.1.5), (4.1.10), (4.1.11) et la définition (2.1.25) de l'ensemble W. Il en résulte

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}, \nabla\zeta)_{\mathcal{W}} + \int_\Omega q_0(t)\zeta dx &= \int_\Gamma \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} \zeta da, \\ &= \int_{\Gamma_3} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} \zeta da + \int_{\Gamma_b} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} \zeta da \\ &= \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - g) \Phi(\varphi - \varphi_0) \zeta \, da + \int_{\Gamma_b} q_2(t) \zeta da \qquad \forall \zeta \in W, t \in [0, T],\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

donc

$$(\mathbf{D}, \nabla\zeta)_{\mathcal{W}} + \int_\Omega q_0(t)\zeta dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t)\zeta da = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - g) \Phi(\varphi - \varphi_0) \zeta \, da \quad \forall \zeta \in W, t \in [0, T], \tag{4.2.11}$$

et, en utilisant la définition (4.1.31) de q , nous trouvons

$$(\mathbf{D}, \nabla\zeta)_{\mathcal{W}} + (q, \zeta)_W = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - g)\Phi(\varphi - \varphi_0)\zeta \, da, \quad \forall \zeta \in W, \tag{4.2.12}$$

et, compte tenu de (4.1.2) et (4.2.9), nous obtenons

$$(B\nabla\varphi(t), \nabla\zeta)_H - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \nabla\zeta)_H + (h(\boldsymbol{u}, \varphi), \zeta)_W = (q(t), \zeta)_W \quad \forall \zeta \in W. \tag{4.2.13}$$

En utilisant (4.1.1), (4.2.8), (4.1.3), (4.2.13) et (4.1.9), nous obtenons la formulation variationnelle du problème électro-mécanique (4.1.1)-(4.1.13).

Problème P_V

Trouver un champ des déplacements $\boldsymbol{u} : [0, T] \to V$, un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \to Q$, un champ de potentiel électrique $\varphi : [0, T] \to W$, un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \to L^2(\Gamma_3)$ et un champ de variable interne d'état $\boldsymbol{k} : \Omega \times [0; T] \to H$ telles que

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t))) + \textstyle\int_0^t \mathcal{F}\big(t - s, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s)), \boldsymbol{k}(s)\big) ds - \mathcal{E}^* \boldsymbol{E}(\varphi) \tag{4.2.14}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \in U, \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t)))_Q + j_{ad}(\beta, \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + j_{cn}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \\ \geq (\mathbf{f}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))_V \quad \forall \boldsymbol{v} \in U, \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

$$\dot{\boldsymbol{k}}(t) = \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{k}(t)), \tag{4.2.16}$$

$$(B\nabla\varphi(t), \nabla\zeta)_H - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \nabla\zeta)_H + (h(\boldsymbol{u}, \varphi), \zeta)_W = (q(t), \zeta)_W \ \forall \zeta \in W, \tag{4.2.17}$$

$$\dot{\beta}(t) = -(c_\nu \beta(R(u_\nu(t)))^2 - \epsilon_a)_+ \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \tag{4.2.18}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \ \dot{\boldsymbol{u}}(0) = \boldsymbol{v}_0, \ \beta(0) = \beta_0, \ \boldsymbol{k}(0) = \boldsymbol{k}_0. \tag{4.2.19}$$

4.3 Existence et unicité de la solution

Maintenant, nous proposons notre résultat d'existence et d'unicité.

Théorème 4.3.1 *Supposons que* (4.1.14)-(4.1.28) *sont vérifiées. Alors il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que si* $\alpha < min(m_{\mathcal{B}}, m_{\mathcal{C}})$*, le problème* P_V *admet une solution unique* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \beta, \boldsymbol{k})$ *De plus, la solution satisfait :*

$$\boldsymbol{u} \in C(0,T;V), \tag{4.3.1}$$

$$\boldsymbol{u} \in C(0,T;\mathcal{Q}_1), \tag{4.3.2}$$

$$\varphi \in C(0,T;W) \tag{4.3.3}$$

$$\boldsymbol{k} \in W^{1,2}(0,T;H) \tag{4.3.4}$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z} \tag{4.3.5}$$

La démonstration de ce théorème sera effectuée en plusieurs étapes. Nous supposons dans ce qui suit les hypothèses (4.1.1)-(4.1.28) sont verifiees et aussi, partout dans cette section, c représentera une constante strictement positive indépendante du temps et dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Premièrement, pour $\beta \in \mathcal{Z}$ nous énonçons le problème auxiliaire suivant :

Problème P_V^β

Trouver un champ des déplacements $\boldsymbol{u}_\beta : [0,T] \to V$, et un champ de potentiel électrique $\varphi_\beta : [0,T] \to W$, tels que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_\beta(t) \in U, \quad & (\mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\beta)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_\beta(t)))_Q + (\textstyle\int_0^t \mathcal{F}\big(t-s, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s)), \boldsymbol{k}(s)\big) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t)))_Q \\ & + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_\beta(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_\beta(t)))_Q + j_{ad}(\beta, \boldsymbol{u}_\beta(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_\beta) + j_{cn}(\boldsymbol{u}_\beta(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_\beta) \\ & \geq (\mathbf{f}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_\beta(t))_V \qquad \forall \boldsymbol{v} \in U, t \in [0,T] \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

$$\begin{aligned} (B\nabla\varphi_\beta(t), \nabla\zeta)_H - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\beta(t)), \nabla\zeta)_H + (h(\boldsymbol{u}_\beta, \varphi_\beta), \zeta)_W = (q(t), \zeta)_W \\ \forall \zeta \in W, t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

On a le lemme suivant :

Lemme 4.3.1 *Le problème* P_V^β *a une solution unique* $(\boldsymbol{u}_\beta, \varphi_\beta) \in C([0,T]; V \times W)$.

