N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de

la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

Analyse asymptotique d'un probléme de Stokes avec frottement

Présenté par: Dahmri Asma
Hadad Warda

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Dr.Douib El Bachir	MCA/Prof.	Président	Univ. El Oued
Dr.Letoufa Yassine	Prof.	Encadreur	Univ. El Oued
Dr.Zaouche Elmehdi	MCA/MC	Examinateur	Univ. El Oued

Année universitaire 2018 – 2019

Dédicaces

Nous dédions ce travail à :

nos chers parents qui nous ont toujours soutenue, pour eux je dédie la récolte et je n'oublie pas les mains de la créativité et de l'excellence,

nos frères et nos sœurs,

nos amies,

et à tous ceux qui nous ont encouragé durant notre carrière d'étude.

Remerciements

Nous aimerions en premier lieu remercier notre dieu **"Allah"** qui nous avoir donnée la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.
Nous tenons à exprimer nos reconnaissances et nos remerciements les plus profond à notre encadreur **" Letoufa Yassine "** de l'université Hamma lakhder qui nous a proposé le sujet de ce mémoire, pour son aide et ses conseils qui nous ont été un soutient très précieux.
Nous tenons encore plus à le remercier pour sa compétence, sa rigueur, ainsi que pour le caractère novateur de ses idées.
Nous tenons aussi à manifester toute notre gratitude envers tous les membres de jury. Nos remerciements à tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail.
Enfin, nous dédions ce travail à toutes nos familles et nos amis et surtout à nos chers parents pour leur grand soutient.

Table des matières

Notations

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω.
Γ	la frontière de Ω supposée régulière, partitionnée en trois parties mesurables disjointes deux à deux.
ν	la normale unitaire sortante à Γ.
v_ν, v_τ	les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel v défini sur $\overline{\Omega}$.
$C^1\left(\overline{\Omega}\right)$	l'espace des fonctions réelles continûments différentiables sur $\overline{\Omega}$.
$C_0^\infty(\Omega) = D(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω.
$D'(\Omega)$	l'espace de distributions sur Ω.
$L^p(\Omega)$	l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables de puissance p-ième integrable sur Ω.
$L^\infty(\Omega)$	l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables sur Ω telles que $\exists$ c ¿0 : $\lvert u(x)\rvert \leq c,\ p.p$ sur Ω.
$H^1(\Omega)$	l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω.
$H_0^1(\Omega)$	l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Si X est un espace de Banach et $d \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes.

$\|.\|_X$	la norme de X.
X^d	l'espace $\left\{x = (x_i) \,/\, x_i \in X,\ i = \overline{1,d}\right\}$.
$x_n \to x$	la convergente forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans X.
$x_n \rightharpoonup x$	la convergente faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans X.
dom f	le domaine de f.
supp f	le support de f.
$\partial_i f$	la dérivée partielle de f par rapport à la composante x_i.
∇f	le gradient de f.
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de $f = \frac{1}{2}\left(\nabla f + \nabla^T f\right)$.
$Div\ \sigma$	le divergence de tenseurσ.
$div\ f$	le divergence de f.
$\dot{f}$	la dérivation par rapport au temp.
$\frac{\partial f}{\partial \nu}$	la dérivée normale extérieure.
$\liminf$	la limite inférieure.
δ_{ij}	le symbole de Krönecker.
I_3	le tenseurs identité du seconde ordre sur

Pour une fonction f, on note par :

$\mathbb{R}^d$.

0	le zéro de $\mathbb{R}^d$.
C	une constante générique strictement positive.
$p.p$	presque par tout.
$\|.\|$	la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.
(u,v), $u.v$	le produit scalaire des vecteurs u et v.

Introduction

Ce travail consiste à l'étude du comportement des fluides dans des domaines minces, c'est-à-dire des domaines physiques où la "hauteur" est beaucoup plus petite que la "longueur" évoquant le modèle de fluide a été considérée dans les ouvrages [18, 6, 1]. Les principales applications d'un problème de lubrification entre deux parois rigides très proches en mouvement relatif, par exemple dans un mécanisme de roulement à billes, comme il est justifié dans la référence [2] par des techniques asymptotiques ainsi l'approximation des équations de Navier-Stokes par une équation dite de Reynolds.

L'équation de Reynolds a été utilisée pendant une longue période pour décrire le comportement d'un écoulement visqueux entre deux surfaces proches en mouvement relatif (voir [17, 16] pour des références historiques), elle peut être écrite comme

$$\mathbf{div}\left(h^3 \nabla p\right) = \mathbf{div}\,(s\ h)\,,$$

où h est l'épaisseur de l'écoulement et s un vecteur donné représentant le cisaillement de l'une des deux surfaces.

Celle-ci permet d'obtenir la pression hydrodynamique, indépendante de la variable décrivant l'épaisseur de l'écoulement, ce qui nous permet de déterminer la distribution de pression dans un espace mince rempli de fluide entre deux surfaces. Le contact liquide-solide peut être modélisé par la loi de frottement de Coulomb ou de Tresca [9]. Des études expérimentales continues sont en cours [14, 15] mais restent difficiles en raison de l'épaisseur de l'espace entre les surfaces solides qui peut atteindre 50 nanomètres.

L'étude du phénomène de lubrification par des fluides Newtoniens avec glissement a été obtenue en [4] lorsque le glissement est donné par la loi de frottement de Coulomb, et par

F. Saidi [18] lorsqu'on prend aussi en considération l'effet de température. Dilmi dans [8] a étudié l'analyse asymptotique d'un problème dynamique pour l'élasticité dans un domaine borné en dimension trois avec les conditions de frottement du type Tresca.

L'objectif de ce travail, n'est pas seulement de donner l'existence et l'unicité de ce problème, mais aussi d'obtenir rigoureusement l'équation décrivant ces phénomènes dans un flux du film mince par le biais d'une analyse asymptotique dans lequel le petit paramètre est la largeur de l'écart, en suivant les mêmes idées que dans $[2, 3, 4, 18]$. Le point de départ est l'équation des milieux continus avec les conditions aux limites de Tresca.
La technique asymptotique est basée sur les étapes :

$i)-$ Le changement d'échelle, par rapport à l'épaisseur.

$ii)-$Les estimations dans un domaine "fixe".

$iii)-$ Les résultats de convergence faible et problème limite.

Dans ce mémoire on s'intéresse aussi à l'étude de l'analyse asymptotique d'un problème stationner de Stokes dans un domaine borné en dimension trois en film mince avec des conditions de frottement de type de Tresca et soumis à de condition de Drichlet sur l'autre parti.
Le travail est composé comme suit :

Le premier chapitre, est consacré tout d'abord au rappel des notions principales de la théorie des milieux continus et d'analyse fonctionnelle nécessaires et des résultats utilisés tout au long de ce travail.

Dans le deuxième chapitre, nous prouvons en premier le résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible, de système pour l'écoulement stationner de Stokes dans un domaine borné à trois dimensions avec des conditions de frottement sur une partie de la frontière et Dirichlet sur l'autre partie. Le point de départ sont la lois des conservations en mieux continue, la lois de comportement et la condition aux limite de Tresca. Le domaine Ω_ε est donné par

$$\Omega_\varepsilon = \{(x, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ (x, 0) \in \omega \ \ 0 < x_3 < \varepsilon h\,(x)\}.$$

La frontière de Ω_ε est divisée en trois parties disjoint, sera notée $\Gamma^\varepsilon = \omega \cup \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon$, où ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine et $h \in C^1(\mathbb{R})$, Γ_1^ε est la frontière supérieure du domaine et Γ_L^ε est la frontière latérale.

Donc, dans ce cadre nous montrons le premier résultat que pour $\varepsilon > 0$ fixé, le problème admet une solution unique faible.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique de notre problème que nous avons posée dans le premier chapitre.

