N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de

la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

Sur une classe des équations intégrales de type Hammerstein

Présenté par: Diab Messaouda
Tir Rabia

Soutenu publiquement devant le jury composé de

B. BEN ALI	MCA	Président	Univ. El Oued
E. ZAOUCHE	MCB	Rapporteur	Univ. El Oued
I. BELHADI	MAA	Examinateur	Univ. El Oued

Année universitaire 2018 – 2019

Remerciements

Avant toute chose, nous remercions « Allah » qui nous a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.

Nous tenons à notifier un remerciement spécial à notre encadreur pédagogique **Dr. Elmehdi Zaouche** pour avoir accepté de nous encadrer, pour son support et sa patience qu'il n'a cessé de nous apporter tout au long de ce travail.

Notre sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Nous remercions également tout nous collègues d'étude, particulièrement notre promotion de master mathématique, 2018/2019 à l'université de **Chahid Hama Lakhdar El-Oued**

En fin, nous remercions vivement notre famille pour l'aide matérielle et moral durant la période de préparation.

Table des matières

Notations ii

Introduction 1

1 Rappels et notions fondamentales 3

1.1 Espaces fonctionnels . . . 3

1.1.1 Espace de Banach . . . 3

1.1.2 Espace mesurable . . . 4

1.1.3 Espaces de Lebesgue . . . 5

1.2 La compacité . . . 6

1.2.1 Théorème d'Arzela-Ascoli . . . 7

1.3 Quelques théorèmes du point fixe . . . 9

1.3.1 Théorème du point fixe de Banach . . . 9

1.3.2 Théorème du point fixe de Schauder . . . 10

2 Équations intégrales de Fredholm : Classification et quelques méthodes de résolution 12

2.1 Classification par linéarité des équations intégrales de Fredholm . . . 12

2.1.1 Équations intégrales linéaires de Fredholm . . . 12

2.1.2 Équations intégrales non linéaires de Fredholm . . . 14

2.2 Résolution des équations intégrales linéaires de Fredholm . . . 15

2.2.1 Méthode de déterminant de Fredholm . . . 15

2.2.2 Méthode pour le cas des noyaux dégénérés 21
2.3 Résolution des équations intégrales non linéaires de Fredholm 25
2.3.1 Méthode de calcul direct 25
2.3.2 Méthode de solution en série 27

3 Existence et unicité d'une solution continue et bornée d'une équation intégrale de type Hammerstein **30**
3.1 Premier théorème d'existence et d'unicité d'une solution continue et bornée 31
3.2 Deuxième théorème d'existence d'une solution continue et bornée 35
3.3 Troisième théorème d'existence d'une solution continue et bornée 39
3.4 Applications à un problème aux limits 42
3.4.1 Écriture du problème équivalent 42

Conclusion **46**

Bibliographie **47**

Notations

$\mathbb{R}$	: l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{N}$	: l'ensemble des nombres entiers.
$\mathbb{C}$	: l'ensemble des nombres complexes.
$\mathcal{P}(E)$	: désigne l'ensemble de tous les sous-ensembles (ou parties) de E.
$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$	: l'ensemble des parties de E.
$\mathcal{L}(E,F)$	: l'ensemble des fonctions linéaire de E dans F .
$C(E,F)$	:l'ensemble des fonctions continues de E dans F.
$C(\Omega)$	:l'ensemble des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}$.
$C_a(\Omega)$	:l'ensemble des fonctions continues et bornées par a de Ω dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{C}^k([a,b])$	: l'ensemble des fonctions dérivables jusqu'à l'ordre k sur $[a,b]$
p.p.	:presque partout.
$\|.\|_p$	$:= \|.\|_{L^p}$ où $1 \leq p \leq \infty$.

Introduction générale

Toute équation se produit sous le signe intégral s'appelle équation intégrale dans laquelle l'inconnu, généralement, est une fonction d'une ou plusieurs variables. On parle généralement de deux types des équations intégrales, ce sont, les équations intégrales de Fredholm et de Volterra (Ivare Fredholm 1866-1927, Vito Volterra 1860-1940). Elles sont importante dans plusieurs domaines physique dont les équations de diffusion, le problème à frontière libre et les problèmes de contactes et de l'astrophysique. Dans ce mémoire, on étude l'existence et l'unicité des solutions d'un type des équations intégrales de Fredholm, s'appelle équation intégrale de Hammerstein, en utilisant quelques méthodes de résolution directe et le théorème de point fixe. Le mémoire se compose de trois chapitres. Il nous semble utile de rappeler un premier chapitre quelques notions et outils utilisées tout au long de ce mémoire, comme les espaces fonctionnelle, espace de Banach, espaces mesurables et espaces de Lebesgue et quelques théorèmes du point fixe de Banach et de Schauder. Le deuxième chapitre est consacré à présenter une classification par linéarité des équations intégrales de Fredholm (linéaire et non linéaire) dont les équations intégrales de type Hammerstein. D'ailleurs, on voit quelques méthodes de résolution concernant ce dernier type ce sont la méthode du determinant de Fredholm et une autre pour le cas des noyaux dégénérés appliquées aux équations intégrales linéaires de Hammerstein. Pour le cas non linéaire, nous avons deux méthodes appelées respectivement la méthode de calcul directe et la méthode de solution en série. Finalement, le dernier chapitre porte sur l'existence et l'unicité d'une solution continue et bornée d'une équation intégrale non

linéaire de Hammerstein,

$$y(t) = u\left(t, y(t)\right) + \int_{\Omega} \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}\left(s, y(s)\right) ds \tag{1}$$

où Ω est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$, $u\left(.,.\right), \mathcal{F}\left(.,.\right) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{K}\left(.,.\right) : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données et $y\left(.\right) : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction inconnue, à chercher, solution de l'équation (1). Sous différente conditions aux $u, \mathcal{K}$ et $\mathcal{F}$, en étudie l'existence et l'unicité d'une solution continue et bornée de l'équation (1) en utilisant le théorème de point fixe et une méthode qu'il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une série itérée. Nous donnons également des exemples et applications à cette équation intégrale (1).

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

Dans ce chapitre on présentera quelques notions utilisées tout au long de ce mémoire concernant l'analyse fonctionnelle.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1 (Espace métrique) *Soit E un ensemble. On appelle distance sur E une application $d : E \times E \to R_+$ satisfait pour tous x, y, z de E,*

1·) $d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$,

2·) $d(x, y) = d(y, x)$,

3·) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Tout ensemble E muni d'une distance d est appelé espace métrique, que l'on note par (E, d).

Définition 1.1.2 (Espace vectoriel normé) *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle norme sur E toute application, notée $\|\cdot\|$, définie de E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant pour tous $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,*

1·) $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$,

2·) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

3·) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tout espace vectoriel E muni d'une norme, que l'on note par $(E, \|\cdot\|)$, est appelé espace vectoriel normé.

Proposition 1.1.1 *Si $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel E, alors la fonction réelle $d : (x, y) \longmapsto \|x - y\|$ est une distance sur E, dite la distance canonique associée à la norme $\|\cdot\|$.*

Définition 1.1.3 (Suite de Cauchy) *Dans un espace métrique (E, d), une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si et seulement si elle satisfait,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q > N \Rightarrow d(x_p, x_q) < \epsilon.$$

Définition 1.1.4 (Suite simplement convergente) *Soit (E, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E est dite simplement convergente vers $x \in E$ si et seulement si,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon.$$

Proposition 1.1.2 *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Remarque 1.1 *La réciproque n'est pas toujours vraie.*

Définition 1.1.5 (Espace complet) *Un espace métrique E est dit complet si toute suite de Cauchy dans E converge dans E.*

Définition 1.1.6 (Espace de Banach) *Tout espace vectoriel normé complet s'appelle espace de Banach.*

1.1.2 Espace mesurable

Définition 1.1.7 (Espace mesurable) *Une classe $\mathcal{A}$ des parties d'un ensemble E est appelée tribu ou σ-algèbre si elle vérifie les trois axiomes suivantes,*

1·) $E \in \mathcal{A}$,

2·) *pour tout* $A \subseteq E, A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{A}$,

3·) *si* (A_n) *est une famille dénombrable d'éléments de* $\mathcal{A}$, *alors* $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

On dit alors que $(E, \mathcal{A})$ *est un espace mesurable, et les éléments de* $\mathcal{A}$ *sont appelés les ensembles mesurables.*

Définition 1.1.8 (Fonction mesurable) *Soient* $(E_1, \mathcal{A}_1)$ *et* $(E_2, \mathcal{A}_2)$ *deux espaces mesurables. Une fonction* $f : (E_1, \mathcal{A}_1) \to (E_2, \mathcal{A}_2)$ *est dite mesurable de* $(E_1, \mathcal{A}_1)$ *dans* $(E_2, \mathcal{A}_2)$ *si* $f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{A}_1$, *c'est-à-dire que pour tout* $B \in \mathcal{A}_2$ *on a* $f^{-1}(B) \subseteq \mathcal{A}_1$.

Exemple 1.1.1 *Une fonction constante définie sur un ensemble mesurable est une fonction mesurable.*

Proposition 1.1.3 *Soit* E *un ensemble mesurable. Si* $f : E \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue, alors* f *est mesurable.*

Définition 1.1.9 (Mesure) *Une mesure sur un espace mesurable* $(E, \mathcal{A})$ *est une application* $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *qui vérifie,*

1·) $\mu(\emptyset) = 0$,

2·) μ *est* δ*-additive :* $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$, *pour toute suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $\mathcal{A}$ *telle que* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$.

On dit alors que $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *est un espace mesuré, et pour tout* $A \in \mathcal{A}$, *on appelle* $\mu(A)$ *la mesure de* A.

Définition 1.1.10 (Mesure finie) *Une mesure* μ *sur un espace mesurable* $(E, \mathcal{A})$ *est dite finie si,*

$$\mu(E) < \infty.$$

1.1.3 Espaces de Lebesgue

Définition 1.1.11 *Soit* Ω *un ouvert dans* $\mathbb{R}^n$. *Pour tout* $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ *est l'espace des classes des fonctions mesurables de puissance p-ème intégrable, c'est à dire,*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable et } \int_\Omega \left| f(x) \right|^p dx < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\Big\|f\Big\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega \Big|f(x)\Big|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Cas particulier :

pour $p = 1$, $L^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions intégrable sur Ω.

Si $p = +\infty$, on définie l'espace $L^\infty(\Omega)$ par :

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \; mesurable, \; \exists M > 0 \; telle \; que \; \Big|f(x)\Big| \leq M \; p.p. \; x \in \Omega \right\}$$

muni de la norme

$$\Big\|f\Big\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\left\{ M, \; telle \; que \; \Big|f(x)\Big| \leq M \; p.p. \; x \in \Omega \right\} = \sup ess f.$$

Théorème 1.1.1 (Théorème de convergence dominée) [1]. *Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des fonctions mesurables définie d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Supposons qu'il existe une fonction mesurables f vérifie*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x), \quad p.p. \; x \in \Omega$$

et une fonction intégrable $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ telle que,

$$\Big|f_n(x)\Big| \leq g(x), \quad p.p. \; x \in \Omega.$$

Alors f est intégrable, et on a,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx.$$

1.2 La compacité

Définition 1.2.1 (Recouvrement) *Soit (E, d) un espace métrique, et soit $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ une collection d'ouverts dans E. On dit que cette collection est un recouvrement ouvert de E si et seulement si,*

$$\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i = E.$$

Si $I = \{1, ..., n\}$ est fini, on dit que ce recouvrement est fini, et on écrit,

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i = E.$$

Définition 1.2.2 (Espace métrique compact) *Un espace métrique (E, d) est dit compact si et seulement si de tout recouvrement de E, on peut extraire un sous recouvrement fini.*

Définition 1.2.3 (Partie compact) *Soit K une partie non vide d'un espace métrique compact (E, d). On dit que K est compact si pour tout recouvrement ouvert $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I} \subset E$ de K, c'est à dire,*

$$K \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$$

on peut extraire un sous recouvrement fini, c'est à dire,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i.$$

Définition 1.2.4 (Compact de $\mathbb{R}^n$) *Une partie K dans $\mathbb{R}^n$ est dit compacte si et seulement si K est fermée et bornée.*

Définition 1.2.5 (Relativement compact) *Soit (E, d) un espace métrique. Une partie K de E est dit relativement compacte si et seulement si de toute suite d'éléments de K, on peut extraire une sous suite convergente dans E.*

Définition 1.2.6 (Relativement compact dans $\mathbb{R}^n$) *Une partie K dans $\mathbb{R}^n$ est relativement compacte si et seulement si K est bornée.*

1.2.1 Théorème d'Arzela-Ascoli

Dans tout la suit, (E, d_1) et (F, d_2) désignent des espaces métriques.