Démonstration. Pour prouver ce lemme, considérons l'espace de Hilbert produit $X = V \times W$ avec le produit scalaire défini par

$$\langle x, y\rangle = \langle(\boldsymbol{u}, \varphi), (\boldsymbol{v}, \zeta)\rangle = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\varphi, \zeta), \quad x, y \in X \tag{4.3.8}$$

et la norme associée $\|.\|_X$. Pour tout $\boldsymbol{\eta} = (\eta^1, \eta^2) \in C([0, T]; Q \times H)$ et $t \in [0, T]$, on introduit l'ensemble $K = U \times W \subset X$ et l'opérateur $\Lambda_\beta : K \to X$ et l'élément $f_\eta(t) \in X$ défini pour tout $x = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ et $y = (\varphi, \zeta)$ par

$$\begin{aligned}\langle \Lambda_\beta x, y\rangle = (\mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q + (B\nabla\varphi, \nabla\zeta)_H \\ - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \nabla\zeta)_H + j_{ad}(\beta(t), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

$$\langle f_\eta(t), y\rangle = (\mathbf{f}(t), \boldsymbol{v})_V + (q(t), \zeta)_W - (\eta^1(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q \tag{4.3.10}$$

et

$$J(x, y) = j_{cn}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (h(\boldsymbol{u}, \varphi), \zeta)_W. \tag{4.3.11}$$

Nous introduisons les deux problèmes suivants :

Problème P^1_η

Trouver $x_{\beta\eta} : [0, T] \to X$, tel que :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{\beta\eta}(t) \in U, \quad & (\mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{\beta\eta})), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_{\beta\eta}(t)))_Q + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_{\beta\eta}(t)))_Q \\ & +(B\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \nabla\zeta)_H - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{\beta\eta}(t)), \nabla\zeta)_H + (h(\boldsymbol{u}_{\beta\eta}, \varphi_{\beta\eta}), \zeta)_W \\ & +(\eta^1(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_{\beta\eta}(t)))_Q + j_{ad}(\beta, \boldsymbol{u}_{\beta\eta}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_{\beta\eta}) + j_{cn}(\boldsymbol{u}_{\beta\eta}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_{\beta\eta}(t)) \\ & \geq (\mathbf{f}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_{\beta\eta}(t))_V \qquad \forall \boldsymbol{v} \in U, t \in [0, T]\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

$$\begin{aligned}(B\nabla\varphi_{\beta\eta}(t), \nabla\zeta)_H - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{\beta\eta}(t)), \nabla\zeta)_H + (h(\boldsymbol{u}_{\beta\eta}(t), \varphi_{\beta\eta}(t)), \zeta)_W = (q(t), \zeta)_W \\ \forall \zeta \in W, t \in [0, T].\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Problème P_η^2

Trouver $x_{\beta\eta} : [0,T] \to X$, tel que :

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_\beta x_{\beta\eta}(t), y - x_{\beta\eta}(t)\rangle + J(y, x_{\beta\eta}(t)) - J(x_{\beta\eta}(t), x_{\beta\eta}(t)) \\ \geq \langle f_\eta(t), y - x_{\beta\eta}(t)\rangle \quad \forall y \in K, t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Remarque 4.3.1 *Les deux problèmes précédents sont équivalents en ce sens que si* $x_{\beta\eta} = (\boldsymbol{u}_\beta, \varphi_{\beta\eta}) \in C([0,T];X)$ *est une solution d'un des problèmes c'est aussi une solution de l'autre problème.*

On a maintenant le lemme suivant

Lemme 4.3.2 *Il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que si* $\alpha < min(m_{\mathcal{B}}, m_{\mathcal{C}})$ *, le problème* (P_η^2) *a une solution unique* $x_{\beta\eta} \in C([0,T];X)$ *.*

Démonstration. Pour prouver le Lemme 4.3.2, on procède comme suit

La fonctionnelle j_{ad} est linéaire par rapport le troisième terme et donc,

$$j_{ad}(\beta, \boldsymbol{u}, -\boldsymbol{v}) = -j_{ad}(\beta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \tag{4.3.15}$$

En utilisant les propriétés d'opérateurs de troncature R_ν (voir [73]), on en déduit qu'il existe c tel que

$$j_{ad}(\beta_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) \leq C \int |\beta_1 - \beta_2| \|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_V ds. \tag{4.3.16}$$

Nous prenons $\beta = \beta_1 = \beta_2$ dans la dernière inéquation, on obtient

$$j_{ad}(\beta, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1) + j_{ad}(\beta, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) \leq 0. \tag{4.3.17}$$

Aussi, nous prenons $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{u}_2 = 0$ dans (4.3.17) en utilisant (4.3.15) et (4.3.16), on obtient

$$j_{ad}(\beta, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geq 0. \tag{4.3.18}$$

Lemme 4.3.3 *L'opérateur $\Lambda_\beta : K \to X$ est fortement monotone et de Lipschitz.*

Démonstration. Soit $x_1 = (\boldsymbol{u_1}, \varphi_1)$, $x_2 = (\boldsymbol{u_2}, \varphi_2)$ deux éléments de K. Soit $y = x_2$ pour $x = x_1$ et $y = x_1$ pour $x = x_2$ dans (4.3.9) et soustrayons les relations résultantes ; nous en trouvons

$$\begin{aligned}
&\langle \Lambda_\beta x_1 - \Lambda_\beta x_2, x_1 - x_2 \rangle = \\
&(\mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u_1})) - \mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u_2})), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u_1}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u_2}))_Q + (B\nabla\varphi_1 - B\nabla\varphi_2, \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_H \\
&+ (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_1 - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_2, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u_1}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u_2}))_Q - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u_1}) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u_2}), \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_H \\
&+ j_{ad}(\beta(t), \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2})
\end{aligned} \tag{4.3.19}$$

La condition (4.1.20) implique que $(\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))_Q = (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \nabla\varphi)_H$ pour tout $x = (\boldsymbol{u}, \varphi) \in K$, donc l'égalité (4.3.19) devient de la forme

$$\begin{aligned}
&\langle \Lambda_\beta(t) x_1 - \Lambda_\beta(t) x_2, x_1 - x_2 \rangle = \\
&(\mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u_1})) - \mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u_2})), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u_1}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u_2}))_Q + (B\nabla\varphi_1 - B\nabla\varphi_2, \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_H \\
&+ j_{ad}(\beta(t), \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2})
\end{aligned}$$