Nous montrons d'abord que pour $\varepsilon > 0$ fixé, le problème admet une solution unique faible. Ensuite, on étudie l'analyse asymptotique du problème en faisant un changement d'échelle, pour ramener l'étude sur un domaine Ω indépendant de ε, sur lequel nous définissons des nouvelles inconnues. Nous obtenons des estimations à priori sur la solution indépendamment de ε en utilisant les inégalités de Korn, Poincaré et Young. Grâce à ces estimations, on obtient un théorème de convergence, qui nous permet de passer à la limite lorsque ε tend vers zéro. Donc la convergence forte de la vitesse est prouvée, l'équation spécifique de Reynolds est aussi prouvée. Enfin, nous montrons l'unicité de la solution de notre problème initial.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Le but est d'introduire les outils mathématiques et mécaniques nécessaires pour une bonne compréhension de la suite du problème traité.

Dans la première section, nous commençons par un rappel des résultats essentiels de la théorie du milieux continus et la loi de comportement de l'élasticité linéaire, puis, nous présentons le système d'équations aux dérivées partielles qui modélisent l'évolution isotherme (ou non-isotherme) d'un corps homogène élastique en présence de conditions non linéaires du type Tresca sur une partie de la frontière du domaine Ω *de* $\mathbb{R}^3$.

Les références bibliographiques seront ultérieurement spécifiées dans chacun des paragraphes suivants :

1.1 Rappels de la mécanique des milieux continus

L'objet de cette section est d'établir le modèle mathématique décrivant l'évolution d'un corps déformable ayant une loi élastique sous l'action des efforts extérieurs en présence de conditions de frottement sur une partie au bord du domaine. Ceci se traduit mathématiquement par l'établissement d'un système d'équations aux dérivées partielles posé sur un domaine de $\mathbb{R}^d$. Ce système comprend la loi de comportement du matériau, l'équation du mouvement et de l'énergie du corps ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis. Pour les références bibliographiques, nous avons consulté [9, 18].

Considérons un milieu continu qui occupe un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$ pendant un intervalle de temps $[0,T]$.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement. Soit u le champ des vecteurs vitesse des points $x=(x_1,x_2,x_3)\in\Omega$ du milieu continu en mouvement par rapport au repère Ox, le tenseur σ de composantes σ_{ij} $(i,\ j=1,2,3)$, est le tenseur des contraintes. La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre le tenseur des forces extérieurs et le tenseur des accélérations pour un système matériel quelconque, conduit à l'équation du mouvement suivante :

$$Div\ \sigma+f\ =\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u.\nabla u\right), \tag{1.1}$$

où le vecteur f, de composantes f_i $(i=1,2,3)$, représente une densité massique des forces extérieures, ρ est la densité de masse et Div désigne l'opérateur divergence, c'est-à-dire

$$Div\ \sigma=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\ \ (i=1,2,3).$$

Lorsque le champ de vitesse u varie très lentement par rapport au temps dans le cas où le deux termes $\rho\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et $\rho u.\nabla u$ négligents (processus quasi statiques). S'il s'agit d'un problème de statique le premier membre des équations (1.1) est identiquement nul et on les appelle équations d'équilibre

$$Div\ \sigma+f\ =0. \tag{1.2}$$

L'hypothèse d'incompressibilité du volume pour les milieux fluides.

Un fluide est dit incompressible lorsque son volume demeure constant sous l'action d'une pression externe, l'hypothèse d'incompessibilité très réaliste physiquement, se traduit par

$$TrD\,(u) = 0 \tag{1.3}$$

où $D(u)$ est le tenseur des taux de déformation, de composantes

$$d_{ij}\,(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i, j \leq 3. \tag{1.4}$$

L'équation de conservation de l'énergie. L'expression générale du premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma : D(u) - \mathbf{div} q + r, \tag{1.5}$$

où

- e est un scalaire qui désigne l'énergie interne spécifique du milieu continu.
- r est un scalaire représentant l'apport d'énergie par unité de masse et de temps.
- q, de composantes q_i, est le vecteur transport d'énergie.
- $\sigma : D(u)$ est le produit de deux tenseurs σ et $D(u)$ défini par l'expression

$$\sigma : D(u) = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij} d_{ij}(u).$$

D'un point de vue mathématique, nous disposons de trop d'inconnues par rapport au nombre d'équations. Donc les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie sont insuffisantes pour décrire les mouvements des milieux continus, elles doivent être complétées par d'autres relations que l'on appelle des lois de comportement. Nous présentons ci-dessous les lois de comportement de fluide de Stoke traitées dans cette thèse.

$$\sigma(u) = 2\mu D\,(u) - pI,$$

où

- $D(u)$ est le tenseur des taux de déformation.
- I est la matrice identité de rang 3.
- $TrD\,(u)$ désigne la trace de $D\,(u)$ définie par :

$$TrD\,(u) = \sum_{k=1}^{3} d_{kk}\,(u)\,.$$

Dans le cas *non isotherme* son coefficient μ est une fonction de la température T

$$\mu = \mu(T).$$

La loi de comportement de *l'élasticité linéaire d'un corps homogène et non isotherme* est donc

$$\sigma(u) = 2\mu(T)D\,(u) + \lambda TrD\,(u)\,I. \tag{1.6}$$

Ensuite on suppose qu'il existe une force tangentielle sur une partie de la frontière qui sera notée par ω, on dit que l'on a un contact avec frottement. On est amené à introduire une loi de frottement qui relie cette composante tangentielle aux autres variables du système. Dans ce mémoire nous allons considérer la loi de frottement dite du type Tresca.

Lois de frottement du type Tresca. Cette loi de frottement présente un seuil de frottement fixe k^ε lorsque le solide et la fondation sont en contact, la fondation exerce sur le solide un effort tangentiel qui ne dépasse pas un certain seuil

$$|\sigma_\tau^\varepsilon| \leq k^\varepsilon \quad \text{sur} \quad \omega.$$

Tant que la contrainte tangentielle n'a pas atteint le seuil, le milieu continu ne peut pas se déplacer par rapport à l'obstacle et il y a blocage, ce qui se traduit par :

$$|\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \Longrightarrow u_\tau^\varepsilon \quad = 0 \ \text{ sur } \quad \omega.$$

Lorsque ce seuil est atteint le solide peut se déplacer tangentiellement par rapport à la fondation et il y a alors glissement. La contrainte tangentielle s'oppose à la vitesse. Alors on a :

$$|\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \Longrightarrow \text{il'existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau^\varepsilon = s - \lambda u_\tau^\varepsilon \quad \text{sur} \quad \omega.$$

En conclusion, les conditions aux limites de type frottement de Tresca s'écrivent alors comme suit :

$$\begin{cases} \textbf{Si } \ |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \ \text{ alors } u_\tau^\varepsilon = 0, \\ \textbf{Si } \ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \ \text{ alors } \sigma_\tau^\varepsilon = s - \lambda\, u_\tau^\varepsilon \ \text{ avec } \lambda \geq 0. \end{cases} \text{sur} \quad \omega, \tag{1.7}$$

Rémarque 1.1. *Quand $k^\varepsilon = 0$, on obtient $\sigma_\tau^\varepsilon = 0$ sur ω. Il s'agit du cas sans frottement.*

Espaces fonctionnels

Nous commençons par un rappel d'analyse fonctionnelle concernant l'espace des distributions, les espaces $L^p(\Omega)$ et les notions principales de la convergence faible. Ensuite, nous présentons également les espaces de Sobolev et les principales propriétés notamment les théorèmes de trace.

1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Nous allons introduire dans ce paragraphe un résumé d'analyse fonctionnelle, et quelques résultats qui interviennent dans l'étude de problème de ce mémoire.

De nombreux ouvrages parcourent ce sujet, nous renvoyer le lecteur soucieux de plus détails à par exemple [13] .

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$. On désigne par $C_0^\infty(\Omega)$ (ou $D(\Omega)$) l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω.

On munit $C_0^\infty(\Omega)$ de la «pseudo-topologie», c'est-à-dire qu'on définit une notion de convergence dans $C_0^\infty(\Omega)$.