Définition 1.2.7 (Application continue) *Une application $f : (E, d_1) \to (F, d_2)$ est dite continue en $x_0 \in E$ si et seulement si,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_{x_0} > 0, \forall x \in E, d_1(x, x_0) < \delta_{x_0} \Rightarrow d_2\Big(f(x), f(x_0)\Big) < \epsilon.$$

On dit que f est continue sur une partie non vide D de E, si elle est continue en tout point x_0 de D.

Définition 1.2.8 (Application uniformément continue) *Une application $f : (E, d_1) \to (F, d_2)$ est dite uniformément continue sur E si et seulement si,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in E, d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2\Big(f(x), f(y)\Big) < \epsilon.$$

Proposition 1.2.1 *Toute application uniformément continue est continue.*

Proposition 1.2.2 *Toute application continue sur un intervalle fermé et borné atteint ses bornes inférieure et supérieure.*

Théorème 1.2.1 *Toute application continue d'un espace métrique compact (E, d_1) dans un espace métrique (F, d_2) est uniformément continue.*

Définition 1.2.9 (Application Lipschitzienne) *Une application $f : (E, d_1) \to (F, d_2)$ est dite Lipschitzienne si et seulement si,*

$$\exists k > 0, \forall x, y \in E, d_2\Big(f(x), f(y)\Big) \leq k d_1(x, y).$$

Si $0 < k < 1$, on dit que f est une application contractante.

Définition 1.2.10 (Famille équicontinue) *Soit $\mathtt{F} \subset C(E, F)$. On dit que $\mathtt{F}$ est équicontinue si et seulement,*

$$\forall x \in E, \forall \epsilon > 0, \exists \eta_x > 0, \forall y \in E, \forall f \in \mathtt{F}, d_1(x, y) < \eta_x \Rightarrow d_2\Big(f(x), f(y)\Big) < \epsilon.$$

Définition 1.2.11 (Famille uniformément équicontinue) *On dit que $\mathtt{F}$ est uniformément équicontinue si et seulement,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in E, \forall f \in \mathtt{F}, d_1(x, y) < \eta \Rightarrow d_2\Big(f(x), f(y)\Big) < \epsilon.$$

Proposition 1.2.3 *Dans le cas où l'espace E est compact, on a l'équivalence suivante :*

$$\mathtt{F} \text{ est équicontinue} \Leftrightarrow \mathtt{F} \text{ est uniformément équicontinue.}$$

Théorème 1.2.2 (Théorème d'Arzela-Ascoli) [5]. *Une partie* $\mathtt{F}$ *de* $C(E;F)$ *est relativement compacte si et seulement si,*

- $\mathtt{F}$ *est équicontinue,*
- *pour tout* $x \in E$, $\mathtt{F}_x = \{f(x), f \in \mathtt{F}\}$ *est relativement compact.*

1.3 Quelques théorèmes du point fixe

En analyse, les théorèmes de point fixe sont un résultat qui permet d'affirmer qu'une application T admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorèmes se révèlent être utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

1.3.1 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom principe de contraction de Banach) est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

Définition 1.3.1 (point fixe) *Soit* T *une application défini de* E *dans lui même. Alors l'équation :*

$$Tu = u \tag{1.1}$$

est dite équation de point fixe, et toute solution de (1.1) est un point fixe de l'application T*.*

Théorème 1.3.1 (Théorème du point fixe de Banach) *Soit* (E,d) *un espace métrique complet, et* $T : E \to E$ *une application contractante d'une constante notée* k*. Alors* T *a un unique point fixe* $x \in E$*.*

Preuve.

L'existence :

Soit $y \in E$ un point arbitraire dans E. Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par,

$$\begin{cases} x_0 & = y, \\ x_n & = T(x_{n-1}), \quad n \geqslant 1. \end{cases}$$

On doit prouver que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E. Pour $m \leq n$, on utilise l'inégalité triangulaire,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n).$$

Puisque T est une contraction, on a,

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(Tx_{p-1}, Tx_p) \leq kd(x_{p-1}, x_p) \quad \text{pour} p \geqslant 1.$$

En répétant cette procédure, on obtient,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq (k^m + k^{m+1} + \cdots + k^{n-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq k^m(1 + k + \cdots + k^{n-m-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq k^m(1-k)^{-1}d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

On déduit que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers x dans E. Par ailleurs comme T est continue, on a,

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Tx_{n-1} = T\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = Tx.$$

Donc x est un point fixe de T.

L'unicité :

Supposons $x \neq y$ telles que $x = Tx$ et $y = Ty$, alors,

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

Ce qui implique que $d(x, y) = 0$, c'est à dire $x = y$ (puisque $k < 1$). ■

1.3.2 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Banach pour montrer l'existence d'un point fixe pour une application continue sur un convexe fermé dans un espace de Banach.

Théorème 1.3.2 (Théorème du point fixe de Schauder) *Soient K un sous ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace de Banach X, et $T : K \to K$ une application continue tel que $T(K)$ est relativement compact . Alors T admet au moins un point fixe qui n'est pas nécessairement unique.*

Preuve. voir [8]. ■

Chapitre 2

Équations intégrales de Fredholm : Classification et quelques méthodes de résolution

Ce chapitre contient une classification selon la linéarité des équations intégrales de Fredholm et quelques méthodes de résolution.

2.1 Classification par linéarité des équations intégrales de Fredholm

2.1.1 Équations intégrales linéaires de Fredholm

Définition 2.1.1 *Soit Ω un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$. Une équation intégrale de la forme :*

$$\alpha(t)y(t) = u(t) + \lambda \int_{\Omega} \mathcal{K}(t,s)y(s)ds, \qquad t \in \Omega \tag{2.1}$$

s'appelle équation intégrale linéaire de Fredholm où $\alpha(.), u(.) : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{K}(.,.) : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ sont des fonctions connues, $y(.) : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction inconnue et λ est un paramètre réel ou complexe non nul. La fonction $\mathcal{K}(t,s)$ s'appelle le noyau de l'équation intégrale

(2.1). De plus,

- *si $\alpha \equiv 0$, l'équation (2.1) s'appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de premier espèce qui prend alors la forme :*

$$u(t) + \lambda \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)y(s)ds = 0, \quad t \in \Omega.$$

- *si $\alpha \equiv 1$, l'équation (2.1) s'appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce qui s'écrit comme suite,*

$$y(t) = u(t) + \lambda \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)y(s)ds, \quad t \in \Omega. \tag{2.2}$$

- *si $\alpha(.)$ est donnée comme une fonction de t, alors l'équation (2.1) s'appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de troisième espèce.*

Théorème 2.1.1 *Si la fonction $\alpha(.)$ vérifie pour tout $t \in \Omega, \alpha(t) > 0$ alors l'équation (2.1) peut être considérer comme une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce de la forme :*

$$\sqrt{\alpha(t)}y(t) = \frac{u(t)}{\sqrt{\alpha(t)}} + \lambda \int_\Omega \frac{\mathcal{K}(t,s)}{\sqrt{\alpha(t)}\sqrt{\alpha(s)}}\sqrt{\alpha(s)}y(s)ds \tag{2.3}$$

d'une fonction inconnue $\sqrt{\alpha(t)}y(t)$, et d'un noyau $\dfrac{\mathcal{K}(t,s)}{\sqrt{\alpha(t)}\sqrt{\alpha(s)}}$.

Preuve. Comme $\alpha(t) > 0$ sur Ω alors la division de (2.1) sur $\sqrt{\alpha(t)}$ nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(t)y(t)}{\sqrt{\alpha(t)}} &= \frac{u(t)}{\sqrt{\alpha(t)}} + \lambda \int_\Omega \frac{\mathcal{K}(t,s)}{\sqrt{\alpha(t)}}y(s)ds \\ \sqrt{\alpha(t)}y(t) &= \frac{u(t)}{\sqrt{\alpha(t)}} + \lambda \int_\Omega \frac{\mathcal{K}(t,s)}{\sqrt{\alpha(t)}\sqrt{\alpha(s)}}\sqrt{\alpha(s)}y(s)ds. \end{aligned}$$

Si on pose $Y(t) = \sqrt{\alpha(t)}y(t)$ et $f(t) = \dfrac{u(t)}{\sqrt{\alpha(t)}}$, on obtient,

$$Y(t) = f(t) + \lambda \int_\Omega \frac{\mathcal{K}(t,s)}{\sqrt{\alpha(t)}}Y(s)ds, \quad t \in \Omega$$

qui est une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce. ■

Remarque 2.1 *Dans l'équation (2.2) si $u \equiv 0$, alors,*

$$\alpha(t)y(t) = \lambda \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)y(s)ds, \quad t \in \Omega$$

s'appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce homogène. Si $u \not\equiv 0$ *on dit qu'elle est non homogène.*

Exemple 2.1.1 *Soit la fonction*

$$y(t) = \sin \frac{\pi t}{2}.$$

y est une solution de l'équation intégrale :

$$y(t) - \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 \mathcal{K}(t,s) y(s)\, ds = \frac{t}{2}, \quad t \in [0,1] \tag{2.4}$$

avec

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{t(2-s)}{2}, & 0 \le t \le s \\ \dfrac{s(2-t)}{2}, & s \le t \le 1. \end{cases}$$

En effet, l'équation (2.4) est de Fredholm non homogène $\left(u(t) = \dfrac{x}{2}\right)$ *d'un paramètre* $\lambda = \dfrac{\pi^2}{4}$ *et d'un noyau* $\mathcal{K}(t,s)$*. La substitution de la fonction y dans l'équation (2.4) nous donne :*

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi t}{2} - \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 \mathcal{K}(t,s) y(s)\, ds &= \sin \frac{\pi t}{2} - \frac{\pi^2}{4} \left(\int_0^t \mathcal{K}(t,s) y(s) ds + \int_t^1 \mathcal{K}(t,s) y(s)\, ds \right) \\ &= \sin \frac{\pi t}{2} - \frac{\pi^2}{4} \left(\int_0^t \frac{s(2-t)}{2} \sin \frac{\pi s}{2} ds + \int_t^1 \frac{t(2-s)}{2} \sin \frac{\pi s}{2} ds \right) \\ &= \sin \frac{\pi t}{2} - \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{2-t}{2} \int_0^t s \sin \frac{\pi s}{2} ds + \frac{t}{2} \int_t^1 (2-s) \sin \frac{\pi s}{2} ds \right) \\ &= \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

2.1.2 Équations intégrales non linéaires de Fredholm

Définition 2.1.2 *Soit* Ω *un ensemble mesurable de* $\mathbb{R}^n$*. Une équation intégrale de la forme :*

$$\alpha(t) y(t) = u(t, y(t)) + \lambda \int_\Omega \mathcal{G}(t,s,y(s))\, ds, \quad t \in \Omega \tag{2.5}$$

s'appelle équation intégrale non linéaire de Fredholm, où $\mathcal{G} : \Omega \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction donnée et* $y : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction inconnue à chercher. De plus,*

- *Si* $\alpha \equiv 0$*, l'équation (2.5) s'appelle équation intégrale non linéaire de Fredholm de premier espèce qui prend la forme :*

$$u(t, y(t)) + \lambda \int_\Omega \mathcal{G}(t,s,y(s))\, ds = 0, \quad t \in \Omega.$$

- *Si $\alpha \equiv 1$, l'équation (2.5) s'appelle équation intégrale non linéaire de Fredholm de seconde espèce de la forme :*

$$y(t) = u(t, y(t)) + \lambda \int_{\Omega} \mathcal{G}(t, s, y(s))\, ds, \quad t \in \Omega. \tag{2.6}$$

- *Si $\alpha(.)$ est donnée comme une fonction de t, alors l'équation (2.5) s'appelle équation intégrale non linéaire de Fredholm de troisième espèce.*

Remarque 2.2 *Si $u \equiv 0$, l'équation (2.6) prend la forme :*

$$y(t) = \lambda \int_{\Omega} \mathcal{G}(t, s, y(s))\, ds, \quad t \in \Omega$$

s'appelle équation intégrale non linéaire de Fredholm de seconde espèce homogène. Si $u \not\equiv 0$, on dit qu'elle est non homogène.