En utilisant (4.1.14) (b), (4.1.19) et (4.3.18) nous obtenons

$$\langle \Lambda_\beta x_1 - \Lambda_\beta x_2, x_1 - x_2 \rangle \geq m_{\mathcal{B}} \|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_V^2 + m_{\mathcal{C}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 \tag{4.3.20}$$

et, à l'aide de (4.3.8) , on en déduit qu'il existe une constante $k_1 > 0$ qui ne dépend que des opérateurs $\mathcal{B}$ et B et de Ω telle que

$$\langle \Lambda_\beta x_1 - \Lambda_\beta x_2, x_1 - x_2 \rangle \geq k_1 \|x_1 - x_2\|_X^2, \tag{4.3.21}$$

où $k_1 = min(m_{\mathcal{B}}, m_{\mathcal{C}})$. Maintenant, nous utilisons (4.3.9) pour $y = (\boldsymbol{v}, \zeta) \in X$ et $x = x_i = (\boldsymbol{u_i}, \varphi_i), i = 1, 2$. Après quelques manipulations algébriques, on trouve

$$\begin{aligned}
&\langle \Lambda_\beta x_1 - \Lambda_\beta x_2, y \rangle = (\mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u_1})) - \mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u_2})), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q + (B\nabla\varphi_1 - B\nabla\varphi_2, \nabla\zeta)_H \\
&+ (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_1 - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_2, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u_1}) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u_2}), \nabla\zeta)_H + j_{ad}(\beta(t), \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{v})
\end{aligned}$$

En combinant cette dernière relation avec (4.1.14), (4.1.19) et (4.1.20) pour trouver

$$\begin{aligned}\langle \Lambda_\beta x_1 - \Lambda_\beta x_2, y\rangle \leq k_2(&\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_V \|\boldsymbol{v}\|_V + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\zeta\|_W \\ &+ \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\boldsymbol{v}\|_V + \|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_V \|\zeta\|_W),\end{aligned}$$

où k_2 est une constante qui dépend des opérateurs $\mathcal{B}$, B et $\mathcal{E}$ pour tout $y = (\boldsymbol{v}, \zeta) \in X$. Considérant $\|\boldsymbol{v}\|_V \leq \|y\|_X$ et $\|\zeta\|_W \leq \|y\|_X$, il s'ensuit que

$$\langle \Lambda_\beta x_1 - \Lambda_\beta x_2, y\rangle \leq 4k_2 \|x_1 - x_2\|_X \|y\|_X \qquad \forall y \in X,$$

et pour $y = \Lambda_\beta x_1 - \Lambda_\beta x_2 \in X$, on obtient

$$\|\Lambda_\beta x_1 - \Lambda_\beta x_2\|_X \leq 4k_2 \|x_1 - x_2\|_X. \tag{4.3.22}$$

La preuve du Lemme 4.3.3 découle des inéquations (4.3.21) et (4.3.22)

Lemme 4.3.4 *La fonctionnelle J vérifie les hypothèses* (2.2.11).

Démonstration. Il est clair que $J(x, \cdot) : K \to \mathbb{R}$ est convexe et continue sur K, donc s.c.i sur K . Il s'ensuit que J satisfait la condition (2.2.11). De plus,on suppose $\langle x_i, y_i\rangle = \langle (\boldsymbol{u}_i, \varphi_i), (\boldsymbol{v}_i, \zeta_i)\rangle = (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i) + (\varphi_i, \zeta_i)$ pour $i = 1; 2$ et nous utilisons (4.3.11), (4.2.7) et (4.2.9) et après quelques calculs nous trouvons

$$\begin{aligned}&J(x_1, y_2) - J(x_1, y_1) + J(x_2, y_1) - J(x_2, y_2) = \\ &\int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu}))(v_{2\nu} - v_{1\nu})\, da + \\ &\int_{\Gamma_3} (\psi(u_{1\nu} - g)\Phi(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_{2\nu} - g)\Phi(\varphi_2 - \varphi_0))(\zeta_2 - \zeta_1)\, da.\end{aligned} \tag{4.3.23}$$

En utilisant l'inéquation élémentaire suivante $\int_{\Gamma_3} f(x)g(x)\, da \leq \int_{\Gamma_3} |f(x)|\, |g(x)|\, da$ on en déduit

$$\begin{aligned}&J(x_1, y_2) - J(x_1, y_1) + J(x_2, y_1) - J(x_2, y_2) \leq \\ &\int_{\Gamma_3} |p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu})|\, |v_{2\nu} - v_{1\nu}|\, da + \\ &\int_{\Gamma_3} |\psi(u_{1\nu} - g)\Phi(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_{2\nu} - g)\Phi(\varphi_2 - \varphi_0)|\, |\zeta_2 - \zeta_1|\, da.\end{aligned} \tag{4.3.24}$$

Combinant l'inéquation (4.3.24) avec les hypothèses (4.1.21), (4.1.22) et (1.4.22) ainsi que l'inéquation de Cauchy-Schwartz, pour trouver

$$\begin{aligned} &J(x_1,y_2)-J(x_1,y_1)+J(x_2,y_1)-J(x_2,y_2)\leq \int_{\Gamma_3} L_\nu|u_{1\nu}-u_{2\nu}|\,|v_{1\nu}-v_{2\nu}|\,da+\\ &\int_{\Gamma_3}[M_\psi(\Phi(\varphi_1-\varphi_0)-\Phi(\varphi_2-\varphi_0))+L_\Phi|\psi(u_{1\nu}-g)-\psi(u_{2\nu}-g)|]\,|\zeta_1-\zeta_2|\,da. \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