L'espace des distributions $D^{'}(\Omega)$ est le «dual» de $D(\Omega)$, c'est-à-dire l'espace de formes linéaires continues sur $D(\Omega)$. On note $\langle T, \phi\rangle = T(\phi)$ le produit de dualité entre une distribution $T \in D^{'}(\Omega)$ et une fonction $\phi \in D(\Omega)$: ce produit de dualité généralise l'intégrale usuelle $\displaystyle\int_\Omega T.\phi \; dx$. En effet, on vérifie que si f est une fonction localement intégrable dans Ω, alors on peut définir une distribution T_f par :

$$\langle T_f, \phi\rangle = \int_\Omega f.\phi \; dx.$$

On peut aussi munir $D^{'}(\Omega)$ d'une notion de convergence : on dit qu'une suite $T_n \in D^{'}(\Omega)$ **converge au sens des distributions** vers $T \in D^{'}(\Omega)$ si, pour tout $\phi \in D(\Omega)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T, \phi_n\rangle = \langle T, \phi\rangle.$$

Définissons maintenant la **dérivation au sens des distributions :** si $T \in D^{'}(\Omega)$, la dérivée $\dfrac{\partial T}{\partial x_i} \in D^{'}(\Omega)$ est définie par :

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \phi\rangle = -\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\rangle, \; \forall \phi \in D(\Omega). \tag{1.8}$$

Pour $1 \leq p < \infty$, on note $L^p(\Omega)$ l'espace de Lebesgue défini par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \,;\, \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

et pour $p = \infty$, on note

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \,;\, \sup_{x \in \Omega} ess \, |u(x)| < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess \, |u(x)| = \inf \{ M > 0 \qquad |u(x)| \leq M \quad \text{p.p, } x \in \Omega \}.$$

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ on notera q l'exposant conjugué de p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$. Pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, on a $uv \in L^1(\Omega)$ et $\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^q(\Omega)}$ **(l'inégalité de Hölder)**.

Théorème 1.1. ***(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue).***
Soit (u_n) une suite de fonctions mesurable . On suppose que

(i) $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ p.p. $x \in \Omega$,

(ii) il existe une fonction $v \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n,

$$|u_n(x)| \leq v(x) \ p.p. \ x \in \Omega; \forall n \in \mathbb{N}$$

Alors $u \in L^1(\Omega)$ et $\|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} \longrightarrow 0$.

Rémarque 1.2. *Il résulte de l'inégalité de Hölder que si (u_n) une suite telle que $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$, et (v_n) une suite telle que $v_n \to v$ dans $L^q(\Omega)$. On obtient que la suite $(u_n v_n) \subset L^1(\Omega)$ converge vers uv dans $L^1(\Omega)$, ce qui implique*

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega u_n v_n \, dx = \int_\Omega uv \, dx.$$

Le résultat suivant, qui est presque l'inverse du théorème de convergence dominée de Lebesgue, il est d'une certaine importance dans l'étude des équations non linéaires, il établit une certaine relation entre la convergence dans le sens de la norme de $L^1(\Omega)$ et la convergence presque partout sur Ω.

Théorème 1.2. *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions intégrables telle que $u_n \to u$ dans $L^1(\Omega)$. Alors, il existe une sous suite $(u_{n_k})_k$ et $v \in L^1(\Omega)$ telle que*

$$u_n \to v \ \ p.p \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad |u_{n_k}| \leq v \quad p.p \text{ dans } \Omega.$$

Définition 1.1. *Soit E un espace de Banach. Une suite $(u_n) \subset E$ converge faiblement dans E vers un élément $u \in E$, et on note $u_n \rightharpoonup u$, si*

$$\langle f, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle\,,\ \forall f \in E',\ \text{où } E' \text{ est le dual de } E.$$

Théorème 1.3. ***(de Eberlein et Smulyan)****.*

Soit E un espace de Banach réflexif, et soit (x_n) une suite bornée dans E. Alors il existe une sous suite extraire (x_{n_k}) qui converge faiblement dans E.

Proposition 1.1. *Soit E un espace de Banach, et une suite $(u_n) \subset E$. Alors*

(1) $u_n \to u$ implique $u_n \rightharpoonup u$.

(2) Si $u_n \to u$, alors (u_n) est bornée et $\liminf\limits_{n\to\infty} \|u_n\| \geq \|u\|$.

(3) Si $u_n \rightharpoonup u$ dans E et $f_n \to f$ dans E, alors il suit que $\langle f_n, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle$.

(4) Si $u_n \to u$ dans E et $f_n \rightharpoonup f$ dans E', alors il suit que $\langle f_n, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle$.

Définition 1.2. *Soit E un espace de Banach. Une suite $(f_n) \subset E'$ converge faiblement étoile vers un élément $u \in E'$, et on note $f_n \rightharpoonup^* f$, si*

$$\langle f_n, u \rangle \to \langle f, u \rangle\,, \forall u \in E.$$

Théorème 1.4. ***(d'Aloaglu)***

Soit E un espace de Banach séparable, et soit (f_n) une suite bornée dans E' le dual de E. Alors il existe une sous-suite extraire (f_{n_k}) qui converge faiblement dans E'.

Proposition 1.2. *Soit E un espace de Banach, et soit (f_n) une suite dans E' le dual d'espace E.*

(1) $f_n \to f$ dans E' implique $f_n \rightharpoonup^* f$.

(2) Si $f_n \rightharpoonup^* f$, alors (f_n) est bornée et $\liminf\limits_{n\to\infty} \|f_n\| \geq \|f\|$.

(3) Si $u_n \to u$ dans E et $f_n \rightharpoonup^* f$ dans E', alors il suit que $\langle f_n, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle$.

(4) $f_n \rightharpoonup f$ dans E' implique $f_n \rightharpoonup^* f$.

(5) Si E est réflexif, alors $f_n \rightharpoonup^* f$ est équivalente à $f_n \rightharpoonup f$ dans E'.

Théorème 1.5. ***(Théorème de représentation de Riesz-Fréchet) .***

Soit H un espace de Hilbert réel et $(.,.)_H$ un produit scalaire de H. Pour toute $\varphi \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que :

$$\langle \varphi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H \quad et \quad \|\varphi\|_{H'} = \|f\|_H .$$

Nous dirons qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans H converge faiblement vers $f \in H$ si pour tout $v \in H$, les produits scalaires (f_n, v) convergent vers (f, v) dans $\mathbb{R}$. Nous noterons cette convergence par le symbole $\rightharpoonup$ pour la distinguer de la convergence forte (c'est-à-dire pour la norme hilbertienne) :

$$f_n \to f \iff \lim_{n\longrightarrow\infty} \|f_n - f\| = 0.$$
$$f_n \rightharpoonup f \iff \forall v \in H \ , \ \lim_{n\longrightarrow\infty} (f_n, v) = (f, v) .$$

Proposition 1.3.

(1) Une suite dans H qui converge fortement vers $f \in H$ converge aussi faiblement vers f.

(2) La propriété ≪ toute suite dans H qui converge faiblement vers $f \in H$ converge fortement vers f ≫ est vraie si et seulement si la dimension de H est finie.

(3) Toute suite faiblement convergente est bornée.

(4) Si E et F sont des espaces de Hilbert réels, et si $u \in L(E, F)$, alors l'image par u de toute suite dans E faiblement convergente vers un élément $x \in E$ est faiblement convergente dans F vers $u(x)$.

Le résultat crucial suivant est une conséquence du théorème de Riesz-Fréchet et du théorème (1.4) de Banach-Alaoglu.

Théorème 1.6. ***(Théorème de compacité faible de la boule unité fermée des espaces de Hilbert).***

Si H est un espace de Hilbert, alors toute suite bornée dans H admet une sous-suite faiblement convergente.

1.3 Rappels sur les espaces de Sobolev

Nous définissons les espaces de Sobolev qui sont les espaces de fonctions permettant de résoudre les formulations variationnelles d'équations aux dérivées partielles. Par la suite, Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$. Pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables de carré sommable dans Ω. Muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v\,(x)\,dx,$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On note

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

la norme correspondante.

Définition 1.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par :*

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1,\ ...,d\}\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\right\},$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle de u au sens des distributions (1.8).

Proposition 1.4. *L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (u(x)v(x) \ + \nabla u(x).\nabla v(x))\,dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|u(x)|^2 \ + |\nabla u(x)|^2)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.9}$$

l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Voici l'inégalité très utile portant sur les normes de Sobolev.