Exemple 2.1.2

1.) $y(t) = t + \lambda \int_0^1 tsy^2(s)\, ds.$

2.) $y(t) = \frac{5}{6}t + t \int_0^1 s^2 y^3(s)\, ds.$

3.) $y(t) = 1 - \frac{17}{3}t + \int_{-1}^1 t(y^2(s) + y^3(s))\, ds.$

2.2 Résolution des équations intégrales linéaires de Fredholm

On voit deux méthodes de résolution des équations intégrales linéaires de Fredholm, la première par les déterminants de Fredholm et la seconde par les noyaux dégénérés [3].

2.2.1 Méthode de déterminant de Fredholm

Considérons l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce suivante :

$$y(t) = u(t) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t, s) y(s)\, ds, \quad t \in [a, b]\,, \tag{2.7}$$

où le noyau $\mathcal{K} \in L^2([a,b] \times [a,b])$. On divise l'intervalle $[a,b]$ en n-parties :

$$t_1 = a = s_1, t_2 = a + h = s_2, \ldots, t_n = a + (n-1)h = s_n$$

avec $h = \dfrac{b-a}{n}$ le pas de discrétisation. Alors on a la formule d'approximation suivante :

$$\int_a^b \mathcal{K}(t,s)y(s)\,ds \simeq h \sum_{j=1}^{n} \mathcal{K}(t,t_j)y(t_j).$$

L'équation (2.7) prend alors la forme,

$$y(t) \simeq u(t) + \lambda h \sum_{j=1}^{n} \mathcal{K}(t,t_j)y(t_j) \tag{2.8}$$

En particulier, l'équation (2.8) est vérifié pour les n-points de division $t_i, i = 1, ..., n$, cela conduit au un système de n-équations :

$$y(t_i) = u(t_i) + \lambda h \sum_{j=1}^{n} \mathcal{K}(t_i,t_j)y(t_j), \quad i = 1, ..., n. \tag{2.9}$$

On pose :

$$y(t_i) = y_i,$$
$$u(t_i) = u_i,$$
$$\mathcal{K}(t_i,t_j) = \mathcal{K}_{ij}.$$

Donc le système (2.9) s'écrit comme suit,

$$y_i = u_i + \lambda h \sum_{j=1}^{n} \mathcal{K}_{ij} y_j \quad i = 1, ..., n \tag{2.10}$$

Les n-valeurs $y_1, y_2, ..., y_n$ obtenues par la résolution de la système (2.10) sont des solutions approchées de l'équation intégrale (2.7) aux points $t_1, t_2, ..., t_n$. Le déterminant du système (2.10) est donné par,

$$\Delta_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda h\mathcal{K}_{11} & -\lambda h\mathcal{K}_{12} & \cdots & -\lambda h\mathcal{K}_{1n} \\ -\lambda h\mathcal{K}_{21} & 1 - \lambda h\mathcal{K}_{22} & \cdots & -\lambda h\mathcal{K}_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda h\mathcal{K}_{n1} & -\lambda h\mathcal{K}_{n2} & \cdots & 1 - \lambda h\mathcal{K}_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.11}$$

Les valeurs propres approchées sont obtenues par résoudre l'équation $\Delta_n(\lambda) = 0$.

On écrit le déterminant (2.11) en puissances de $-\lambda h$:

$$\begin{aligned}\Delta_n(\lambda) = \; & 1 - \lambda h \sum_{r=1}^{2} \mathcal{K}_{rr} + \frac{(-\lambda h)^2}{2!} \sum_{p,q=1}^{2} \begin{vmatrix} \mathcal{K}_{pp} & \mathcal{K}_{pq} \\ \mathcal{K}_{qp} & \mathcal{K}_{qq} \end{vmatrix} \\ & + \frac{(-\lambda h)^3}{3!} \sum_{p,q,r=1}^{3} \begin{vmatrix} \mathcal{K}_{pp} & \mathcal{K}_{pq} & \mathcal{K}_{pr} \\ \mathcal{K}_{qp} & \mathcal{K}_{qq} & \mathcal{K}_{pr} \\ \mathcal{K}_{rp} & \mathcal{K}_{rq} & \mathcal{K}_{rr} \end{vmatrix} + \cdots \\ & + \frac{(-\lambda h)^n}{n!} \sum_{p_1,p_2,\ldots,p_n=1}^{n} \begin{vmatrix} \mathcal{K}_{p_1,p_1} & \mathcal{K}_{p_1,p_2} & \cdots & \mathcal{K}_{p_1,p_n} \\ \mathcal{K}_{p_2,p_1} & \mathcal{K}_{p_2,p_2} & \cdots & \mathcal{K}_{p_2,p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}_{p_n,p_1} & \mathcal{K}_{p_n,p_2} & \cdots & \mathcal{K}_{p_n,p_n} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Lorsque $n \to \infty$, chaque terme de la somme (2.12) tend vers une intégrale simple, double, triple, $\cdots$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \Delta_n(\lambda) = \; & 1 - \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t,t)\,dt + \frac{(-\lambda h)^2}{2!} \int_a^b \int_a^b \mathcal{K} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix} dt_1\,dt_2 \\ & + \frac{(-\lambda h)^3}{3!} \int_a^b \int_a^b \int_a^b \mathcal{K} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{pmatrix} dt_1\,dt_2\,dt_3 \\ & + \cdots + \frac{(-\lambda h)^n}{n!} \int_a^b \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \mathcal{K} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \cdots t_n \\ t_1 & t_2 & t_3 \cdots t_n \end{pmatrix} dt_1\,dt_2\,dt_3 \cdots dt_n \end{aligned} \tag{2.13}$$

où

$$\begin{vmatrix} \mathcal{K}_{t_1,s_1} & \mathcal{K}_{t_1,s_2} & \cdots & \mathcal{K}_{t_1,s_n} \\ \mathcal{K}_{t_2,s_1} & \mathcal{K}_{t_2,s_2} & \cdots & \mathcal{K}_{t_2,s_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}_{t_n,s_1} & \mathcal{K}_{t_n,s_2} & \cdots & \mathcal{K}_{t_n,s_n} \end{vmatrix} = \mathcal{K} \begin{pmatrix} t_1, t_2, \cdots, t_n \\ s_1, s_2, \cdots, s_n \end{pmatrix}.$$

Fredholm a déterminé que la série (2.13) converge vers $\Delta(\lambda)$ pour tout λ. La solution de l'équation (2.7) est donnée par la formule :

$$y(t) = u(t) + \lambda \int_a^b \mathcal{R}(t,s,\lambda) u(s)\,ds \tag{2.14}$$

où $\mathcal{R}(t,s,\lambda)$ est la résolvante de Fredholm définie par,

$$\mathcal{R}(t,s,\lambda)=\frac{\Delta(t,s,\lambda)}{\Delta(\lambda)},\quad \Delta(\lambda)\neq 0. \tag{2.15}$$

Les fonctions $\Delta(t,s,\lambda)$ et $\Delta(\lambda)$ sont respectivement le déterminant de Fredholm et le mineur de déterminant de Fredholm, et sont donnés par les formules suivantes (des séries en puissance de λ) :

$$\Delta(t,s,\lambda)=\mathcal{B}_0(t,s)+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n!}\mathcal{B}_n(t,s)\lambda^n \tag{2.16}$$

et

$$\Delta(\lambda)=\mathcal{C}_0+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n!}\mathcal{C}_n\lambda^n \tag{2.17}$$

où les $\mathcal{C}_n$ sont données par :

$$\mathcal{C}_0=1,$$

$$\mathcal{C}_n=\underbrace{\int_a^b\cdots\int_a^b}_{nfois}\begin{vmatrix}\mathcal{K}(t_1,t_1) & \mathcal{K}(t_1,t_2) & \cdots & \mathcal{K}(t_1,t_n)\\ \mathcal{K}(t_2,t_1) & \mathcal{K}(t_2,t_2) & \cdots & \mathcal{K}(t_2,t_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathcal{K}(t_n,t_1) & \mathcal{K}(t_n,t_2) & \cdots & \mathcal{K}(t_n,t_n)\end{vmatrix} dt_1\,dt_2\cdots dt_n \tag{2.18}$$

et

$$\mathcal{B}_0(t,s)=\mathcal{K}(t,s),$$

$$\mathcal{B}_n(t,s)=\underbrace{\int_a^b\cdots\int_a^b}_{nfois}\begin{vmatrix}\mathcal{K}(t,s) & \mathcal{K}(s,t_1) & \cdots & \mathcal{K}(s,t_n)\\ \mathcal{K}(t_1,s) & \mathcal{K}(t_1,t_1) & \cdots & \mathcal{K}(t_1,t_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathcal{K}(t_n,s) & \mathcal{K}(t_n,t_1) & \cdots & \mathcal{K}(t_n,t_n)\end{vmatrix} dt_1\,dt_2\cdots dt_n. \tag{2.19}$$

Si le noyau $\mathcal{K}(t,s)$ est borné, ou si $\int_a^b\int_a^b\left|\mathcal{K}(t,s)\right|^2 dtds<\infty$, alors les déterminants (2.16) et (2.17) convergent pour tout λ, et la résolvante $\mathcal{R}(t,s,\lambda)$ est une fonction analytique sauf aux valeurs λ où $\Delta(\lambda)=0$. L'application direct de cette méthode est possible pour des exemples rares.

Remarque 2.3 *On peut déduire les $\mathcal{B}_n(t,s)$, en utilisant le lemme suivant*

Lemme 2.2.1 *Pour l'équation intégrale,*

$$y(t) = u(t) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t,s)y(s)ds, \quad t \in [a,b] \tag{2.20}$$

la résolvante $\mathcal{R}(t,s,\lambda)$ vérifie l'équation intégrale suivante

$$\mathcal{R}(t,s,\lambda) = \mathcal{K}(t,s) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t,x)\mathcal{R}(x,s,\lambda)\,dx. \tag{2.21}$$

D'après ce lemme, et la relation (2.15), on a,

$$\Delta(t,s,\lambda) = \Delta(\lambda)\mathcal{K}(t,s) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t,x)\Delta(x,s,\lambda)\,ds. \tag{2.22}$$

d'après (2.16) et (2.17) et par l'identification terme à terme de même puissance λ, on obtient,

$$\mathcal{B}_n(t,s) = \mathcal{C}_n\mathcal{K}(t,s) - n\int_a^b \mathcal{K}(t,x)\mathcal{B}_{n-1}(x,s)\,dx, \quad n \geq 1. \tag{2.23}$$

Cette relation de récurrence est plus applicable que la formule (2.19).