Reprenons (4.1.22), (1.4.22) et l'inégalité $|u_\nu|\leq\|\boldsymbol{u}\|_V$, comme résultat, nous avons

$$\begin{aligned} &J(x_1,y_2)-J(x_1,y_1)+J(x_2,y_1)-J(x_2,y_2)\leq\\ &\int_{\Gamma_3} L_\nu\|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2\|\,\|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{u}_2\|\,da+\\ &\int_{\Gamma_3}[M_\psi\|\varphi_1-\varphi_2\|+L_\Phi L_\psi\|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2\|]\,\|\zeta_1-\zeta_2\|\,da. \end{aligned} \tag{4.3.26}$$

D'après (2.1.17), (2.1.30) et les inéquations $\|\boldsymbol{u}\|_V\leq\|x\|_X$ et $\|\varphi\|_W\leq\|x\|_X$, on obtient

$$\begin{aligned} &J(x_1,y_2)-J(x_1,y_1)+J(x_2,y_1)-J(x_2,y_2)\leq\\ &(\,L_\nu C_0^2+M_\psi\tilde{C_0}^2+L_\Phi L_\psi C_0\tilde{C_0}\,)\,\|x_1-x_2\|_X\,\|y_1-y_2\|_X\,. \end{aligned} \tag{4.3.27}$$

Posons $\alpha=L_\nu C_0^2+M_\psi\tilde{C_0}^2+L_\Phi L_\psi C_0\tilde{C_0}$ alors, si

$$\alpha<min(m_{\mathcal{B}},m_{\mathcal{C}}). \tag{4.3.28}$$

En appliquant Théorème 2.2.3 , il s'ensuit que le problème P_η^2 admet une solution unique $x_{\beta\eta}$, ce qui conclut la démonstration.

Maintenant, définissons $\boldsymbol{k}_\eta\in W^{1,2}(0,T;H)$ par

$$\boldsymbol{k}_\eta(t)=\boldsymbol{k}_0+\int_0^t\boldsymbol{\eta}^2(s)\,ds, \tag{4.3.29}$$

et l'application $\boldsymbol{M}_\beta:\eta(t)\longmapsto(\boldsymbol{M}_\beta^1\eta(t),\boldsymbol{M}_\beta^2\eta(t))\in\mathcal{Q}\times H$ par

$$\boldsymbol{M}_\beta^1\eta(t)=\int_0^t\mathcal{M}\big(t-s,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{\beta\eta}(s)),\boldsymbol{k}_\eta(s)\big)\,ds, \tag{4.3.30}$$

$$\boldsymbol{M}_\beta^2\eta(t)=\phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{\beta\eta}(t)),\boldsymbol{k}_\eta(t)). \tag{4.3.31}$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.3.5 *L'opérateur $\boldsymbol{M}_\beta$ a un unique point fixe $\boldsymbol{\eta}^* = (\eta^{*1}, \eta^{*2})$.*

Démonstration. Soient $\eta_1, \eta_2 \in C([0,T]; \mathcal{Q} \times H)$. Par un calcul standard basé sur (2.1.15), (4.1.17) et (4.3.30), on obtient

$$\|\boldsymbol{M}^1_\beta \boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{M}^1_\beta \boldsymbol{\eta}_2(t)\|^2_{\mathcal{Q}} \leq C\bigg(\int_0^t \|\boldsymbol{u}_{\beta\eta_1}(s) - \boldsymbol{u}_{\beta\eta_2}(s)\|^2_{\mathrm{V}}\, ds + \int_0^t \|\boldsymbol{k}_{\eta_1}(s) - \boldsymbol{k}_{\eta_2}(s)\|^2_H\, ds \bigg) \ \forall t \in [0,T]. \tag{4.3.32}$$

Par des arguments similaires et de (4.1.18) et (4.3.31) on déduit que

$$\|\boldsymbol{M}^2_\beta \boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{M}^2_\beta \boldsymbol{\eta}_2(t)\|^2_H \leq c(\|\boldsymbol{u}_{\beta\eta_1}(t) - \boldsymbol{u}_{\beta\eta_2}(t)\|^2_{\mathrm{V}} + \|\boldsymbol{k}_{\eta_1}(t) - \boldsymbol{k}_{\eta_2}(t)\|^2_H) \ \forall t \in [0,T]. \tag{4.3.33}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{M}_\beta \boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{M}_\beta \boldsymbol{\eta}_2(t)\|^2_{\mathcal{Q}\times H} \leq C(&\|\boldsymbol{u}_{\beta\eta_1}(t) - \boldsymbol{u}_{\beta\eta_2}(t)\|^2_{\mathrm{V}} + \int_0^t \|\boldsymbol{u}_{\beta\eta_1}(s) - \boldsymbol{u}_{\beta\eta_2}(s)\|^2_{\mathrm{V}}\, ds \\ &+ \|\boldsymbol{k}_{\eta_1}(t) - \boldsymbol{k}_{\eta_2}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\boldsymbol{k}_{\eta_1}(s) - \boldsymbol{k}_{\eta_2}(s)\|^2_H\, ds)) \qquad \forall t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{4.3.34}$$

De plus, de (4.3.6) nous avons

$$(\mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{\beta\eta_1})) - \mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{\beta\eta_2})), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{\beta\eta_1} - \boldsymbol{u}_{\beta\eta_2}))_{\mathcal{Q}} + (\eta^1_1 - \eta^1_2, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{\beta\eta_1} - \boldsymbol{u}_{\beta\eta_2}))_Q \geq 0 \quad \text{p.p} \quad \forall t \in [0,T]. \tag{4.3.35}$$

Nous utilisons la condition (4.1.14) pour trouver

$$M_{\mathcal{B}} \int_0^t \|\boldsymbol{u}_{\beta\eta_1}(s) - \boldsymbol{u}_{\beta\eta_2}(s)\|^2_{\mathrm{V}}\, ds \leq -\int_0^t (\eta^1_1(s) - \eta^1_2(s), \varepsilon(\boldsymbol{u}_{\beta\eta_1}(s) - \boldsymbol{u}_{\beta\eta_2}(s)))_{\mathcal{Q}}\, ds. \tag{4.3.36}$$