Proposition 1.5. ***(Inégalité de Poincaré)**.*

Soit Ω un ouvert de borné de $\mathbb{R}^d$, Alors il existe une constante C telle que pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

En particulier, $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme équivalente à celle de $H_0^1(\Omega)$ ($H_0^1(\Omega)$ désigne le sous espace vectoriel des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur Γ).

On peut mentionner le résultat suivant sur les traces des fonctions $H^1(\Omega)$.

Théorème 1.7. *Traces des fonctions* $H^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$. Alors il existe un opérateur linéaire continu $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$, appelé opérateur trace, tel que :

$$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma) \text{ est compact.}$$

On définit l'espace vectoriel $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ comme suit :

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \left\{\gamma(u); \quad u \in H^1(\Omega)\right\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{\frac{1}{2},\Gamma} = \inf\left\{\|u\|_{1,\Omega}; \quad \gamma(u) = f\right\}.$$

Les premières propriétés les plus remarquables et utiles à notre exposé sont les suivantes :

(1) *Si $u \in H^1(\Omega)$, alors $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est linéaire surjectif et*

$$\|\gamma(u)\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \leq C\,\|u\|_{1,\Omega} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

(2) *Comme Ω est régulier, toute fonction $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est la trace d'une fonction $\tilde{u} \in H_0^1(G)$, i.e. $\tilde{u}_{|\partial\Omega} = u$, où G est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant $\overline{\Omega}$.*

Sur les questions concernant les espaces traces, voir par exemple J.L. Lions et E. Magenes [13].

Le théorème de trace permet de généraliser aux fonctions de $H^1(\Omega)$ la formule de Green établie pour des fonctions de classe C^1.

Théorème 1.8. ***(Formule de Green)***.

Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. Si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, elles vérifient

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}dx + \int_\Gamma u(x)v(x)\nu_i(x)dx,$$

où $\nu = (\nu_i)_{1\leq i\leq d}$ est la normale unité extérieure à Γ.

Formule de Green pour l'élasticité

On munit l'espace produit $H^1(\Omega)^d$ du produit scalaire canonique et de la norme associée respectivement $(.,.)_{1,\Omega}$ et $\|.\|_{1,\Omega}$ qui définis par :

$$(u,v)_{1,\Omega} = \int_\Omega u_i v_i \; dx + \int_\Omega u_{i,j} v_{i,j} \; dx, \tag{1.10}$$

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 = \int_\Omega |v|^2 \; dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx.$$

Et la norme de $L^2(\Omega)^d$ sera notée $\|.\|_{0,\Omega}$.

Nous rappelons que l'application de trace $\gamma : H^1(\Omega)^d \to L^2(\Gamma)^d$ est linéaire continue, mais n'est pas surjective. L'image de $H^1(\Omega)^d$ par cette application notée par H_Γ, ce sous espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Pour σ assez régulier nous avons la formule de Green :

$$\int_\Omega \sigma : \varepsilon(u) \, dx + \int_\Omega Div(\sigma) .u \; dx = \int_\Gamma \sigma\nu.v \; d\Gamma \qquad \forall v \in H^1(\Omega)^d. \tag{1.11}$$

Un résultat essentiel pour les applications du prochain chapitre est l'inégalité suivante :

Théorème 1.9. ***(Inégalité de Korn).***

Soit Ω un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^3$ de classe C^1. Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)^d$, on a :

$$\int_\Omega v_i v_i \; dx + \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) \, dx \geq C \|v\|_{1,\Omega}^2 .v \in H^1(\Omega)^d.$$

Pour des détails sur les résultats de ce paragraphe nous renvoyons par exemple à [9].

Rappelons que le dual V' d'un espace de Hilbert V est l'ensemble des formes linéaires continues sur V. Par application du Théorème 1.5 de représentation de Riesz, le dual de $L^2(\Omega)$ est identifié à $L^2(\Omega)$ lui-même. On peut aussi définir le dual d'un espace de Sobolev. En l'occurrence le dual de $H_0^1(\Omega)$ joue un rôle particulier dans la suite.

Définition 1.4. ***(Le dual de l'espace de Sobolev).***

Le dual de l'espace de Sobolev$H_0^1(\Omega)$ est appelé $H^{-1}(\Omega)$. On note $\langle L, \phi \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)} = L(\phi)$ le produit de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et son dual pour tout forme linéaire continue $L \in H^{-1}(\Omega)$ et toute fonction $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Proposition 1.6. ***(propriétés de l'espaces** $H^{-1}(\Omega)$**)***

(1) *L'espace* $H^{-1}(\Omega)$ *est caractérisé par*

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{ f = v_0 + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad \textit{avec } v_0, v_1, ..., v_d \in L^2(\Omega) \right\}.$$

(2) $H^{-1}(\Omega)$ *est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme :*

$$\|L\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} | \langle L, \phi \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)} |.$$

Pour plus de détails de cette proposition voir par exemple [7]

Rémarque 1.3. $H^{-1}(\Omega)$ *est un espace de Hilbert pour la norme* (1.9).

Rémarque 1.4. *Pour tout* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$*, on a*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv \left(L^2(\Omega)\right)' \subset H^{-1}(\Omega).$$

Chapitre 2

Existence et unicité de la solution d'un problème de Stokes avec frottement

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique d'un problème de Stokes dans un domaine mince avec les conditions de frottement non linéaires de type de Tresca sur une partie de la frontière et les conditions de Dirichlet sur l'autre partie.

2.1 Introduction et position du problème

Dans ce chapitre on étudie le comportement asymptotique d'un fluide de Stokes perturbé en régime stationnaire dans un domaine mince Ω_ε dont une partie de sa frontière est soumise à des conditions de frottement et une autre partie est soumise à des conditions de Dirichlet, où $0 < \varepsilon < 1$ est un réel positif destiné à tendre vers zéro. La frontière de Ω_ε sera notée $\Gamma^\varepsilon = \overline{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \overline{\Gamma}_L^\varepsilon \cup \overline{\omega}$, avec Γ_1^ε est la frontière supérieure d'équation $x_3 = \varepsilon h(x_1, x_2)$, Γ_L^ε est la frontière latérale, ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω_ε. On suppose que h est une fonction de classe C^1 définie sur ω telle que :

$$0 < h_{\min} \leq h(x') \leq h_{\max} = \overline{h} \quad \forall (x', 0) \in \omega.$$

On note $x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Le domaine Ω_ε est donné par :

$$\Omega_\varepsilon = \{(x',\, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\, (x', 0) \in \omega, \quad 0 < x_3 < \varepsilon h(x')\}.$$

On désigne par $D = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ le tenseur des taux de déformations avec

$$d_{ij}\left(u^\varepsilon\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

On suppose que la loi de comportement du fluide suit la forme de Stokes

$$\sigma_{ij}^\varepsilon\left(u^\varepsilon, p^\varepsilon\right) = -p^\varepsilon \delta_{ij} + 2\mu d_{ij}\left(u^\varepsilon\right), \tag{2.1}$$

où

- u^ε est la vitesse du fluide.
- p^ε est sa pression.
- μ est sa viscosité.
- δ_{ij} est le symbole de Krönecker.

On définit les composantes normales et tangentielles u_ν^ε et $u_\tau^\varepsilon = \left(u_{\tau_i}^\varepsilon\right)_{1 \leq i \leq 3} \in \mathbb{R}^3$ de la vitesse par :

$$\begin{aligned} u_\nu^\varepsilon &= u^\varepsilon.\nu, \\ u_{\tau_i}^\varepsilon &= u_i^\varepsilon - u_\nu^\varepsilon.\nu_i. \end{aligned}$$

De même, les composantes normales et tangentielles σ_ν^ε et $\sigma_\tau^\varepsilon = \left(\sigma_{\tau i}^\varepsilon\right)_{1\leq i\leq 3} \in \mathbb{R}^3$ du tenseur des contraintes sont définies par :

$$\begin{aligned}\sigma_\nu^\varepsilon &= \left(\sigma^\varepsilon.\nu\right).\nu,\\ \sigma_{\tau_i}^\varepsilon &= \sigma_{ij}^\varepsilon.\nu_j - \left(\sigma_\nu^\varepsilon\right).\nu_i.\end{aligned}$$

Les équations qui gouvernent l'écoulement stationnaire d'un fluide de Stokes dans le domaine Ω_ε sont les suivantes :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i^\varepsilon = 0,\ \ i = 1,2,3, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{div} u^\varepsilon = 0, \tag{2.3}$$

où σ_{ij}^ε est déjà défini par la loi (2.1).