D'après la formule (2.19) on a,

$$\mathcal{B}_{n-1}(s,s) = \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{(n-1)fois} \begin{vmatrix} \mathcal{K}(s,s) & \mathcal{K}(s,t_1) & \cdots & \mathcal{K}(s,t_{n-1}) \\ \mathcal{K}(t_1,s) & \mathcal{K}(t_1,t_1) & \cdots & \mathcal{K}(t_1,t_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}(t_{n-1},s) & \mathcal{K}(t_{n-1},t_1) & \cdots & \mathcal{K}(t_{n-1},t_{n-1}) \end{vmatrix} dt_1\,dt_2\cdots dt_{n-1} \tag{2.24}$$

on intègre par rapport à s on obtient,

$$\int_a^b \mathcal{B}_{n-1}(s,s)\,ds = \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{nfois} \begin{vmatrix} \mathcal{K}(s,s) & \mathcal{K}(s,t_1) & \cdots & \mathcal{K}(s,t_{n-1}) \\ \mathcal{K}(t_1,s) & \mathcal{K}(t_1,t_1) & \cdots & \mathcal{K}(t_1,t_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}(t_n,s) & \mathcal{K}(t_n,t_1) & \cdots & \mathcal{K}(t_n,t_{n-1}) \end{vmatrix} dt_1\,dt_2\cdots dt_{n-1}\,ds = \mathcal{C}_n \tag{2.25}$$

donc :

$$\mathcal{C}_n = \int_a^b \mathcal{B}_{n-1}(s,s)\,ds, \quad n \geq 1.$$

Nous avons des exemples.

Exemple 2.2.1 *Considérons l'équation intégrale suivante,*

$$y(t) = u(t) + \lambda \int_0^1 (t+s)y(s)\,ds, \quad t \in [0,1]. \tag{2.26}$$

$$\mathcal{R}(t,s,\lambda) = \frac{\Delta(t,s,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

où

$$\Delta(t,s,\lambda) = \mathcal{B}_0(t,s) + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n!}\mathcal{B}_n(t,s)\lambda^n,$$

$$\Delta(\lambda) = \mathcal{C}_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n!}\mathcal{C}_n(\lambda)\lambda^n$$

et $\mathcal{B}_0(t,s) = t+s$, $\mathcal{C}_0 = 1$. *Pour déterminer les* $\mathcal{B}_n(t,s)$ *et les* $\mathcal{C}_n$ *pour* $n \geq 1$, *on utilise les formules suivantes,*

$$\mathcal{B}_n(t,s) = \mathcal{C}_n\mathcal{K}(t,s) - n\int_0^1 \mathcal{K}(t,x)\mathcal{B}_{n-1}(x,s)\,dx, \tag{2.27}$$

et

$$\mathcal{C}_n = \int_0^1 \mathcal{B}_{n-1}(s,s)\,ds. \tag{2.28}$$

Alors, $\mathcal{C}_1 = \displaystyle\int_0^1 2s\,ds = 1$, $\mathcal{B}_1(t,s) = (t+s) - \int_0^1 (t+x)(x+s)\,dx = \frac{1}{2}(t+s) - ts - \frac{1}{3}$,

$\mathcal{C}_2 = \displaystyle\int_0^1 \left(s - s^2 - \frac{1}{3}\right) ds = -\frac{1}{6}$,

$\mathcal{B}_2(t,s) = -\frac{1}{6}(t+s) - 2\displaystyle\int_0^1 (t+x)\left[\frac{1}{2}(x+s) - xs - \frac{1}{3}\right] dx = 0.$

Tandis que $\mathcal{B}_2(t,s)$ *est nulle, alors d'après (2.27) et (2.28), les* $\mathcal{B}_n(t,s)$ *et les* $\mathcal{C}_n$ *sont nulles pour* $n \geq 3$. *D'où la résolvante est donnée par,*

$$\mathcal{R}(t,s,\lambda) = \frac{(t+s) - \left[\frac{1}{2}(t+s) - ts - \frac{1}{3}\right]\lambda}{1 - \lambda - \left(\frac{\lambda^2}{12}\right)}$$

et la solution de l'équation (2.26) s'écrit comme suit :

$$y(t) = u(t) + \lambda \int_0^1 \mathcal{R}(t,s,\lambda)u(s)\,ds.$$

Exemple 2.2.2 *Soit l'équation intégrale suivante,*

$$y(t) = 1 + \lambda \int_0^1 \sin(t+s) y(s)\, ds, \quad t \in [0,1]. \tag{2.29}$$

Dans ce cas, $\mathcal{B}_0(t,s) = \sin(t+s)$, $\mathcal{C}_0 = 1$,
$\mathcal{C}_1 = \int_0^1 \sin(2s)\, ds = 0$, $\mathcal{B}_1(t,s) = 0 - \int_0^1 \sin(t+x)\sin(x+s)\, dx = -\frac{\pi}{2}\cos(t-s)$,
$\mathcal{C}_2 = -\int_0^1 \frac{\pi}{2}\cos(0)\, ds = -\frac{\pi^2}{2}$,
$\mathcal{B}_2(t,s) = -\frac{\pi^2}{2}\sin(t+s) + 2\int_0^1 \frac{\pi}{2}\sin(t+x)\cos(x-s)\, dx = 0$.
D'où la résolvante est donnée par,

$$\mathcal{R}(t,s,\lambda) = \frac{\sin(t+s) + \frac{\pi}{2}\lambda\cos(t-s)}{1 - \frac{\pi^2}{4}\lambda}$$

et la solution de l'équation (2.29) est donnée par,

$$y(t) = 1 + \frac{2\lambda\cos(t) + \lambda^2\pi\sin(t)}{1 - \frac{\pi^2}{4}\lambda}.$$

2.2.2 Méthode pour le cas des noyaux dégénérés

Considérons l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce suivante :

$$y(t) = u(t) + \lambda \int_\Omega \mathcal{K}(t,s) y(s)\, ds, \quad t \in \Omega \tag{2.30}$$

où le noyau $\mathcal{K}(t,s)$ est de type dégénéré, c'est à dire,

$$\mathcal{K}(t,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) b_i(s). \tag{2.31}$$

Supposons que les fonctions $a_i(t)$ sont linéairement indépendantes. La substitution de (2.31) dans l'équation (2.30) donne :

$$y(t) = u(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \int_\Omega b_i(s) y(s)\, ds, \quad t \in \Omega. \tag{2.32}$$

On pose $C_i = \int_\Omega b_i(s) y(s) ds$. On utilise C_i et (2.32), il vient

$$y(t) = u(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i a_i(t) \tag{2.33}$$

et le problème revient à trouver les C_i. La substitution de (2.33) dans (2.32) donne :

$$u(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i a_i(t) = u(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \int_\Omega b_i(s) \left\{ u(s) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(s) \right\} ds.$$

En divisant par $\lambda \neq 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} C_i a_i(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \int_\Omega b_i(s) \left\{ u(s) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(s) \right\} ds,$$

c'est à dire,

$$\sum_{i=1}^{n} C_i a_i(t) - \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \int_\Omega b_i(s) \left\{ u(s) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(s) \right\} ds = 0,$$

donc :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(t) \left\{ C_i - \int_\Omega b_i(s) \left\{ u(s) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(s) \right\} ds \right\} = 0.$$

Comme les fonctions $a_i(t)$ sont linéairement indépendantes, alors on a

$$\forall i = 1, ..., n, \quad C_i - \int_\Omega b_i(s) \left\{ u(s) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(s) \right\} ds = 0. \tag{2.34}$$

Si on pose

$$\begin{cases} f_i = \displaystyle\int_\Omega b_i(s) u(s)\, ds, \\ a_{ik} = \displaystyle\int_\Omega b_i(s) a_k(s)\, ds \end{cases}$$

l'équation (2.34) devient :

$$C_i - \int_\Omega b_i(s) u(s) ds - \sum_{k=1}^{n} \lambda C_k \int_\Omega b_i(s) a_k(s)\, ds = 0.$$

Cela implique que l'on a :

$$C_i - f_i - \sum_{k=1}^{n} \lambda C_k a_{ik} = 0,$$

et alors,

$$C_i - \sum_{k=1}^{n} \lambda C_k a_{ik} = f_i, \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Nous avons donc un système algébrique de n-équations linéaires à n inconnues C_i :

$$\begin{cases} (1 - \lambda a_{11}) C_1 - \lambda a_{12} C_2 - \cdots - \lambda a_{1n} C_n & = f_1 \\ -\lambda a_{21} C_1 + (1 - \lambda a_{22}) C_2 - \cdots - \lambda a_{2n} C_n & = f_2 \\ \vdots & \\ -\lambda a_{n1} C_1 - \lambda a_{n2} C_2 - \cdots + (1 - \lambda a_{nn}) C_n & = f_n \end{cases}$$

qui s'écrit sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1-\lambda a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

ou

$$D(\lambda).C = F$$

dont le déterminant est :

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Si $\Delta(\lambda) \neq 0$, alors le système admet une seule solution donnée, pour $j = 1, ..., n$, par la formule de Cramer :

$$C_j = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & \cdots & -\lambda a_{1,j-1} & f_1 & -\lambda a_{1,j+1} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \cdots & -\lambda a_{2,j-1} & f_2 & -\lambda a_{2,j+1} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & \cdots & -\lambda a_{n,j-1} & f_n & -\lambda a_{n,j+1} & \cdots & -\lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

et par conséquent, la solution de l'équation (2.30) est donnée par :

$$y(t) = u(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i a_i(t).$$

Exemple 2.2.3 *Considérons l'équation intégrale suivante :*

$$y(t) = t + \lambda \int_0^1 (ts^2 + t^2 s) y(s) ds, \quad t \in [0, 1]. \tag{2.35}$$

Le noyau $\mathcal{K}(t, s) = ts^2 + t^2 s$ est dégénéré. La solution de cette équation s'écrit sous la forme,

$$y(t) = t + \lambda C_1 t + \lambda C_2 t^2, \tag{2.36}$$

où

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_0^1 s^2 y(s)\,ds, \\ C_2 &= \int_0^1 s y(s)\,ds. \end{aligned} \tag{2.37}$$

En utilisant (2.36) et (2.37), on obtient le système :

$$\begin{cases} (1-\frac{1}{4}\lambda)C_1 - \frac{1}{5}\lambda C_2 = \frac{1}{4}, \\ -\frac{1}{3}\lambda C_1 + (1-\frac{1}{4}\lambda)C_2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Le déterminant $\Delta(\lambda)$ est nul si $240 - 120\lambda - \lambda^2 = 0$, par conséquent les valeurs propres sont $\lambda_1 = \dfrac{-120+\sqrt{15360}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{-120-\sqrt{15360}}{2}$. Si λ est égale à l'une de ces valeurs, l'équation homogène admet une solution non trivial, tandis que l'équation intégrale (2.35) est, en générale, insoluble. Si λ diffère de ces valeurs, la solution du système ci-dessus est :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{60+\lambda}{240-120\lambda-\lambda^2}, \\ C_2 &= \frac{80}{240-120\lambda-\lambda^2}. \end{aligned}$$

En porte ces valeurs en (2.36), on obtient la solution de l'équation (2.35) :

$$y(t) = \frac{(240-60\lambda)t + 80\lambda t^2}{240-120\lambda-\lambda^2}.$$

Exemple 2.2.4 *Soit l'équation intégrale suivante,*

$$y(t) = u(t) + \lambda \int_0^{2\pi} (\sin t \cos s) y(s)\,ds, \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{2.38}$$

Le noyau $\mathcal{K}(t,s) = \sin t \cos s$ est dégénéré. La solution de cette équation est donnée par,

$$y(t) = u(t) + \lambda C \sin t \tag{2.39}$$

où $C = \displaystyle\int_0^{2\pi} (\cos s) y(s)\,ds$. Multipliant l'équation (2.39) par $\cos t$, et intégrant de 0 à 2π, on obtient,

$$C = \int_0^{2\pi} (\cos s) u(s)\,ds. \tag{2.40}$$

D'où, d'après (2.39) et (2.40), on a la solution de l'équation (2.38) :

$$y(t) = u(t) + \lambda \sin t \int_0^{2\pi} (\cos s) y(s)\,ds.$$

2.3 Résolution des équations intégrales non linéaires de Fredholm

On présentera deux méthodes de résolution des équations intégrales non linéaires de Fredholm, une méthodes de calcul direct et une méthode de solution en série [7].