Pour tout $t \in [0,T]$. Par ailleurs, nous utilisons (2.1.15) et l'inégalité $2ab \leq \dfrac{a^2}{\gamma} + \gamma b^2$ pour obtenir

$$\int_0^t \|\boldsymbol{u}_{\beta\eta_1}(s) - \boldsymbol{u}_{\beta\eta_2}(s)\|^2_{\mathrm{V}}\, ds \leq C \int_0^t \|\eta^1_1(s) - \eta^1_2(s)\|^2_{\mathcal{Q}}\, ds. \tag{4.3.37}$$

D'autre part, à partir de (4.3.29) nous avons

$$\|\boldsymbol{k}_{\eta_1}(t) - \boldsymbol{k}_{\eta_2}(t)\|^2_H\, ds \leq C \int_0^t \|\eta^2_1(s) - \eta^2_2(s)\|^2_H\, ds. \tag{4.3.38}$$

En utilisant (4.3.34), (4.3.37) et (4.3.38) on obtient

$$\|\boldsymbol{M}_\beta \eta_1(t) - \boldsymbol{M}_\beta \eta_2(t)\|^2_{\mathcal{Q}\times H} \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|^2_{\mathcal{Q}\times H}\, ds \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{4.3.39}$$

Par itération, on en déduit pour tout entier positif n , l'estimation

$$\|\boldsymbol{M}^n_\beta \eta_1 - \boldsymbol{M}^n_\beta \eta_2\|^2_{\mathcal{Q}\times H} \leq \frac{C^n T^n}{n!} \|\eta_1 - \eta_2\|^2_{C([0,T];\mathcal{Q}\times H)}, \tag{4.3.40}$$

ce qui implique qu'une puissance $\boldsymbol{M}^n_\beta$ de $\boldsymbol{M}_\beta$ est une contraction sur l'espace $C([0,T];\mathcal{Q}\times H)$. Ainsi, $\boldsymbol{M}^n_\beta$ admet un unique élément fixe $\boldsymbol{\eta}^* \in C([0,T];\mathcal{Q}\times H)$ qui est aussi un unique point fixe de $\boldsymbol{M}_\beta$.

Maintenant, notons $\boldsymbol{u}_\beta = \boldsymbol{u}_{\beta\boldsymbol{\eta}^*}$ et $\varphi_\beta = \varphi_{\beta\boldsymbol{\eta}^*}$, le couple $(\boldsymbol{u}_\beta, \varphi_\beta)$ est l'unique solution du problème P^β_V . En effet, l'existence et l'unicité découlent des lemmes 4.3.2 et 4.3.5.
De plus, pour prouver Théorème 4.3.1, nous avons besoin d'autres résultats intermédiaires.
Considérons $\boldsymbol{u}_\beta$ la solution obtenue ci-dessus et définissons le problème de Cauchy suivant énoncé comme suit

Problème P_{ad}

Trouver un champ d'adhésion β^*: [0,T] $\to L^\infty(\Gamma_3)$ tel que

$$\dot{\beta}^* = -(c_\nu \beta^*(R(u_{\beta^*\nu}))^2 - \epsilon_a)_+ \quad \text{a.e. } t \in (0,T), \tag{4.3.41}$$

$$\beta^*(0) = \beta_0. \tag{4.3.42}$$

On a le lemme suivant

Lemme 4.3.6 *Le problème P_{ad} a une solution unique $\beta^* \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}$.*

Démonstration. La solution β^* appartient au sous-ensemble $\mathcal{Z}_0$ de l'ensemble $C([0,T];L^2(\Gamma_3))$ défini par

$$\mathcal{Z}_0 = \left\{\beta \in C([0,T];L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}; \beta\left(0\right) = \beta_0\right\}. \tag{4.3.43}$$

En effet, considérons l'application $\Psi : \mathcal{Z}_0 \to \mathcal{Z}_0$ défini par

$$\Psi(t) = \beta_0 - \int_0^t \left[c_\nu \beta(s)\left(R_\nu u_{\beta\nu}(s)\right)^2 - \epsilon_a\right]_+ \mathrm{d}s \qquad \forall t \in [0,T], \tag{4.3.44}$$

où $\boldsymbol{u}_\beta$ est la première composante de la solution du Lemme 4.3.1. Pour prouver le résultat du Lemme 4.3.6, on montre que pour un entier positif n l'opérateur Ψ^n est une contraction dans $\mathcal{Z}_0$ pour un entier n assez grand.

En effet, soit $\beta_i, i = 1,2$ deux éléments de $\mathcal{Z}_0$, notons $\boldsymbol{u}_{\beta_i} = \boldsymbol{u}_i$ et $x_i = (\boldsymbol{u}_i, \varphi_i)$. Soit $t \in [0,T]$ de (4.3.16), on montre qu'il existe $C > 0$

$$j_{ad}\left(\beta_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1\right) + j_{ad}\left(\beta_2, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\right) \leq C \parallel \beta_1 - \beta_2 \parallel_{L^2(\Gamma_3)} \parallel \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \parallel_V \tag{4.3.45}$$

En utilisant les hypothèses (4.1.14) et (4.1.21), nous montrons également qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\parallel x_1\left(t\right) - x_2\left(t\right) \parallel_V \leq C \parallel \beta_1 - \beta_2 \parallel_{L^2(\Gamma_3)} \parallel \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \parallel_V,$$

et par conséquent,

$$\parallel \boldsymbol{u}_1\left(t\right) - \boldsymbol{u}_2\left(t\right) \parallel_V + \parallel \varphi_1\left(t\right) - \varphi_2\left(t\right) \parallel_W \leq C \parallel \beta_1\left(t\right) - \beta_2\left(t\right) \parallel_{L^2(\Gamma_3)} \tag{4.3.46}$$

Ensuite,

$$\parallel \boldsymbol{u}_1\left(t\right) - \boldsymbol{u}_2\left(t\right) \parallel_V \leq C \parallel \beta_1\left(t\right) - \beta_2\left(t\right) \parallel_{L^2(\Gamma_3)}. \tag{4.3.47}$$