Afin d'écrire les conditions aux limites pour la vitesse sur la frontière de Ω_ε, on introduit d'abord la fonction vectorielle $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\varepsilon)^3$ (l'ensemble des traces de $H^1(\Omega_\varepsilon)^3$ sur Γ^ε) telle que :

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} g.\nu\ ds = 0. \tag{2.4}$$

On peut montrer par [12] que la condition (2.4) est équivalente à l'existence d'un relèvement $G^\varepsilon \in H^1\left(\Omega_\varepsilon\right)^3$ de g sur Ω_ε vérifiant

$$\mathbf{div} G^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon,\quad G^\varepsilon = g \quad \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon,\quad G^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \quad \text{et} \quad G^\varepsilon.\nu = 0 \quad \text{sur } \omega. \tag{2.5}$$

La vitesse sur le bord $\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon$ est connue et donnée par une fonction de g.

$$u^\varepsilon = g = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1^\varepsilon, \tag{2.6}$$

$$u^\varepsilon = g \quad \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon, \text{ avec } \ g_3 = 0. \tag{2.7}$$

Sur ω la vitesse est supposée inconnue et elle vérifie la condition de non-pénétration :

$$u.\nu = 0 \ \text{ sur } \omega. \tag{2.8}$$

Supposons qu'il existe le frottement sur ω, ce dernier est modélisé par la loi non linéaire de Tresca :

$$\left.\begin{aligned} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon &\implies u_\tau^\varepsilon = s\\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon &\implies \exists \beta \geq 0 \text{ tel que } u_\tau^\varepsilon = s - \beta\sigma_\tau^\varepsilon \end{aligned}\right\} \text{ sur } \omega, \tag{2.9}$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, s la vitesse de cisaillement et k^ε le seuil de frottement.

Rémarque 2.1.

La troisième composante de la vitesse vérifie

$$u_3^\varepsilon = 0 \quad sur \;\; \Gamma^\varepsilon \; .$$

En effet,d'après la condition (2.8), *on a :*

$$u^\varepsilon \nu = u_1^\varepsilon \nu_1 + u_2^\varepsilon \nu_2 + u_3^\varepsilon \nu_3 = 0 \qquad sur \;\; \omega$$

où, $\nu = (0, 0, -1)$ *est le vecteur normal unitaire extérieur à* ω *donc* $u_3^\varepsilon = 0$ *sur* ω*. D'après la condition* (2.6) *et* (2.7) *et le fait que* $g_3 = 0$ *sur* Γ_L^ε*, on a* $u_3^\varepsilon = 0$ *sur* $\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon$ *, donc* $u_3^\varepsilon = 0$ *sur* Γ^ε.

Le problème complet consiste donc à trouver un champ de vitesse u^ε *et une pression* p^ε *vérifiant les équations et les conditions aux limites suivantes :*

$$\left(Pb_f^\varepsilon\right) \begin{cases} Div\ \sigma + f \ = 0 & dans \;\; \Omega_\varepsilon, \\ \sigma_{ij}^\varepsilon \left(u^\varepsilon, p^\varepsilon\right) = -p^\varepsilon \delta_{ij} + 2\mu d_{ij}\left(u^\varepsilon\right) & dans \;\; \Omega_\varepsilon, \\ \mathbf{div} u^\varepsilon = 0 & dans \;\; \Omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon = 0 & sur \;\; \Gamma_1^\varepsilon, \\ u^\varepsilon = g & sur \;\; \Gamma_L^\varepsilon, \\ u^\varepsilon . \nu = 0 & sur \;\; \omega, \\ \left.\begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies u_\tau^\varepsilon = s \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \exists \beta \geq 0 \ tel\ que\ u_\tau^\varepsilon = s - \beta \sigma_\tau^\varepsilon \end{array}\right\} & sur \;\; \omega. \end{cases}$$

Afin de donner la formulation variationnelle du problème $\left(pb_f^\varepsilon\right)$ *, nous allons établir le lemme suivant :*

Lemme 2.1.

La condition (2.9) *est équivalente à la relation suivante :*

$$\left(u_\tau^\varepsilon - s\right) \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon |u_\tau^\varepsilon - s| = 0 \quad sur \;\; \omega. \tag{2.10}$$

Démonstration. On suppose que $\left(u_\tau^\varepsilon - s\right) \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon |u_\tau^\varepsilon - s| = 0$.

– Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon$, alors

$$\left(u_\tau^\varepsilon - s\right) \sigma_\tau^\varepsilon = - \left|\sigma_\tau^\varepsilon\right| \left|u_\tau^\varepsilon - s\right|,$$

d'où l'existence d'un $\beta \geq 0$ tel que

$$u_\tau^\varepsilon - s = -\beta \sigma_\tau^\varepsilon \ .$$

$-$ Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon$, alors

$$\begin{aligned}(u_\tau^\varepsilon - s)\,\sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon |u_\tau^\varepsilon - s| &= 0 \geq -\,|u_\tau^\varepsilon - s|\,.\,|\sigma_\tau^\varepsilon| + k^\varepsilon |u_\tau^\varepsilon - s| \\ &\geq |u_\tau^\varepsilon - s|\,.\,(-\,|\sigma_\tau^\varepsilon| + k^\varepsilon)\end{aligned}$$

et comme $-\,|\sigma_\tau^\varepsilon| + k^\varepsilon > 0$, alors $u_\tau^\varepsilon = s$.

Réciproquement, on suppose que u_τ^ε vérifie la condition aux limites de Tresca

$-$ Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon$, alors $u_\tau^\varepsilon = s$

$$(u_\tau^\varepsilon - s)\,\sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon |u_\tau^\varepsilon - s| = (s - s)\,\sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon |s - s| = 0\ .$$

$-$ Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon$, alors il existe $\beta \geq 0$ tel que : $u_\tau^\varepsilon = s - \beta \sigma_\tau^\varepsilon$. D'où

$$(u_\tau^\varepsilon - s)\,\sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon |u_\tau^\varepsilon - s| = -\beta\,|\sigma_\tau^\varepsilon|^2 + \beta\,|\sigma_\tau^\varepsilon|^2 = 0.$$

$\square$

2.2 Formulation variationnelle du problème

Nous commençons à décrire le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler, et nous définissons la formulation variationnelle du problème $\left(pb_f^\varepsilon\right)$, ensuite nous établissons un résultat d'existence et d'unicité.

Pour l'ouvert Ω_ε on définit l'espace et l'ensemble suivants :

$$H^1(\Omega_\varepsilon)^3 = \left\{ v \in \left(L^2(\Omega_\varepsilon)\right)^3 : \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega_\varepsilon)\,,\ \forall i,j = 1,...,3 \right\},$$

muni de la norme $||.||_{1.\Omega_\varepsilon}$, où la norme de $\left(L^2(\Omega_\varepsilon)\right)^3$ sera noté $||.||_{0.\Omega_\varepsilon}$. $H_0^1(\Omega_\varepsilon)^3$ est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega_\varepsilon)^3$ dans $H^1(\Omega_\varepsilon)^3$. L'espace dual de $H_0^1(\Omega_\varepsilon)^3$ sera noté par $H^{-1}(\Omega_\varepsilon)^3$.

Nous définissons le convexe fermé non vide :

$$K^\varepsilon = \left\{ v \in H^1(\Omega_\varepsilon)^3 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon,\ v.\nu = 0 \text{ sur } \omega \right\},$$

$$K^\varepsilon_{\mathbf{div}} = \{v \in K^\varepsilon : \ \mathrm{div}(v) = 0\}.$$

Nous utilisons aussi les espaces vectoriels suivants :

$$H^1_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega_\varepsilon) = \left\{\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon) : \ \ \varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon \ \right\},$$

$$L_0^2(\Omega_\varepsilon) = \left\{q \in L^2(\Omega_\varepsilon) : \int_{\Omega_\varepsilon} q dx = 0\right\}.$$

Pour simplifier l'écriture, on posera

$$a(u,v) = 2\mu \int_{\Omega_\varepsilon} d_{ij}(u)\, d_{ij}(v)\, dx, \tag{2.11}$$

$$(u,v) = \int_{\Omega_\varepsilon} u.v dx = \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega_\varepsilon} u_i v_i dx. \tag{2.12}$$

Pour $v \in H^1(\Omega_\varepsilon)^3$, on définit la fonctionnelle J^ε par :

$$J^\varepsilon(v) = \int_\omega k^\varepsilon |v - s| dx'. \tag{2.13}$$

On note

$$b^\varepsilon(q,v) = -\int_{\Omega_\varepsilon} q \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx, \quad \forall (q,v) \in L_0^2(\Omega_\varepsilon) \times H^1(\Omega_\varepsilon)^3. \tag{2.14}$$

Lemme 2.2.