2.3.1 Méthode de calcul direct

Considérons l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de seconde espèce de la forme,

$$y(t) = u(t, y(t)) + \lambda \int_{\Omega} \mathcal{K}(t, s)\mathcal{F}(s, y(s))\, ds, \quad t \in \Omega. \tag{2.41}$$

Cette méthode est appliquée pour ce type d'équation intégrale non linéaire où le noyau $\mathcal{K}(t, s)$ est séparable :

$$\mathcal{K}(t, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) b_i(s). \tag{2.42}$$

La substitution de (2.42) dans (2.41) donne :

$$\begin{aligned} y(t) \quad &= u(t, y(t)) + \lambda \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(t) b_i(s) \right) \mathcal{F}(s, y(s))\, ds \\ &= u(t, y(t)) + \lambda a_1(t) \int_{\Omega} b_1(s)\mathcal{F}(s, y(s))\, ds + \lambda a_2(t) \int_{\Omega} b_2(s)\mathcal{F}(s, y(s))\, ds \\ &+ \cdots + \lambda a_n(t) \int_{\Omega} b_n(s)\mathcal{F}(s, y(s))\, ds \end{aligned} \tag{2.43}$$

On pose

$$\alpha_i = \int_{\Omega} b_i(s)\mathcal{F}(s, y(s))\, ds, \quad i = 1, ..., n. \tag{2.44}$$

Alors l'équation (2.43) devient :

$$y(t) = u(t, y(t)) + \lambda a_1(t)\alpha_1 + \lambda a_2(t)\alpha_2 + \cdots + \lambda a_n(t)\alpha_n. \tag{2.45}$$

La substitution de l'équation (2.45) dans (2.44) donne un système algébrique de n-équations :

$$\alpha_i = \int_{\Omega} b_i(s)\mathcal{F}\left(s, u(s, y(s)) + \lambda a_1(s)\alpha_1 + \lambda a_2(s)\alpha_2 + \cdots + \lambda a_n(s)\alpha_n\right) ds, \quad i = 1, ..., n$$

et le problème ramène à trouver les α_i.

On donne des exemples.

Exemple 2.3.1 *Soit l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de seconde espèce :*

$$y(t) = a + \lambda \int_0^1 y^2(s)\,ds, \quad t \in [0,1], \quad a > 0. \tag{2.46}$$

On pose

$$\alpha = \int_0^1 y^2(s)\,ds. \tag{2.47}$$

Par conséquent, l'équation (2.46) s'écrit comme suit

$$y(t) = a + \lambda\alpha. \tag{2.48}$$

Pour déterminer la valeur de α, on substitut (2.48) dans (2.47) à obtenir

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^1 (a + \lambda\alpha)^2(s)\,ds \\ &= \frac{1}{2}\left(a^2 + \lambda^2\alpha^2 + 2a\lambda\alpha\right) \end{aligned}$$

et donc,

$$\lambda^2\alpha^2 + (2a\lambda - 1)\alpha + a^2 = 0. \tag{2.49}$$

Si $0 < \lambda < \dfrac{1}{4a}$, l'équation (2.49) admet deux solution réels données par :

$$\alpha = \frac{(1 - 2a\lambda) \pm \sqrt{1 - 4a\lambda}}{2\lambda}.$$

Donc les deux solutions de l'équation (2.46) sont,

$$y(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a\lambda}}{2\lambda}.$$

Exemple 2.3.2 *Considérons l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de seconde espèce :*

$$y(t) = t + \lambda \int_0^1 tsy^2(s)\,ds, \quad t \in [0,1]. \tag{2.50}$$

La solution est donnée de la forme,

$$y(t) = (1 + \lambda\alpha)t \tag{2.51}$$

où

$$\alpha = \int_0^1 sy^2(s)\,ds. \tag{2.52}$$

En utilisant (2.51) et (2.52), on obtient,

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^1 (1+\lambda\alpha)^2 s^3\,ds, \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\lambda^2}{4}\alpha^2 + \frac{\lambda}{2}\alpha, \\ 0 &= \frac{\lambda^2}{4}\alpha^2 + (\frac{\lambda}{2} - 1)\alpha + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Si $0 < \lambda < 1$, *on a,*

$$\alpha = \frac{(4-2\lambda) \pm 4\sqrt{1-\lambda}}{2\lambda^2}. \tag{2.53}$$

On substitut (2.53) en (2.51), on trouve,

$$y(t) = \left(\frac{2 \pm 2\sqrt{1-\lambda}}{\lambda}\right) t.$$

2.3.2 Méthode de solution en série

Soit l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de seconde espèce,

$$y(t) = u(t, y(t)) + \lambda \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s, y(s))\,ds, \quad t \in \Omega. \tag{2.54}$$

On rappelle, de façon formelle, la série de Taylor pour y au voisinage de 0 est donnée par la formule :

$$T\left[y(t)\right] = \sum_{n\geq 0} a_n t^n. \tag{2.55}$$

De façon formelle, la substitution de l'équation (2.55) dans (2.54) donne,

$$\sum_{n\geq 0} a_n t^n = T\left[u(t, \sum_{n\geq 0} a_n t^n)\right] + \lambda \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}\left(s, \sum_{n\geq 0} a_n t^n\right) ds \tag{2.56}$$

où $T\left[u(t, \sum_{n\geq 0} a_n t^n)\right]$ est la série de Taylor pour $u(t, y(t))$. L'équation (2.56) peut être s'écrire comme suit,

$$a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + \cdots = T\left[u(t, y(t))\right] + \lambda \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}\left(s, a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n + \cdots\right) ds. \tag{2.57}$$

On remarque que le seconde membre de l'équation (2.57) s'exprime en série de t^n, et par l'identification terme à terme de même puissance t^n, on trouve les coefficients a_n.
Finalement, on substitut les a_n dans l'équation (2.55), on obtient la solution de l'équation intégrale (2.54).
Nous avons les deux exemples suivants.

Exemple 2.3.3 *Soit l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de seconde espèce :*

$$y(t) = 1 + \frac{7159}{7560}t + \frac{2309}{2160}t^2 + \frac{1}{36}\int_0^1 (ts^2 - t^2 s)y^2(s)\,ds, \quad t \in [0,1]\,. \tag{2.58}$$

En utilisant (2.55), l'équation (2.58) devient :

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots \quad &= 1 + \frac{7159}{7560}t + \frac{2309}{2160}t^2 \\ &+ \frac{1}{36}\int_0^1 (ts^2 - t^2 s)(a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n + \cdots)^2\,ds. \end{aligned} \tag{2.59}$$

On intègre le seconde membre de l'équation (2.59), et on identifie les coefficients terme à terme, on obtient,

$$\begin{aligned} a_0 &= 1,1 \\ a_1 &= 3611.190273,1 \\ a_2 &= -4848.332424,1 \\ a_n &= 0, \quad \textit{pour } n \geq 3. \end{aligned}$$

Donc, les fonctions

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 1 + t + t^2, \\ y_2(t) &= 1 + 3611.190273t - 4848.332424t^2. \end{aligned}$$

sont des solutions de l'équation (2.58).

Exemple 2.3.4 *Considérons l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de seconde espèce :*

$$y(t) = e^t + \frac{1}{16}(3 - e^2) + \frac{1}{4}\int_0^1 (t - s)y^2(s)\,ds, \quad t \in [0,1]. \tag{2.60}$$

En substituant (2.55) dans l'équation (2.60), on obtient,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots \quad &= e^t + \frac{1}{16}(3 - e^2) \\ &+ \frac{1}{4}\int_0^1 (t-s)(a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n + \cdots)^2 ds. \end{aligned} \tag{2.61}$$

D'où,

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2!}, a_3 = \frac{1}{3!}, ..., a_n = \frac{1}{n!}, ...$$

donc la solution est donnée par,

$$y(t) = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots$$

Par conséquent, la solution exacte de l'équation (2.60) est $y(t) = e^t$.

Chapitre 3

Existence et unicité d'une solution continue et bornée d'une équation intégrale de type Hammerstein

Dans ce chapitre nous sommes intéressés à étudier l'existence et l'unicité d'une solution bornée et continue d'une equation intégrale non linéaire de type Fredholm-Hammerstein [2] en utilisant le théorème de point fixe.

Considérons les équations intégrales de type Fredholm-Hammerstein de la forme suivante :

$$y(t) = u\left(t, y(t)\right) + \int_{\Omega} \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}\left(s, y(s)\right) ds, \quad t \in \Omega \tag{3.1}$$

où Ω est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ d'une mesure de Lebesgue notée $\lambda\left(\Omega\right)$, $\mathcal{F}\left(.,.\right), u\left(.,.\right) : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{K}\left(.,.\right) : \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données dépendant de y, et $y\left(.\right) : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction inconnue à chercher solution de l'équation (3.1).

3.1 Premier théorème d'existence et d'unicité d'une solution continue et bornée

Dans cette section, nous utilisons le théorème de point fixe de Banach pour montrer l'existence et de même l'unicité d'une solution continue et bornée de l'équation intégrale de type Hammerstein,

$$y(t) = u\left(t, y(t)\right) + \int_{\Omega} \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}\left(s, y(s)\right) ds, \quad t \in \Omega. \tag{3.2}$$

On suppose que, $u\left(.,.\right) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $\Omega \times \mathbb{R}$, $u\left(.,0\right)$ est borné sur Ω, et vérifie pour $b_1 \in L^{\infty}\left(\Omega\right)$, la condition suivante :

$$\left|u\left(t,x\right) - u\left(t,y\right)\right| \leq b_1(t)|x-y|, \tag{3.3}$$

$\mathcal{F}\left(.,.\right) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable sur $\Omega \times \mathbb{R}$, telle que $\mathcal{F}\left(.,0\right) \in L^{\infty}\left(\Omega\right)$ et :

$$\left|\mathcal{F}\left(t,x\right) - \mathcal{F}\left(t,y\right)\right| \leq b_2(t)|x-y| \tag{3.4}$$

où $b_2 : \Omega \to \mathbb{R}_+$ est une fonction mesurable, de plus, $\mathcal{K}\left(.,s\right) : \Omega \to \mathbb{R}$ est continue pour p.p. $s \in \Omega$, $\mathcal{K}\left(t,.\right) : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable pour p.p. $t \in \Omega$ et il existe une fonction $g \in L^1\left(\Omega\right)$ telle que,

$$\forall t \in \Omega, \left|\mathcal{K}\left(t,s\right)\right| \leq g(s), \quad p.p.\ s \in \Omega. \tag{3.5}$$

En outre,

$$b = \|b_1\|_{\infty} + \int_{\Omega} g(s)b_2(s)\,ds < 1. \tag{3.6}$$

Théorème 3.1.1 *Sous les hypothèses ci-dessus, l'équation (3.2) admet une solution unique dans $\mathcal{C}_a\left(\Omega\right)$.*

Preuve. On pose :

$$a = \frac{\|u\left(.,0\right)\|_{\infty} + \int_{\Omega} g(s)\mathcal{F}\left(s,0\right) ds}{1-b}$$

et on définit l'opérateur :

$$\begin{aligned} T: \quad & \mathcal{C}_a(\Omega) \to \mathcal{C}_a(\Omega) \\ & y \to Ty \end{aligned}$$

où $Ty(t) = u(t, y(t)) + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s, y(s))\, ds$. Alors, l'équation (3.2) peut être écrire de la forme :

$$Ty = y \tag{3.7}$$

et le problème ramène à trouver les solutions de l'équation (3.7).