Nous avons

$$\parallel \beta_1\left(t\right) - \beta_2\left(t\right) \parallel_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \parallel \beta_1\left(s\right) R_\nu\left(u_{1\nu}\right)^2 - \beta_2\left(s\right) R_\nu\left(u_{2\nu}\right)^2 \parallel_{L^2(\Gamma_3)} ds. \tag{4.3.48}$$

En utilisant les propriétés de l'opérateur R_ν (voir [76]), il s'ensuit que

$$\parallel \beta_1\left(t\right) - \beta_2\left(t\right) \parallel_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \left(\int_0^t \parallel \beta_1\left(s\right) - \beta_2\left(s\right) \parallel_{L^2(\Gamma_3)} + \int_0^t \parallel \boldsymbol{u}_1\left(s\right) - \boldsymbol{u}_2\left(s\right) \parallel_{L^2(\Gamma_3)^d} ds\right). \tag{4.3.49}$$

Enfin, par l'argument de Gronwall et (2.1.17), on obtient

$$\| \beta_1(t) - \beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \| \boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s) \|_V \, ds, \tag{4.3.50}$$

d'où l'on déduit

$$\| \Psi\beta_1(t) - \Psi\beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \| \boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s) \|_V \, ds,$$

et en tenant compte de (4.3.46) on obtient

$$\| \Psi\beta_1(t) - \Psi\beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \| \beta_1(s) - \beta_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)} \, ds. \tag{4.3.51}$$

Par itération, on en déduit pour tout entier positif n, l'estimation

$$\| \Psi^n\beta_1 - \Psi^n\beta_2 \|_{C([0,T],L^2(\Gamma_3))} \leq \frac{C^n T^n}{n!} \| \beta_1 - \beta_2 \|_{C([0,T],L^2(\Gamma_3))} . \tag{4.3.52}$$

Alors, pour n suffisamment grand, l'opérateur Ψ^n est une contraction de $C([0,T], L^2(\Gamma_3))$, alors Ψ^n admet un point fixe unique $\beta^* \in \mathcal{Z}_0$ qui est aussi un point fixe unique de $\mathcal{Z}_0$.

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour prouver le Théorème 4.3.1 :

Existence. Soit β^* le point fixe de l'opérateur Ψ et $x^* = (\boldsymbol{u}^*, \varphi^*)$ la solution du problème $P_V^{\beta^*}$, en utilisant à nouveau l'hypothèse (4.1.14) et (4.1.21)(a), nous avons

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}^*(t_1) - \boldsymbol{u}^*(t_2)\|_V \leq & C \left(\| \beta^*(t_1) - \beta^*(t_2) \|_{L^2(\Gamma_3)} + \| q(t_1) - q(t_2) \|_W \right. \\ & \left. + \| f(t_1) - f(t_2) \|_V \right), \quad \forall t_1, t_2 \in [0,T], \end{aligned}$$

et

$$\|\varphi^*(t_1) - \varphi^*(t_2)\|_V \leq C \left(\| q(t_1) - q(t_2) \|_W + \| \boldsymbol{u}^*(t_1) - \boldsymbol{u}^*(t_2) \|_V \right), \quad \forall t_1, t_2 \in [0,T].$$

Il découle des régularités (4.1.32) et du lemme 4.3.6 que les fonctions $\boldsymbol{u}^* : [0,T] \to V$ et $\varphi^* : [0,T] \to V$ sont continues.

Unicité. Il résulte des Lemmes 4.3.2, 4.3.5 et 4.3.6 que le quatuor $(\boldsymbol{u}^*, \varphi^*, \boldsymbol{k}^*, \beta^*)$ est une solution unique du problème P_V et de régularité exprimée en (4.3.1), (4.3.3), (4.3.4) et (4.3.5). Enfin, l'unicité découle de l'unicité du point fixe de l'opérateur Ψ, ce qui achève la preuve du Théorème 4.3.1.

Bibliographie

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] A. Amassad, C. Fabre, M. Sofonea, *A Quasistatic Viscoplastic Contact Problem with Normal Compliance and Friction*, IMA Journal of Applied Mathematics 69 (2004), 463-482.

[3] A. Amassad and C. Fabre, *Existence for Viscoplastic Contact with Coulomb Friction Problems*, Int. J. Math. Math. Sci. 32 (2002), 411-437.

[4] A. Amassad, K. Kuttler, M. Rochdi, M. Shillor, *Quasistatic thermovicoelastic contact problem with slip dependent friction coefficient*, Math. Comput. Model, 36(7-8), 839-854 (2002).

[5] K. T. Andrews, A. Klarbring, M. Shillor and S. Wright, *A Dynamic Thermoviscoelastic Contact Problem with Friction and Wear*, Int. J. Eng. Sci, Vol 35, No 14, 1291-1309. (1997).

[6] B. Awbi, El. H. Essoufi, M. Sofonea, *A viscoelastic Contact Problem with normal damped response and friction*, Annales Polonici Mathematici LXXV, pp.233-246 (2000).

[7] A. Azeb Ahmed, S. Boutechebak, *Analysis of a dynamic electro-elastic-viscoplastic contact problem*, Wulfenia Journal Klagenfurt Austria, Vol 20, No. 3 ; pp. 43-63 ; Mars 2013.

[8] A. Azeb Ahmed, S. Boutechebak,*Analysis of a dynamic thermo-elsto-viscoplastic contact problem* Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2013, No. 71, 1-17 ; December 2013.

[9] C. Baiocchis, A. Capelo,*Variational and Quasivariational Inequalities : Application to Free Boundary Problems,* Wiley-Interscience, Chichester-New York ; 1984.

[10] V. Barbu,*Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff (1976).

[11] V. Barbu,*Optimal Control of Variational Inequalities*, Pitman, Boston (1984).

[12] M. Barboteu, J.R. Fernandez, Y. Ouafik, *Numerical analysis of a frictionless viscoelastic piezoelectric contact problem*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. (in press).