Si u^ε et p^ε des solutions du problème $\left(Pb_f^\varepsilon\right)$, alors elles vérifient le problème variationnel suivant :

$$(PV_1^\varepsilon)\begin{cases} \textit{Trouver } \ u^\varepsilon \in K^\varepsilon_{\mathbf{div}}, \ p^\varepsilon \in L_0^2(\Omega_\varepsilon) \quad \textit{telle que :} \\ a(u^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon) + b^\varepsilon(p^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon) + J^\varepsilon(\varphi) - J^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon), \quad \forall \varphi \in K^\varepsilon. \end{cases}$$

Démonstration. En multipliant l'équation (2.2) par $(\varphi - u^\varepsilon)$, où $\varphi \in K^\varepsilon$, et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_i - u_i^\varepsilon)\, dx' dx_3 - \int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \nu_j (\varphi_i - u_i^\varepsilon)\, d\sigma + \int_{\Omega_\varepsilon} f_i^\varepsilon (\varphi_i - u_i^\varepsilon) \ dx \ = 0.$$

Les conditions aux limites (2.6) et (2.7) impliquent que :

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \nu_j (\varphi_i - u_i^\varepsilon)\, d\sigma = \int_\omega \sigma_{ij}^\varepsilon \nu_j (\varphi_i - u_i^\varepsilon)\, dx'.$$

En utilisant : $\sigma^{\varepsilon}_{ij}\nu_j = \sigma^{\varepsilon}_{\tau_i} + \sigma^{\varepsilon}_{\nu}\nu_i$, il vient :

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma^{\varepsilon}_{ij}\nu_j \left(\varphi_i - u^{\varepsilon}_i\right) d\sigma = \int_{\omega} \sigma^{\varepsilon}_{\tau_i} \left(\varphi_i - u^{\varepsilon}_i\right) dx' + \int_{\omega} \sigma^{\varepsilon}_{\nu}\nu_i \left(\varphi_i - u^{\varepsilon}_i\right) dx',$$

et comme $\left(\varphi_i - u^{\varepsilon}_i\right)\nu_i = 0$, on a :

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma^{\varepsilon}_{ij}\nu_j \left(\varphi_i - u^{\varepsilon}_i\right) d\sigma = \int_{\omega} \sigma^{\varepsilon}_{\tau_i} \left(\varphi_i - u^{\varepsilon}_i\right) dx'.$$

Donc :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \sigma^{\varepsilon}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi_i - u^{\varepsilon}_i\right) dx'dx_3 - \int_{\omega} \sigma^{\varepsilon}_{\tau_i} \left(\varphi_i - u^{\varepsilon}_i\right) dx' + \int_{\Omega_\varepsilon} f^{\varepsilon}_i \left(\varphi_i - u^{\varepsilon}_i\right)\ dx\ = 0, \quad \forall \varphi \in K^{\varepsilon},$$

on ajoute et on retranche le terme $\displaystyle\int_{\omega} k^{\varepsilon} \left(|\varphi - s| - |u^{\varepsilon} - s|\right) dx'$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\varepsilon} \sigma^{\varepsilon}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi_i - u^{\varepsilon}_i\right) dx'dx_3 + \int_{\omega} k^{\varepsilon} \left(|\varphi - s| - |u^{\varepsilon} - s|\right) dx' \\ = &\int_{\omega} \sigma^{\varepsilon}_{\tau}. \left(\varphi - u^{\varepsilon}\right) dx' + \int_{\omega} k^{\varepsilon} \left(|\varphi - s| - |u^{\varepsilon} - s|\right) dx'. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.1, le deuxième membre s'écrit

$$\int_{\omega} (\sigma^{\varepsilon}_{\tau}. \left(\varphi - s\right) + k^{\varepsilon}|\varphi - s|) dx',$$

cette intégrale est positive, car

$$-\sigma^{\varepsilon}_{\tau}. \left(\varphi - s\right) \leq \left|\sigma^{\varepsilon}_{\tau}. \left(\varphi - s\right)\right| \leq \left|\sigma^{\varepsilon}_{\tau}\right|. \left|\left(\varphi - s\right)\right| \leq k^{\varepsilon}|\varphi - s|.$$

En remplaçant $\sigma^{\varepsilon}_{ij}$ par sa valeur, on obtient alors l'inéquation variationnelle :

$$a\left(u^{\varepsilon}, \varphi - u^{\varepsilon}\right) + b^{\varepsilon}\left(p^{\varepsilon}, \varphi - u^{\varepsilon}\right) + J^{\varepsilon}\left(\varphi\right) - J^{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon}\right) \geq \left(f^{\varepsilon}, \varphi - u^{\varepsilon}\right), \quad \forall \varphi \in K^{\varepsilon}. \tag{2.15}$$

Si nous choisissons la fonction test φ dans $K^{\varepsilon}_{\mathbf{div}}$, on trouve le problème variationnel en vitesse

$$(PV^{\varepsilon}_2) \left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver} \quad u^{\varepsilon} \in K^{\varepsilon}_{\mathbf{div}} \quad \text{telle que} \\ a\left(u^{\varepsilon}, \varphi - u^{\varepsilon}\right) + b^{\varepsilon}\left(p^{\varepsilon}, \varphi - u^{\varepsilon}\right) + J^{\varepsilon}\left(\varphi\right) - J^{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon}\right) \geq \left(f^{\varepsilon}, \varphi - u^{\varepsilon}\right), \ \forall \varphi \in K^{\varepsilon}_{\mathbf{div}}. \end{array} \right.$$

$\square$

2.3 Existence et unicité de la solution

Nous rappelons un théorème d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles de $2^{\text{ème}}$ espèce que nous appliquerons pour étudier le problème variationnel (PV_2^ε).

Théorème 2.1. ([11]).

Soient K un convexe fermé non-vide d'un espace de Hilbert H, muni de la norme $\|.\|_H$, $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, et J une fonctionnelle de K dans $\bar{\mathbb{R}}$ convexe, semi-continue inférieurement et propre, alors pour tout forme linéaire $\mathcal{L}$ définie sur H, il existe un unique u dans H solution de l'inéquation variationnelle :

$$a(u, v-u) + J(v) - J(u) \geq \mathcal{L}(v-u).$$

Théorème 2.2. *Supposons que $f^\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)^3$, $k^\varepsilon \in L^\infty(\omega)$ et $k^\varepsilon \geq 0$ presque partout sur ω. Alors, il existe un et un seul u^ε dans $K^\varepsilon_{\mathbf{div}}$ solution le problème (PV_2^ε).*

Démonstration. La forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercive sur $K^\varepsilon_{\mathbf{div}} \times K^\varepsilon_{\mathbf{div}}$. En effet, soit v^ε un élément de $K^\varepsilon_{\mathbf{div}}$. Par l'inégalité de Korn, on obtient

$$a(v^\varepsilon, v^\varepsilon) = 2\mu \int_{\Omega_\varepsilon} |d_{ij}(v^\varepsilon)|^2 \, dx \geq 2\mu C_k \|v^\varepsilon\|^2_{1,\Omega_\varepsilon},$$

où $C_k > 0$, est la constante de Korn.

La forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue sur $K^\varepsilon_{\mathbf{div}} \times K^\varepsilon_{\mathbf{div}}$. Soit u^ε et v^ε deux éléments de $K^\varepsilon_{\mathbf{div}}$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned} |a(u^\varepsilon, v^\varepsilon)| &\leq 2\mu \left(\sum_{i,j=1}^{3} \|d_{ij}(u^\varepsilon)\|^2_{0,\Omega_\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j=1}^{3} \|d_{ij}(v^\varepsilon)\|^2_{0,\Omega_\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\mu \|u^\varepsilon\|_{1,\Omega_\varepsilon} \|v^\varepsilon\|_{1,\Omega_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Comme J est une fonctionnelle convexe, semi-continue inférieurement et propre, le théorème précédent montre l'existence et l'unicité de la solution du problème (PV_2^ε). $\square$

Théorème 2.3.

Sous les mêmes hypothèses du Théorème 2.2, il existe $u^\varepsilon \in K^\varepsilon_{\mathbf{div}}$ unique et il existe $p^\varepsilon \in L^2_0(\Omega_\varepsilon)$ unique, solutions du problème (PV_1^ε).

Démonstration. Soit u^ε une solution de problème (PV_2^ε) , alors

$$a\left(u^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon\right) + J^\varepsilon\left(\varphi\right) - J^\varepsilon\left(u^\varepsilon\right) \geq \left(f^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon\right), \ \forall\varphi \in K^\varepsilon_{\mathbf{div}}. \tag{2.16}$$

En choisissant $\varphi = u^\varepsilon \pm \psi$ avec $\psi \in H^1_{0,\mathbf{div}}\left(\Omega_\varepsilon\right) 0^3$ dans (2.16) où

$$H^1_{0,\mathbf{div}}\left(\Omega_\varepsilon\right)^3 = \left\{v \in H^1_0\left(\Omega_\varepsilon\right)^3 : \ \mathrm{div}(v) = 0\right\},$$

on trouve l'équation :

$$a\left(u^\varepsilon, \psi\right) = 0, \quad \forall\psi \in H^1_{0,\mathbf{div}}\left(\Omega_\varepsilon\right)^3.$$

Donc

$$2\mu \int_{\Omega_\varepsilon} d_{ij}\left(u^\varepsilon\right).d_{ij}\left(\psi\right) dx' dx_3 - \int_{\Omega_\varepsilon} f^\varepsilon.\psi dx' dx_3 = 0, \quad \forall\psi \in H^1_{0,\mathbf{div}}\left(\Omega_\varepsilon\right)^3,$$

d'où, en appliquant la formule de Green :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (Div\ (2\mu D(u^\varepsilon)) + f^\varepsilon).\psi dx = 0, \quad \forall\psi \in H^1_{0,\mathbf{div}}\left(\Omega_\varepsilon\right)^3.$$

Cette égalité reste valable pour l'espace

$$V = \left\{v \in \mathcal{D}\left(\Omega_\varepsilon\right)^3 : \ \mathrm{div}(v) = 0\right\},$$

c'est à dire

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (Div\ (2\mu D(u^\varepsilon)) + f^\varepsilon).\psi dx = 0, \quad \forall\psi \in V.$$

On déduit donc qu'il existe $p^\varepsilon \in H^{-1}\left(\Omega_\varepsilon\right)^3$ tel que [9]

$$Div\ (2\mu D(u^\varepsilon)) + f^\varepsilon = \nabla p^\varepsilon, \quad \text{p.p dans } \Omega_\varepsilon,$$

ce qui montre que

$$Div\ \sigma + f \ = 0, \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon. \tag{2.17}$$

Montrons que u^ε vérifie la condition aux limites de Tresca (2.9). On multiplie l'équation (2.17) par $(\varphi - u^\varepsilon)$ avec $\varphi \in K^\varepsilon_{\mathbf{div}}$ et on applique la formule de Green, on obtient

$$a\left(u^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon\right) = \int_\omega \sigma^\varepsilon_\tau.\left(\varphi - u^\varepsilon\right) dx', \quad \forall\varphi \in K^\varepsilon_{\mathbf{div}},$$

donc (2.16) s'écrit

$$\int_\omega \sigma^\varepsilon_\tau.\left(\varphi - u^\varepsilon\right) dx' + \int_\omega k^\varepsilon|\varphi - s| dx' - \int_\omega k^\varepsilon|u^\varepsilon - s| dx' \geq 0, \quad \forall\varphi \in K^\varepsilon_{\mathbf{div}}. \tag{2.18}$$

On choisit dans (2.18), $\varphi = u^\varepsilon + \psi$ avec $\psi = (\psi_1, \psi_2, 0) \in H^1_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega_\varepsilon)^3$ et $\mathbf{div}(\psi) = 0$, on trouve :

$$\int_\omega \sigma_\tau^\varepsilon.\psi dx' + \int_\omega k^\varepsilon |\psi + u^\varepsilon - s| dx' - \int_\omega k^\varepsilon |u^\varepsilon - s| dx' \geq 0, \quad \forall \psi \in H^1_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega_\varepsilon)^3 .$$

Cette égalité reste vraie pour tout $\psi \in L^2(\omega)^2$, c-à-d

$$\int_\omega \sigma_\tau^\varepsilon.\psi dx' + \int_\omega k^\varepsilon |\psi + u_\tau^\varepsilon - s| dx' - \int_\omega k^\varepsilon |u_\tau^\varepsilon - s| dx' \geq 0, \quad \forall \psi \in L^2(\omega)^2 , \tag{2.19}$$

prenant dans (2.19) $\psi = u_\tau^\varepsilon - s$, on trouve l'inégalité

$$\int_\omega \left(\sigma_\tau^\varepsilon . \left(u_\tau^\varepsilon - s \right) + k^\varepsilon |u_\tau^\varepsilon - s| \right) dx' \geq 0.$$

De la même façon, si $\psi = s - u_\tau^\varepsilon$, on obtient facilement l'inégalité inverse, par conséquent on a :

$$\int_\omega \left(\sigma_\tau^\varepsilon . \left(u_\tau^\varepsilon - s \right) + k^\varepsilon |u_\tau^\varepsilon - s| \right) dx' = 0,$$

et comme $\sigma_\tau^\varepsilon . \left(u_\tau^\varepsilon - s \right) + k^\varepsilon |u_\tau^\varepsilon - s|$ est positive, on déduit que

$$\sigma_\tau^\varepsilon . \left(u_\tau^\varepsilon - s \right) + k^\varepsilon |u_\tau^\varepsilon - s| = 0 \quad \text{presque partout sur } \omega,$$

d'où la solution u^ε vérifie la condition aux limites de Tresca (2.9). □

Chapitre 3

Analyse asymptotique du problème

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'analyse asymptotique de ce problème en faisant un changement d'échelle, ce qui nous a permis de ramener l'étude sur un nouveau domaine indépendant du paramètre ε. Grâce à des estimations a priori indépendantes de ε, nous avons montré le théorème essentiel de convergence permettant de passer à la limite lorsque ε tend vers zéro et de montrer donc l'existence et l'unicité de la solution du problème limite.

3.1 Transposer le problème sur un domaine fixe Ω

Pour l'analyse asymptotique de notre problème, on utilise le changement d'échelle $z = \dfrac{x_3}{\varepsilon}$.

Comme dans [2] cette méthode consiste à transposer le problème initialement posé dans le domaine Ω_ε en un problème équivalent posé sur un domaine Ω indépendant de ε, où

$$\Omega = \{(x', z) \in \mathbb{R}^3, (x', 0) \in \omega \ et \ \ 0 < z < h(x')\}.$$

On note $\Gamma = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_L$ sa frontière.

Nous définissons maintenant sur Ω des nouvelles inconnues

$$\begin{cases} \hat{u}_i^\varepsilon(x', z) = u_i^\varepsilon(x', x_3), \\ \hat{u}_3^\varepsilon(x', z) = \varepsilon^{-1} u_3^\varepsilon(x', x_3), \\ \hat{p}^\varepsilon(x', z) = \varepsilon^2 p^\varepsilon(x', x_3). \end{cases} \tag{3.1}$$

Pour les données du problème $\left(Pb_f^\varepsilon\right)$, on suppose qu'elles dépendent de ε de la manière suivante :

$$\begin{cases} \hat{k} = \varepsilon k^\varepsilon, \\ \hat{f}(x', z) = \varepsilon^2 f^\varepsilon(x', x_3) \\ \hat{g}(x', z) = g^\varepsilon(x', x_3), \end{cases} \tag{3.2}$$

avec $\hat{k}$ et $\hat{g}$ ne dépend pas de ε.