Tout d'abord, on montre que l'opérateur T est bien défini. Soit $y \in \mathcal{C}_a(\Omega)$. Comme $u(.,.)$ est continue sur $\Omega \times \mathbb{R}$, il suffit de montrer la continuité de $t \mapsto \int_\Omega \mathcal{K}(.,s)\mathcal{F}(s, y(s))\, ds$ sur Ω pour déduire la continuité de Ty. Soit $\{t_n\}$ une suite converge vers t dans Ω. On a

$$\begin{aligned} & \left| \int_\Omega \mathcal{K}(t_n, s)\, \mathcal{F}(s, y(s))\, ds - \int_\Omega \mathcal{K}(t, s)\, \mathcal{F}(s, y(s))\, ds \right| \\ &= \left| \int_\Omega \left(\mathcal{K}(t_n, s) - \mathcal{K}(t, s)\right) \mathcal{F}(s, y(s))\, ds \right| \\ &\leq \int_\Omega \left| \left(\mathcal{K}(t_n, s) - \mathcal{K}(t, s)\right) \right| \left| \mathcal{F}(s, y(s)) - \mathcal{F}(s, 0) + \mathcal{F}(s, 0) \right| ds \\ &\leq \int_\Omega \left| \left(\mathcal{K}(t_n, s) - \mathcal{K}(t, s)\right) \right| \left(\left| \mathcal{F}(s, y(s)) - \mathcal{F}(s, 0) \right| + \left| \mathcal{F}(s, 0) \right| \right) ds. \end{aligned}$$

Par (3.4), et le fait que $\mathcal{F}(., 0) \in L^\infty(\Omega)$,on obtient,

$$\begin{aligned} & \left| \int_\Omega \left(\mathcal{K}(t_n, s) - \mathcal{K}(t, s)\right) \mathcal{F}(s, y(s))\, ds \right| \\ &\leq \int_\Omega \left| \left(\mathcal{K}(t_n, s) - \mathcal{K}(t, s)\right) \right| \left(b_2(s)|y(s)| + \left| \mathcal{F}(s, 0) \right| \right) ds \\ &\leq \int_\Omega \left| \left(\mathcal{K}(t_n, s) - \mathcal{K}(t, s)\right) \right| \left(b_2(s)\|y\|_\infty + \left| \mathcal{F}(s, 0) \right| \right) ds \\ &\leq \int_\Omega \left| \left(\mathcal{K}(t_n, s) - \mathcal{K}(t, s)\right) \right| \left(a b_2(s) + \left| \mathcal{F}(s, 0) \right| \right) ds \\ &\leq \int_\Omega \left| \left(\mathcal{K}(t_n, s) - \mathcal{K}(t, s)\right) \right| \left(a b_2(s) + \left\| \mathcal{F}(., 0) \right\|_\infty \right) ds. \end{aligned}$$

On utilise (3.5), (3.6), la continuité de $\mathcal{K}(., s)$ et le fait que $g \in L^1(\Omega)$, on déduit en appliquant le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \int_\Omega \mathcal{K}(t_n, s)\mathcal{F}(s, y(s))\, ds - \int_\Omega \mathcal{K}(t, s)\mathcal{F}(s, y(s))\, ds \right| = 0,$$

par conséquent $\int_\Omega \mathcal{K}(.,s)\mathcal{F}(s,y(s))\,ds$ est continue sur Ω, d'où la continuité de Ty.
Montrons que $\|Ty\|_\infty \leq a$. On a :

$$\begin{aligned}\left|Ty(t)\right| &= \left|u(t,y(t)) + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s,y(s))\,ds\right| \\ &\leq \left|u(t,y(t))\right| + \left|\int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s,y(s))\,ds\right| \\ &\leq \left|u(t,y(t)) - u(t,0) + u(t,0)\right| + \int_\Omega \left|\mathcal{K}(t,s)\right|\left|\mathcal{F}(s,y(s))\right| ds \\ &\leq \left|u(t,y(t)) - u(t,0)\right| + \left|u(t,0)\right| + \int_\Omega \left|\mathcal{K}(t,s)\right|\left|\mathcal{F}(s,y(s))\right| ds\end{aligned}$$

En utilisant (3.3), (3.5) et (3.4) on trouve :

$$\begin{aligned}\left|Ty(t)\right| &= \left|u(t,y(t)) + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s,y(s))\,ds\right| \\ &\leq b_1(t)|y(t)| + \left|u(t,0)\right| + \int_\Omega g(s)\left|\mathcal{F}(s,y(s)) - \mathcal{F}(s,0) + \mathcal{F}(s,0)\right| ds \\ &\leq b_1(t)\|y\|_\infty + \|u(t,0)\|_\infty + \int_\Omega g(s)\left|\mathcal{F}(s,y(s)) - \mathcal{F}(s,0)\right| + g(s)\left|\mathcal{F}(s,0)\right| ds \\ &\leq b_1(t)\|y\|_\infty + \left|u(t,0)\right| + \int_\Omega g(s)\left|\mathcal{F}(s,y(s)) - \mathcal{F}(s,0)\right| ds + \int_\Omega g(s)\left|\mathcal{F}(s,0)\right| ds\end{aligned}$$

De (3.4) et (3.6), il vient :

$$\begin{aligned}&\left|Ty(t)\right| \\ &\leq a\|b_1\|_\infty + \|u(.,0)\|_\infty + \int_\Omega g(s)b_2(s)\|y\|_\infty ds + \int_\Omega g(s)\left|\mathcal{F}(s,0)\right| ds \\ &\leq a\left(\|b_1\|_\infty + \int_\Omega g(s)b_2(s)ds\right) + \|u(t,0)\|_\infty + \int_\Omega g(s)\left|\mathcal{F}(s,0)\right| ds \\ &= ab + \|u(t,0)\|_\infty + \int_\Omega g(s)\left|\mathcal{F}(s,0)\right| ds \qquad (3.8)\end{aligned}$$

On a d'après (3.6)

$$\begin{aligned}a - ab &= \|u(t,0)\|_\infty + \int_\Omega g(s)\mathcal{F}(s,0)\,ds \\ &\leq \|u(t,0)\|_\infty + \int_\Omega |g(s)\mathcal{F}(s,0)|\,ds \\ &= \|u(t,0)\|_\infty + \int_\Omega g(s)|\mathcal{F}(s,0)|\,ds\end{aligned}$$

alors : $ab = a - \|u(t,0)\|_\infty - \int_\Omega g(s)|\mathcal{F}(s,0)|\,ds$
La substitution direct de ab dans (3.8), nous donne que : $\left|Ty(t)\right| \leq a$. On conclut que T

est bien défini.

Maintenant, montrons que T est une contraction sur $\mathcal{C}_a(\Omega)$. Soient $x, y \in \mathcal{C}_a(\Omega)$. d'après (3.3), (3.4) et (3.5), On a :

$$\begin{aligned}
\left|Tx(t) - Ty(t)\right| &= \left|u(t,x(t)) - u(t,y(t)) + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\left(\mathcal{F}(s,x(s)) - \mathcal{F}(s,y(s))\right) ds\right| \\
&\leq |u(t,x(t)) - u(t,y(t))| + \int_\Omega \left|\mathcal{K}(t,s)\right| \left|\mathcal{F}(s,x(s)) - \mathcal{F}(s,y(s))\right| ds \\
&\leq b_1(t)|x(t) - y(t)| + \int_\Omega g(s)|x(s) - y(s)|b_2(s)\,ds \\
&\leq |b_1(t)|\|x-y\|_\infty + \|x-y\|_\infty \int_\Omega g(s)b_2(s)\,ds \\
&\leq \|x-y\|_\infty \underbrace{\left(\|b_1\|_\infty + \int_\Omega g(s)b_2(s)\,ds\right)}_{b<1} < \|x-y\|_\infty,
\end{aligned}$$

donc T est une contraction sur $\mathcal{C}_a(\Omega)$ qui est un espace métrique complet.

D'après le théorème de point fixe de Banach, l'équation intégrale (3.2) admet une seule solution $y \in \mathcal{C}_a(\Omega)$. ■

Nous donnons un exemple.

Exemple 3.1.1 *Considérons l'équation intégrale, pour tous $t \in [0,\infty[$ et $\alpha > 0$ une constante,*

$$y(t) = h(t) + \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+y^2(s))}{(1+s^2)(\alpha+t)} ds. \tag{3.9}$$

On observe que cette équation intégrale est de type Hammerstein d'une forme de l'équation (3.2) où $h(.)$ est une fonction bornée et continue sur $[0,\infty[$, $\mathcal{K}(t,s) = \dfrac{1}{(1+s^2)(\alpha+t)}$ et $\mathcal{F}(t,s) = \ln(1+s^2)$. Nous avons :

1)
- *$\mathcal{F}(t,s) = \ln(1+s^2)$ est une fonction mesurable car elle est continue.*
- $\mathcal{F}(t,0) = \ln(1) = 0 \in L^\infty([0,\infty[)$.
- $\left|\mathcal{F}(t,s_1) - \mathcal{F}(t,s_2)\right| = \left|\ln(1+s_1^2(s)) - \ln(1+s_2^2(s))\right| \leq |s_1 - s_2| = b_2(t)|s_1 - s_2|$, *avec* $b_2 = 1 \in L^\infty([0,\infty[)$.

2)
- *On a* $\mathcal{K}(t,s) = \dfrac{1}{1+s^2} \times \dfrac{1}{\alpha+t}$, *qui est une fonction continue sur* $\Omega \times \Omega$.

- $\left|\mathcal{K}(t,s)\right| = \dfrac{1}{1+s^2}\left|\dfrac{1}{\alpha+t}\right| \leq \dfrac{1}{\alpha(1+s^2)} = g(s), \quad \forall t,s \in [0,\infty[,$
  avec $g \in L^1[0,\infty)$, *car :*

$$\int_0^\infty \left|\frac{1}{\alpha(1+s^2)}\right| ds = \frac{1}{\alpha}\left[\arctan(s)\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2\alpha} < +\infty$$

3) • *On choisit* $\alpha > \frac{\pi}{2}$, *pour que* $b = \displaystyle\int_0^\infty g(s)\,ds < 1$.

D'après le Théorème 3.1.1 on déduit que l'équation (3.10) *admet une seule solution bornée* $y_\alpha(.) \in \mathcal{C}([0,\infty[)$.

3.2 Deuxième théorème d'existence d'une solution continue et bornée

Dans cette section nous étudions l'existence d'une solution continue et bornée d'une équation intégrale de type Hammerstein de la forme :

$$y(t) = v(t) + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s,y(s))\,ds, \quad t \in \Omega. \tag{3.10}$$

Supposons que $v(.) : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée et continue sur Ω, $\mathcal{K}(.,.) : \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction positive, $\mathcal{K}(t,.)$ est continue pour p.p. $t \in \Omega$ et il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour tout $t \in \Omega$, on a

$$\mathcal{K}(t,s)\,b_1(s) \leq g(s). \tag{3.11}$$

où $b_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable. $\mathcal{F}(.,.) : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable sur $\Omega\times\mathbb{R}$, continue par rapport à la deuxième variable, croissant par rapport à la deuxième variable et vérifie pour tout $t \in \Omega$:

$$v(t) + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s,0)\,ds \geq 0. \tag{3.12}$$

En outre, on suppose aussi que

$$|\mathcal{F}(t,x)| \leq b_1(t)\,b_2(x) \qquad p.p.\ (t,x) \in \Omega\times\mathbb{R} \tag{3.13}$$

où $b_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction mesurable. D'ailleurs, on suppose qu'il existe une constante $a > 0$ telle que,

$$\|v\|_\infty + \|g\|_1 \sup_{t\in[0,a]} b_2(t) \leq a. \tag{3.14}$$

Théorème 3.2.1 *Sous les hypothèses ci-dessus, l'équation intégrale* (3.10) *admet une solution dans* $\mathcal{C}_a(\Omega)$.