[13] R.C. Batra , J.S. Yang,*Saint Venant's principle in linear piezoelectricity, Journal of Elasticity*, 38(1995), 209-218.

[14] P. Bisegna, F. Lebon and F. Maceri, The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support, in Ccntact Mechanics, (Praia da Consolaçào, 2001), 347-354, Solid Mech. Appl. 103, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.$https : //doi.org/10.1007/978 - 94 - 017 - 1154 - 8_37$.

[15] E. Bonetti , G. Bonfanti,*Existence and Uniqueness of the Solution to 3D Thermoviscoelastic System,* Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2003, No. 50, pp. 1-15.

[16] S. Boutechebak,*Etude analytique de quelques problèmes en élasticité avec contrainte*, Thèse de doctorat, Université Sétif, 2007.

[17] S. Boutechebak, A. Azeb Ahmed,*Analysis of a dynamic frictional contact Problem for thermo-elasto-Viscoplastic materials with damage*, Gen. Math. Notes, Vol. 19, No. 1, November 2013, pp.60-77.

[18] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, Paris (1987).

[19] H. Brézis, *Equations et Inéquations Non Linéaires dans les Espaces en Dualité,* Annale de l'Institut Fourier, Tome 18, n°1, (1968), p. 115-175.

[20] O. Chau, *Analyse variationnelle et numérique de quelques problèmes aux limites en mécanique de contact* , Thèse de doctorat, Université de Perpignan, (2000).

[21] O. Chau, J.R. Fernondez, W. Han, M. Sofonea, *A frictionless contact problem for elastic-visco-plastic materials with normal compliance and damage*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 191, pp. 5007-5026, 2002

[22] O. Chau, J.R. Fernondez, M. Shillor, M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion* , J. Comput. Appl. Math, 159, pp. 431-465, 2003.

[23] O. Chau, W. Han, M. Sofonea, *A dynamic frictional contact problem with normal damped response*, Acta Applicandae Mathematicae, 71, pp. 159-178 2002.

[24] O. Chau, M. Shillor, M. Sofonea, *Dynamic frictionless contact with adhesion*, Z. Angew. Math.Phys., 55, pp. 32-47, 2004.

[25] L. Chouchane, *Etude variationnelle de quelques problèmes en elasto-visco-plasticité*, Thèse de doctorat, Université de Sétif, (2008).

[26] A. Chouia, A. Azeb Ahmed, F. Yazid, *Analysis of a thermo-elsto-viscoplastic contact problem with wear and damage*, Ufa Mathematical Journal, Vol. 15. No 2 (2023). P. 100-118.

[27] N. Cristescu and I. Suliciu, *Viscoplasticity,* Martinus Nijhoff Publishers, Editura Tehnica, Bucharest, (1982).

[28] G. Duvaut , J. L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod (1976).

[29] J. R. Fernández-García, M. Sofonea, J. M. Viaňo ; *A Frictionless Contact Problem for Elastic-Viscoplastic Materials with Normal Compliance*, Numerische Mathemätik 90 (2002), 689-719.

[30] M. Frémond, *adhésion des solides, J. Mécanique Théorique et Appliquée*, 6, pp. 383-407, 1987.

[31] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II, 295, pp. 913-916, 1982.

[32] M. Frémond, *Non-Smooth Thermomechanics*, Springer, Berlin, 2002.

[33] M. Frémond, B. Nedjar, *Damage in concrete : The unilateral phenomenon*, Nucl. Eng. Des. 156, pp. 323-335, 1995.

[34] M. Frémond , B. Nedjar, *Damage, Gradient of Damage and Principle of Virtual Work*, Int. J. Solids Structures, 33 (8),1083-1103. (1996).

[35] M. Frémond, K.L. Kuttler, B. Nedjar, M. Shillor ; *One-dimensional models of damage*, Adv. Math. Sci. Appl., 8(2), pp. 541-570, 1998.

[36] P. Germain, *Cours de Mécanique des Milieux Continus,* Masson et Cie, Paris, (1973).

[37] W. Han, M. Sofonea, *On a dynamic contact problem for elastic-visco-plastic materials*, appl.Numer. math. 57(2007)498-509.

[38] W. Han, M. Sofonea, *Analysis and numerical approximation of an elastic frictional contact problem with normal compliance*, Applications Mathematicae 26 (4), 415-435, (1999).

[39] W. Han and M. Sofonea ; Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity, Studies in Advanced Mathematics 30, American Mathematical Society, Providence, RI - Intl. Press, Sommerville, MA, 2002.

[40] W. Han, M. Sofonea, *Time-dependent variational inequalities for viscoelastic contact problem*, Jornal of Computational and applied Mathematics Volume 136. Issues 1-2, pp. 369-387,(2001).

[41] W. Han, M. Sofonea, K. Kazmi, *Analysis and numerical solution of a frictionless contact problem for electro-elastic-visco-plastic materials*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) 3915-3926.

[42] W. Han, *On the numerical approximation of a frictional contact problem with normal compliance*, Numer, Funct. Anal. et Optimiz. 17, pp 307-321. (1996).

[43] W. Han and M. Sofonea ; Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems, *SIAM Journal of Numerical Analysis* **38** (2000), 556–579.

[44] W. Han and M. Sofonea, Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems, SIAM Journal of Numerical Analysis. 38 (2000), 556–579.

[45] I. R. Ionescu and M. Sofonea, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford, (1994).

[46] J. Jaresek, M. Sofonea, *On the solvability of dynamicelastic-visco-plastic contact problems*, Z Angew Mate Mech(ZAMM) 88 (2008)3-22.

[47] S. Kobayashi, N. Robelo, *A Coupled Analysis of Viscoplastic Deformation and Heat Transfer : I Theoretical Consideration, II Applications,* Int, J. of Mech. Sci, 22, 699-705, 707-718, (1980).

[48] K. L. Kuttler, *Dynamic Frictional Contact for Elastic Viscoplastic Material*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2007(2007), No. 75, pp. 1-20.

[49] Z. Lerguet, *Analyse de quelques problèmes de contact avec frottement et adhésion*,Thèse de doctorat, Université de Sétif, (2008).