Preuve. Par récurrence, on définit la suite de fonctions suivante,

$$\begin{cases} y_{n+1}(t) &= Ty_n(t) = v(t) + \displaystyle\int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s, y_n(s))\, ds, \quad t \in \Omega, n \in \mathbb{N} \\ y_0 &= 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

où $T : \mathcal{C}_a(\Omega) \to \mathcal{C}_a(\Omega), y \mapsto Ty$ telle que $Ty(t) = v(t) + \displaystyle\int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s, y(s))\, ds$. De façon similaire à la preuve du Théorème 3.1.1, l'opérateur T est bien défini. Pour tout $t \in \Omega$, la suite $\{y_n(t)\}_n$ est converge vers $y(t) \in \mathbb{R}$, en effet, supposons que $y_{n+1}(t) \geq y_n(t)$, on a pour $n = 0$, en utilisant (3.12), que

$$\begin{aligned} y_1(t) &= v(t) + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s, y_0(s))\, ds \\ &= v(t) + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s, 0)\, ds \geq 0 = y_0 \end{aligned}$$

et on montre que $y_{n+2}(t) \geq y_{n+1}(t)$, d'après la croissance de $\mathcal{F}$ et le fait que $y_{n+1}(t) \geq y_n(t)$, on obtient,

$$\begin{aligned} y_{n+2}(t) &= v(t) + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s, y_{n+1}(s))\, ds \\ &\geq v(t) + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s, y_n(s))\, ds = y_{n+1}(t). \end{aligned}$$

D'autre part, d'après (3.13), (3.11) et (3.14) on a que

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) &= v(t) + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s, y_n(s))\, ds \\ &\leq |v(t)| + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s) \left|\mathcal{F}(s, y_n(s))\right| ds \\ &\leq |v(t)| + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s) b_1(s) b_2(y_n(s))\, ds \\ &\leq \|v\|_\infty + \int_\Omega g(s) b_2(y_n(s))\, ds \\ &\leq \|v\|_\infty + \sup_{x\in[0,a]} b_2(x) \int_\Omega g(s)\, ds \\ &\leq \|v\|_\infty + \sup_{x\in[0,a]} b_2(x) \leq \|g\|_1 \\ &\leq a. \end{aligned}$$

La suite $\{y_n(.)\}_n$ est croissante et majorée par la constante a, donc elle est convergente, et on a

$$\lim_{n\to\infty} y_{n+1}(t) = y(t) = v(t) + \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s, y_n(s))\, ds$$

d'après (3.13), la continuité de $\mathcal{F}$, la bornitude de $\mathcal{K}$ et le fait que g est intégrable sur Ω, on applique le théorème de convergence dominé, on trouve,

$$y(t) = v(t) + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s, y(s))\, ds.$$

Il suffit maintenant de montrer que $y(.) \in \mathcal{C}_a(\Omega)$. Soit $\{t_n\}$ une suite converge vers t dans Ω. En utilisant (3.13) et (3.11), on trouve,

$$\begin{aligned} |y(t_n) - y(t)| &= \left| v(t_n) - v(t) + \int_\Omega (\mathcal{K}(t_n,s) - \mathcal{K}(t,s))\, \mathcal{F}(s, y(s))\, ds \right| \\ &\leq |v(t_n) - v(t)| + \int_\Omega \left|\mathcal{K}(t_n,s) - \mathcal{K}(t,s)\right| \left|\mathcal{F}(s, y(s))\right| ds \\ &\leq |v(t_n) - v(t)| + \int_\Omega \left|\mathcal{K}(t_n,s) - \mathcal{K}(t,s)\right| (b_1(s) b_2(y(s)))\, ds \\ &\leq |v(t_n) - v(t)| + \sup_{x\in[0,a]} b_2(x) \int_\Omega \left|\mathcal{K}(t_n,s) - \mathcal{K}(t,s)\right| b_1(s) ds \end{aligned}$$

On applique le théorème de convergence dominé, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} |y(t_n) - y(t)| = 0.$$

Ce qui montre la continuité de $y(.)$ sur Ω. En utilisant (3.13), (3.11) et (3.14), on trouve,

$$\begin{aligned}
|y(t)| &= \left| v(t) + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s,y(s))\,ds \right| \\
&\leq |v(t)| + \int_\Omega \left| \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s,y(s)) \right| ds \\
&\leq \|v\|_\infty + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s) \left| \mathcal{F}(s,y(s)) \right| ds \\
&\leq \|v\|_\infty + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\,(b_1(s)b_2(y(s)))\,ds \\
&\leq \|v\|_\infty + \sup_{x\in[0,a]} b_2(x) \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)b_1(s)ds \\
&\leq \|v\|_\infty + \sup_{x\in[0,a]} b_2(x) \int_\Omega g(s)ds \\
&= \|v\|_\infty + \sup_{x\in[0,a]} b_2(x)\|g\|_1 \\
&\leq a.
\end{aligned}$$

Alors $\|y\|_\infty \leq a$. Donc $y(.) \in \mathcal{C}_a(\Omega)$ et on conclut que l'équation (3.10) admet une solution $y(.) \in \mathcal{C}_a(\Omega)$. ■

Exemple 3.2.1 *Considérons l'équation intégrale Hammerstein suivante :*

$$y(t) = v(t) + \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+y^2(s))}{(1+s^2)(\alpha+t)} ds, \quad t \in [0,\infty[\,. \tag{3.16}$$

C'est la même équation dans l'exemple (3.1.1), où $v(.)$ est une fonction bornée, continue et non négative sur $[0,\infty[$, $\mathcal{K}(t,s) = \dfrac{1}{(1+s^2)(\alpha+t)}$ et $\mathcal{F}(t,s) = \ln(1+s^2)$, donc d'après les hypothèses du théorème 3.2.1 on a,

1) • *$\mathcal{F}(.,.)$ est mesurable et continue sur $[0,\infty[$.*
   • *$\left|\mathcal{F}(t,s)\right| = \ln(1+s^2) = 1 \times b_2(s)$.*
   • *$\mathcal{F}(.,.)$ est croissante sur $[0,\infty[$.*

2) • *Pour tout $s,t \in [0,\infty[$ et $\alpha > 0$, $\mathcal{K}(t,s) \geq 0$.*
   • $\mathcal{K}(t,s)\,b_1(t) = \dfrac{1}{(1+s^2)(\alpha+t)} \times 1 \leq \dfrac{1}{\alpha(1+s^2)}$,
   telle que : $\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{1}{1+s^2}\right| ds = \frac{1}{\alpha}\Big[\arctan(s)\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2\alpha} < \infty$
   donc : $g(s) = \dfrac{1}{\alpha(1+s^2)} \in L^1[0,\infty[$.

   • *$\mathcal{K}(t,.)$ est continue pour p.p. $t \in \Omega$.*

3) *En outre on choisit* $a \geq 0$ *telle que* $\|v\|_\infty + \frac{\pi}{2\alpha}\left(\sup_{x\in[0,a)} b_2(x)\right) \leq a$.

Donc, d'après le Théorème 3.2.1, l'équation (3.10) admet une solution $y(.) \in \mathcal{C}_a(\Omega)$.

3.3 Troisième théorème d'existence d'une solution continue et bornée

Dans cette section on suppose, dans l'équation 3.2, que Ω est un compact de $\mathbb{R}^n$, $u(t,x) = v(t)$ est une fonction continue sur Ω,

$$y(t) = v(t) + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s,y(s))\,ds \tag{3.17}$$

$\mathcal{F}(.,.) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur $\Omega \times \mathbb{R}$ qui vérifie pour $b_1 \in L^1(\Omega)$ et $b_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable,

$$|\mathcal{F}(t,x)| \leq b_1(t)\, b_2(x), \quad (t,x) \in \Omega \times \mathbb{R} \tag{3.18}$$

et $\mathcal{K}(.,.) : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ est bornée et continue p.p. $t \in \Omega$. D'ailleurs, on suppose aussi qu'il existe une constante $a > 0$ telle que

$$\|v\|_\infty + \left(\sup_{t\in\Omega} \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\, b_1(s)\, \mathrm{ds}\right) \sup_{x\in[0,a]} b_2(x) \leq a. \tag{3.19}$$

Théorème 3.3.1 *Sous les hypothèses ci-dessus, l'équation (3.17) admet une solution dans* $\mathcal{C}_a(\Omega)$.

Preuve. On applique le théorème de Schauder pour montrer l'existence d'une solution de l'équation (3.17). On définit l'opérateur T de $\mathcal{C}_a(\Omega)$ dans lui même comme suit,

$$Ty(t) = v(t) + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s,y(s))\,ds.$$

Montrons que T satisfait aux conditions du théorème de Schauder.

Étape 1. On a d'après le Théorème 3.1.1, l'opérateur T est bien défini.

Étape 2. On montre que T est continue sur $(\mathcal{C}_a(\Omega), \|.\|_\infty)$. Soit $\{y_n(.)\} \subset \mathcal{C}_a(\Omega)$ une suite qui converge vers $y(.) \in \mathcal{C}_a(\Omega)$. Comme $\mathcal{K}$ est bornée, on obtient,

$$\begin{aligned} \left|Ty_n(t) - Ty(t)\right| &= \left|\int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\left(\mathcal{F}(s,y_n(s)) - \mathcal{F}(s,y(s))\right)\mathrm{ds}\right| \\ &\leq \sup_{t,s\in\Omega}\left|\mathcal{K}(t,s)\right| \int_\Omega \left|\mathcal{F}(s,y_n(s)) - \mathcal{F}(s,y(s))\right|\mathrm{ds}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

La fonction $\mathcal{F}$ est continue sur $\Omega \times \mathbb{R}$, alors elle est uniformément continue sur le compact $\Omega \times [-a,a]$, donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \geq n_0, \quad \sup_{t\in\Omega}\left|\mathcal{F}(t,y_n(t)) - \mathcal{F}(t,y(t))\right| < \epsilon.$$

et on peut écrire :

$$\sup_{t\in\Omega}\left|\mathcal{F}(t,y_n(t)) - \mathcal{F}(t,y(t))\right| \leq \frac{\epsilon}{1+\lambda(\Omega)\sup\limits_{t,s\in\Omega}\left|\mathcal{K}(t,s)\right|}.$$

D'où, pour tout $n \geq n_0$ et tout $t \in \Omega$, il vient

$$\begin{aligned} \left|Ty_n(t) - Ty(t)\right| &\leq \sup_{t,s\in\Omega}\left|\mathcal{K}(t,s)\right|\left(\sup_{t\in\Omega}\left|\mathcal{F}(t,y_n(t)) - \mathcal{F}(t,y(t))\right|\right)\int_\Omega d\lambda \\ &\leq \sup_{t,s\in\Omega}\left|\mathcal{K}(t,s)\right|\left(\lambda(\Omega)\frac{\epsilon}{1+\lambda(\Omega)\sup\limits_{t,s\in\Omega}\left|\mathcal{K}(t,s)\right|}\right) \\ &= \frac{\lambda(\Omega)\sup\limits_{t,s\in\Omega}\left|\mathcal{K}(t,s)\right|}{1+\lambda(\Omega)\sup\limits_{t,s\in\Omega}\left|\mathcal{K}(t,s)\right|}\epsilon \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Donc la suite $Ty_n(.)$ converge vers $Ty(.)$ dans $(\mathcal{C}_a(\Omega), \|.\|_\infty)$, et alors T est continue.

Étape 3. On applique le théorème d'Arzela-Ascoli :

$$\mathtt{F} = \{Ty, y \in \mathcal{C}_a(\Omega)\}$$

$\mathtt{F}_t$ est borné : Soient $y \in \mathcal{C}_a(\Omega), t \in \Omega$. D'après (3.18) et (3.19), on obtient,

$$\begin{aligned}
\left|Ty(t)\right| &= \left|v(t) + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s)\mathcal{F}(s,y(s))\,ds\right| \\
&\leq |v(t)| + \int_\Omega \left|\mathcal{K}(t,s)\right| \left|\mathcal{F}(s,y(s))\right| ds \\
&\leq \|v\|_\infty + \int_\Omega \mathcal{K}(t,s) b_1(s) b_2(y(s))\, ds \\
&\leq \|v\|_\infty + \sup_{x\in[0,a]} b_2(x) \int_\Omega \mathcal{K}(t,s) b_1(s)\, ds \\
&\leq a.
\end{aligned}$$

Donc $\mathtt{F}_t$ est borné.

$\mathtt{F}$ est équicontinu : Soit $y \in \mathcal{C}_a(\Omega), t_1, t_2 \in \Omega$. En utilisant (3.18), il vient

$$\begin{aligned}
\left|Ty(t_1) - Ty(t_2)\right| &\leq \left|v(t_1) - v(t_2)\right| + \int_\Omega \left|\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t_2,s)\right| \left|\mathcal{F}(s,y(s))\right| ds \\
&\leq \left|v(t_1) - v(t_2)\right| + \int_\Omega \left|\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t_2,s)\right| b_1(s) b_2(y(s))\, ds \\
&\leq \left|v(t_1) - v(t_2)\right| + \sup_{x\in[0,a]} b_2(x) \int_\Omega \left|\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t_2,s)\right| b_1(s)\, ds
\end{aligned}$$

comme v et $\mathcal{K}(.,s)$ sont continues sur Ω qui est compact alors elles sont uniformément continues, donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que si $\|t_1 - t_2\| < \delta$ on a

$$\left|v(t_1) - v(t_2)\right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

et

$$\left|\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t_2,s)\right| \leq \frac{\epsilon}{2 \sup\limits_{x\in[0,a]} b_2(x) \int_\Omega b_1(s)\, ds}$$

donc,

$$\left|Ty(t_1) - Ty(t_2)\right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2 \sup\limits_{x\in[0,a]} b_2(x) \int_\Omega b_1(s)\, ds} \times \sup_{x\in[0,a]} b_2(x) \int_\Omega b_1(s)\, ds < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Cela signifie que $\mathtt{F}$ est équicontinu.

Les conditions du théorème de Schauder sont maintenant satisfaites, donc l'opérateur T admet au moins un point fixe dans $\mathcal{C}_a(\Omega)$ qui est une solution de l'équation (3.17). ■

3.4 Applications à un problème aux limits

Dans cette section, on étudiera l'existence et l'unicité de solution d'un problème aux limits, en utilisant les Théorèmes 3.1.1 et 3.3.1 indiqués dans les sections précédentes.

3.4.1 Écriture du problème équivalent

Considérons le problème aux limits suivant :

$$\begin{cases} -y''(t) = \mathcal{F}(t, y(t)) \qquad sur\ [0,T] \\ y(0) = \alpha, y(T) = \beta \end{cases} \tag{3.21}$$

où α et β sont des constantes données. On suppose que $y \in \mathcal{C}^2[0,T]$. On intègre (3.21) de 0 à t, on trouve

$$-y'(t) + y'(0) = \int_0^t \mathcal{F}(s, y(s))\, ds. \tag{3.22}$$

On intègre encore l'équation (3.22) de 0 à t, il vient

$$-y(t) + y(0) = ty'(0) + \int_0^t \int_0^t \mathcal{F}(s, y(s))\, dsds.$$

D'où,

$$y(t) = \alpha - ty'(0) - \int_0^t \int_0^t \mathcal{F}(s, y(s))\, dsds. \tag{3.23}$$

On choisit $t = T$ dans (3.23), à obtenir,

$$y(T) = \alpha - Ty'(0) - \int_0^T \int_0^T \mathcal{F}(s, y(s))\, dsds$$

ce qui nous conduit à

$$\beta - \alpha = -Ty'(0) - \int_0^T \int_0^T \mathcal{F}(s, y(s))\, dsds$$

et donc,

$$-Ty'(0) = \beta - \alpha + \int_0^T \int_0^T \mathcal{F}(s, y(s))\, dsds$$

alors,

$$y'(0) = -\frac{\beta - \alpha}{T} - \frac{1}{T} \int_0^t \int_0^t \mathcal{F}(s, y(s))\, dsds \tag{3.24}$$

La substitution de (3.24) en (3.23), donne,

$$y(t) = \alpha - t\left[\frac{\alpha-\beta}{T} - \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T \mathcal{F}(s, y(s))\, dsds\right] - \int_0^t\int_0^t \mathcal{F}(s, y(s))\, dsds$$

et alors,

$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha + \frac{(\beta-\alpha)t}{T} + \frac{t}{T}\int_0^T\int_0^T \mathcal{F}(s, y(s))\, dsds - \int_0^t\int_0^t \mathcal{F}(s, y(s))\, dsds \\ &= \alpha + \frac{(\beta-\alpha)t}{T} + \frac{t}{T}\int_0^T (T-s)\,\mathcal{F}(s, y(s))\, ds - \int_0^t (t-s)\,\mathcal{F}(s, y(s))\, ds. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé la formule :

$$\int_a^x\int_a^{x_1}\cdots\int_a^{x_{n-1}} y(x_n)dx_n dx_{n-1}\cdots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-x_1)^{n-1}y(x)dx_1.$$

donc,

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) + \frac{t}{T}\left\{\int_0^t (T-s)\,\mathcal{F}(s, y(s))\, ds + \int_t^T (T-s)\,\mathcal{F}(s, y(s))\, ds\right\} \\ &\quad - \int_0^t (t-s)\,\mathcal{F}(s, y(s))\, ds \\ &= h(t) + \int_0^t \left(\frac{(T-s)t}{T} - (t-s)\right)\mathcal{F}(s, y(s))\, ds + \int_t^T \frac{(T-s)t}{T}\mathcal{F}(s, y(s))\, ds \\ &= h(t) + \int_0^t \frac{(T-t)s}{T}\mathcal{F}(s, y(s))\, ds + \int_t^T \frac{(T-s)t}{T}\mathcal{F}(s, y(s))\, ds \end{aligned}$$

qui peut être s'écrire comme suit,

$$y(t) = h(t) + \int_0^T \mathcal{K}(t,s)\,\mathcal{F}(s, y(s))\, ds.$$

Nous obtenons une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce, où $h(t) = \alpha + \frac{(\beta-\alpha)t}{T}$ et

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(T-t)s}{T}, & 0 \le s \le t \le T \\ \dfrac{(T-s)t}{T}, & 0 \le t \le s \le T. \end{cases}$$

Théorème 3.4.1 *On supposons que $\mathcal{F} : [0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable sur $[0,T]\times\mathbb{R}$, vérifiant pour p.p. $t \in [0,T]$, $\mathcal{F}(t,0)$ est bornée et on a :*

$$\left|\mathcal{F}(t,x) - \mathcal{F}(t,y)\right| \le b_2(t)|x-y| \quad p.p.\ t \in [0,T], \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{3.25}$$

où $b_2 : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ *est une fonction mesurable telle que*

$$\int_0^T (T-s)\, s b_2(s)\, ds \leq T. \tag{3.26}$$

Alors, le problème (3.21) *admet une seule solution dans* $\mathcal{C}^2([0,T])$.

Preuve. On applique le Théorème 3.1.1. On a

- $h(.)$ est continue et bornée sur $[0,T]$.
- $\mathcal{K}(.,.)$ et continue pour p.p. $t \in [0,T]$ et

$$\forall t \in [0,T], \left|\mathcal{K}(t,s)\right| \leq \frac{(T-s)\, s}{T} \doteqdot g(s)$$

  et on a $g \in L^1([0,T])$.
- En outre, on a $b = \int_0^T g(s) b_2(s)\, ds \leq 1$. En effet, en utilisant (3.26), on obtient,

$$\begin{aligned} b &= \int_0^T g(s) b_2(s)\, ds \\ &= \int_0^T \frac{(T-s)\, s}{T} b_2(s)\, ds \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (T-s)\, s b_2(s)\, ds \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

  D'après le Théorème 3.1.1, le probléme (3.21) admet une seule solution dans $\mathcal{C}^2([0,T])$.

■

Théorème 3.4.2 *Supposons que* $\mathcal{F} : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue sur* $[0,T] \times \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$,

$$\left|\mathcal{F}(t,x)\right| \leq b_1(t) b_2(x). \tag{3.27}$$

où $b_1 : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ *une fonction mesurable qui appartient à* $L^\infty([0,T])$ *et* $b_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *une fonction mesurable. D'ailleurs, on suppose aussi qu'il existe une constante* $a > 0$ *telle que,*

$$\max\{|\alpha|, |\beta|\} + \left(\frac{T^2 \|b_1\|_\infty}{8}\right) \sup_{t \in [0,a]} b_2(t) \leq a. \tag{3.28}$$

Alors le problème (3.21) *admet une solution dans* $\mathcal{C}^2([0,T])$.

Preuve. On applique le Théorème 3.3.1. On a

- $h(t)$ est continue et bornée sur $[0,T]$ telle que

$$\begin{aligned} |h(t)| &= \left|\alpha + \frac{(\beta-\alpha)\,t}{T}\right| \\ &\leq |\alpha| + \left|\frac{(\beta-\alpha)\,t}{T}\right| \\ &\leq |\alpha| + |\beta-\alpha| \\ &\leq \max\{|\alpha|,|\beta|\}. \end{aligned}$$

- $\mathcal{K}(.,.)$ est continue et bornée sur $[0,T]\times[0,T]$ telle que $\forall\,(t,s)\in[0,T]\times[0,T]$:

$$\left|\mathcal{K}(t,s)\right| \leq 2T.$$

- En outre, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathcal{K}(t,s)\,b_1(s)\,ds &= \int_0^T \left|\mathcal{K}(t,s)\,b_1(s)\right| ds \\ &\leq \|b_1\|_\infty \int_0^T \frac{(T-s)\,s}{T}\,ds \\ &= \|b_1\|_\infty \left(\frac{T^2}{6}\right). \end{aligned}$$

Donc par le Théorème 3.3.1, le problème (3.21) admet une solution dans $\mathcal{C}^2([0,T])$. ■

Conclusion

Ce travail a été adopté pour étudier certaines équations intégrales de type Hammerstein. On observe que les méthodes utilisées au deuxième chapitre nous donnent la forme de la solution de l'équation intégrale, mais ce n'est pas pareil pour les méthodes considérées au dernier chapitre.

Bibliographie

[1] Amaury. L. *Théorie de la Mesure et Intégration*, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), Licence de Mathématiques L3, 2011.

[2] Bellour. A. *On the existence of bounded Continuous solution of Hammerstein Iintegral equation*, MATEMATIQKI VESNIK, 63, 2 (2011), 127–132.

[3] Kanwal. R. P. *Linear Integral Equation. Theory and Technique*, LONDON, ACADEMIC PRESS, 1971.

[4] Nadir .M. Cours sur les équations intégrales, université de M'sila, 2008.

[5] Nawfal. EH. H. *Topologie générale et espace normé*, Dunod, 2011.

[6] Rahmoun. A. *Equations intégrales linéaires et non linéaires. Analyse et Techniques de résolution.* August 16, 2018.

[7] Wazwaz. A. M. *Linear and Nonlinear Integral Equations. Methods and Applications*, Saint Xavier University, Springer,Chicago,USA , 2011.

[8] Zachary. S. *Fixed Point Methods In Nonlinear Analysis*, Mathematics Department, University of Chicago.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'existence et l'unicité de solutions des équations intégrales de type Fredholm-Hammerstein par différentes méthodes de résolution dont le théorème de point fixe et quelques méthodes de résolution directe.

Mots-clés : Équation intégrale, Fredholm, Hammerstein, théorème de point fixe, méthode de résolution, existance, unicité.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة وجود ووحدانية حل لمعادلات تكاملية من نوع فريدهولم -هماڕتسيان بطرق مختلفة من بينها نظرية النقطة الصامدة و طرق حل مباشرة.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التكاملية، فريدهولم، هماڕتسيان، نظرية النقطة صامدة، طرق حل مباشرة، الوجود، الوحدانية.

Abstract

The main objective of this work is to study the existence and uniqueness of solutions of integral equations of the typr of Fredholm-Hammerstein by using different methods of resolution including fixed point theorem and some direct methods of resolution .

Key-words : Integral equation, Fredholm, Hammerstein, fixed point theorem, direct method of resolution , existence, uniqueness.