[50] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires*, Dunod (1969).

[51] J. L. Lions , E. Magénes, *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, Volume I, Dunod (1968).

[52] A. B Merouani, F.Messelmi, *Dynamic Evolution of Damage in Elastic-Thermo-Viscoplastic Materials.* Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2010(2010), No. 129, pp. 1-15.

[53] F. Messelmi, B. Merouani, *Quasi-Static Evolution of Damage in Thermo-Viscoplastic Materials,* Analele Universităţii Oradea, Fasc. Mathematica, Tome XVII (2010), Issue No. 2, 133-148.

[54] F. Messelmi, B. Merouani , M. Meflah, *Nonlinear Thermoelasticity Problem*, Analele Universităţii Oradea, Fasc. Mathematica, Tome XV (2008), 207-217.

[55] R.D Mindlin, *Continuum and lattice theories of influence of electromechanical coupling on capaci-tance of thin dielectric films*, Int. J. Solids 4 (1969), 1197-1213.

[56] R.D Mindlin, *Elasticity, Piezoelectricity and Cristal lattice dynamics*, J. of Elasticity 4 (1972), 217-280.

[57] R.D Mindlin, *Polarisation gradient in elastic dielectrics* , Int. J. Solids Structures 4 (1968), 637-663.

[58] J Nečas, I Hlavaček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An Introduction*,Elsevier, Amsterdam, 1981.

[59] J. Nečas , J. Kratochvil, *On Existence of the Solution Boundary Value Problems for Elastic-Inelastic Solids*, Comment. Math. Univ. Carolinea, 14, (1973),755-760,.

[60] M. Raous, L. Cangémi,M. Cocu, *A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 177, 1999, pp. 383-399, .

[61] J. M. Ricaud, *Etude d'une classe d'inéquations d'évolution implicites et application à des problèmes dynamiques de contact avec frottement*, Thèse de doctorat. Université d.Aix-Marseille I, (1999).

[62] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, *Analysis of Quasistatic Viscoelastic Problem with Friction and Damage*, Adv. Math. Sci. App. 10,2002, 173-189.

[63] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, *A quasistatic contact Problem with sdirectional friction and damped response*, Applicable Analysis 68,pp, 409-422,(1998)

[64] M. Rochdi, M. Shillor , M. Sofonea, *Quasistatic nonlinear Viscoelastic contact with normal compliance and friction*, Jornal of Elasticity 51, pp. 105-126 (1998)

[65] J. Rojek, J.J. Telega, *Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics I* : General developments, J. Theor. Appl. Mech., 39, 2001, pp. 655-677,.

[66] J. Rojek, J.J. Telega,S. Stupkiewicz, *Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics II* : Numerical implementation and application to implanted knee joints, J. Theor. Appl. Mech. 39 (2001), 679–706.

[67] L. Selmani, N. Bensebaa, *An Electro-viscoelastic Contact Problem with Adhesion and Damage*,Rend.Sem. Mat. Univ.Pol.Torino- Vol.66, 2 (2008)

[68] M. Selmani, L. Selmani, *Analysis of a frictionless contact problem for elastic-viscoplastic material.*Nonlinear Analysis : Modelling and Control, 2012, Vol. 17, No. 1, 99-117

[69] M. Shillor, M. Sofonea ,J. J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes in Physics 655, Springer, Berlin, (2004).

[70] A. Signorini, *Sopra a une questioni di elastostatica, Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze,* (1933).

[71] M. Sofonea, *Functional Methods in Thermo-Elasto-Visco-Plasticity,* Ph. D. Thesis, Univ of Buccharest, (1988) (in Romanian).

[72] M. Sofonea, *Quasistatic Processes for Elastic-Viscoplastic Materials with Internal State Variables*, Annales Scientifiques de l'Université Clermont-Ferrand 2, Tome 94, Série Mathématiques, n° 25.(1989), p. 47-60,.

[73] M. Sofonea and R. Arhab, An Electro-viscoelastic contact problem with adhesion. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A : Math. Anal. 14 (2007), 577-591.

[74] M. Sofonea, El. H. Essoufi, *A piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction*, Mathematical Modelling and Analysis 9, 2004, 229-242.

[75] M. Sofonea, E.H. Essoufi, *Quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body*,Adv. Math. Sci. Appl.14 (1)(2004) 25–40.

[76] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 276, Chapman, Hall/CRC Press, New york, 2006.

[77] M. Sofonea, A. Matei, Variational inequalities with applications, A study of antiplane frictional contact problems, Springer, New York (forthcoming).

[78] M. Sofonea, M.Shillor *Variational analysis of quasistatic viscoplastic contact problems with friction*, Commun. Appl. Anal., 5 (2001), 135-151.

[79] M. Sofonea, F. P'atrulescu, Y. Souleiman, *Analysis of a contact problem with wear and unilateral constraint*, Appl. Anal. 95 (2016) 2590–2607.

[80] Y. Souleimana, *Analyse de quelques problèmes de contact glissant*, Thèse de doctorat, Université de Perpignan Via Domitia, France, (2017).

[81] N. Stromberg, *Continuum Thermodynamics of Contact, Friction and Wear*, Thesis No, 491, Departement of Mechanical Engineering, Linkoping Institute of Technology, Linkoping, Sweden, (1995).

[82] N. Stromberg, L. Johansson and A. Klarbring, *Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear*, Int. J. Solids Structures 33 (1996), 1817-1836.

[83] P. Suquet, *Plasticité et homogénéisation*, Ph.D. thesis, Université Pierre etMarie Curie, Paris 6, 1982.

[84] R. A. Toupin, *A dynamical theory of elastic dielectrics*. Int. J. Engrg. Sci. 1 (1963).

[85] R. A. Toupin, *The elastic dielectrics*, J. Rat. Mech. Analysis 5 (1956), 849-915.

[86] B.Tengiz, G.Tengiz, *Some Dynamic of the Theory of Electroelasticity*, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics 10, 1997, 1-53.