Soit $\hat{G}(x, z)$ tel que :

$$\hat{G} = \hat{g} \ \text{ sur } \Gamma.$$

Le vecteur G^ε introduit précédemment sera défini de la manière suivante :

$$\begin{cases} \hat{G}_i(x', z) = G_i^\varepsilon(x', x_3) \quad i = 1, 2, \\ \hat{G}_3(x', z) = \varepsilon^{-1} G_3^\varepsilon(x', x_3). \end{cases} \tag{3.3}$$

Formulation variationnelle du problème dans Ω

Nous introduisons maintenant le cadre fonctionnel sur Ω comme ce qui suit

$$K = \left\{\varphi \in H^1(\Omega)^3 : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_L \cup \Gamma_1 \text{ et } \varphi.\nu = 0 \text{ sur } \omega\right\},$$

$$K_{\mathbf{div}} = \{v \in K : \ \operatorname{div}(v) = 0\},$$

$$V_z = \left\{ v = (v_1, v_2) \in L^2(\Omega)^2 : \frac{\partial v_i}{\partial z} \in L^2(\Omega), i = 1, 2 \text{ et } \ v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}.$$

V_z est un espace de Banach pour la norme :

$$\|v\|_{V_z} = \left(\sum_{i=1}^{2} \|v_i\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial v_i}{\partial z} \right\|^2_{0,\Omega} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Pi(K) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega)^2 : \varphi = (\varphi_1, \varphi_2), \varphi_i = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_L \text{ pour } i = 1, 2 \right\},$$

$$L^2_0(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q \, dx' dz = 0 \right\}.$$

En multipliant (2.15) par ε et en passant au domaine fixé Ω on montre que le problème variationnel est équivalent au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \ \hat{u}^\varepsilon \in K_{\mathbf{div}}, \ \hat{p}^\varepsilon \in L^2_0(\Omega) \ \text{ telle que} \\ \hat{a}(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) + b(\hat{p}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) + J(\hat{\varphi}) - J(\hat{u}^\varepsilon) \\ \geq \sum_{i=1}^{2} \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \hat{u}^\varepsilon_i \right) + \varepsilon \left(\hat{f}_3, \hat{\varphi}_3 - \hat{u}^\varepsilon_3 \right), \ \ \forall \hat{\varphi} \in K, \end{array} \right. \tag{3.4}$$

où

$$\begin{aligned} \hat{J}(\hat{\varphi}) &= \int_\omega \hat{k} \, |\hat{\varphi} - s| \, dx', \\ b(\hat{p}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) &= -\int_\Omega \hat{p}^\varepsilon \mathbf{div}(\hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) dx, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \hat{a}(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) &= \mu\varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}^\varepsilon_i) \, dx' dz \\ &+ \mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_i}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_3}{\partial x_i} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}^\varepsilon_i) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}^\varepsilon_3) \right] dx' dz + \\ &\mu\varepsilon^2 \int_\Omega \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_3}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}^\varepsilon_3) \, dx' dz. \end{aligned}$$

3.2 Estimation à priori sur la vitesse et la pression

Nous essayons maintenant d'étudier les estimations à priori sur $\hat{u}^\varepsilon$ et $\hat{p}^\varepsilon$.

Pour cela nous avons besoin d'établir le lemme suivant :

Lemme 3.1. ***(Inégalité de Poincaré)****([10]).*

On rappelle que $0 < h(x') < h^*$, $\forall x' \in \omega$, *on a l'inégalité suivante :*

$$\|\hat{u}_i^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq h^* \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{0,\Omega}. \tag{3.5}$$

Démonstration. La démonstration de lemme 3.1 peut être trouvée dans [10] : Cependant, nous allons montrer la deuxième relation mentionnée ci-dessus. Soit $0 < z < h(x')$, on a

$$\hat{u}_i^\varepsilon (x', z) = -\int_z^{h(x')} \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial \zeta} (x', \zeta)\, d\zeta + u_i^\varepsilon (x', h(x')), \quad i = 1, 2, 3$$

et comme $u_i^\varepsilon (x, h(x)) = 0$, alors :

$$\hat{u}_i^\varepsilon (x', z) = -\int_z^{h(x')} \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial \zeta} (x', \zeta)\, d\zeta.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on voit que :

$$|\hat{u}_i^\varepsilon (x', z)|^2 \leq (h^*) \int_0^{h(x')} \left| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial \zeta} (x', \zeta) \right|^2 d\zeta.$$

Nous intégrons par rapport à z de 0 à $h(x)$, on obtient

$$\int_0^{h(x')} |\hat{u}_i^\varepsilon (x', z)|^2 dz \leq (h^*)^2 \int_0^{h(x)} \left| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial \zeta} (x', \zeta) \right|^2 d\zeta,$$

en intégrant l'inéquation précédente sur ω, on trouve :

$$\int_\omega \int_0^{h(x')} |\hat{u}_i^\varepsilon (x', z)|^2 dz dx' \leq (h^*)^2 \int_\omega \int_0^{h(x')} \left| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial \zeta} (x', \zeta) \right|^2 d\zeta dx'$$

$$\|\hat{u}_i^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq h^* \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{0,\Omega}.$$

□

Lemme 3.2.

Soit k^ε *est une fonction positive dans* $L^\infty(\omega)$, *il existe une constante* $C > 0$ *ne dépend pas de* ε *telle que :*

$$\varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^2 \left(\left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{0,\Omega}^2 + \varepsilon^4 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right) + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{0,\Omega}^2 \leq C. \tag{3.6}$$

Démonstration. Soit u^ε la solution du problème (PV_2^ε), donc

$$a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq a(u^\varepsilon, \varphi) + J^\varepsilon(\varphi) - J^\varepsilon(u^\varepsilon) + (f^\varepsilon, u^\varepsilon) - (f^\varepsilon, \varphi) \quad \forall \varphi \in K_{\mathbf{div}},$$

et comme $J^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}) \geq 0$, on a

$$a(u^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}) \leq a(u^{\varepsilon}, \varphi) + J^{\varepsilon}(\varphi) + (f^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}) - (f^{\varepsilon}, \varphi) \qquad \forall \varphi \in K_{\mathbf{div}}.$$

De l'inégalité de Korn, il existe C_K indépendant de ε telle que :

$$2\mu C_K \|\nabla u^{\varepsilon}\|_{0,\Omega_{\varepsilon}}^2 \leq a(u^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}). \tag{3.7}$$

Par l'inégalité Cauchy-Schwarz et (2.16)

$$\begin{aligned} (f^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}) &\leq \|f^{\varepsilon}\|_{0,\Omega_{\varepsilon}} \|u^{\varepsilon}\|_{0,\Omega_{\varepsilon}} \\ &\leq \sqrt{2\overline{h}}\varepsilon \|f^{\varepsilon}\|_{0,\Omega_{\varepsilon}} \|\nabla u^{\varepsilon}\|_{0,\Omega_{\varepsilon}}, \end{aligned}$$

nous utilisons l'inégalité de Young

$$ab \leq \eta^2 \frac{a^2}{2} + \eta^{-2} \frac{b^2}{2}, \ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \ \forall \eta \in \mathbb{R}$$

pour $\eta = \sqrt{\mu C_K/2}$, $a = \|\nabla u^{\varepsilon}\|_{0,\Omega_{\varepsilon}}$ et $b = \sqrt{2\overline{h}}\varepsilon \|f^{\varepsilon}\|_{0,\Omega_{\varepsilon}}$, on déduit

$$\begin{aligned} (f^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}) &\leq \sqrt{2\overline{h}}\varepsilon \|f^{\varepsilon}\|_{0,\Omega_{\varepsilon}} \|\nabla u^{\varepsilon}\|_{0,\Omega_{\varepsilon}} && (3.8) \\ &\leq \frac{\mu C_K}{4} \|\nabla u^{\varepsilon}\|_{0,\Omega_{\varepsilon}}^2 + \left(\frac{2\overline{h}^2 \varepsilon^2}{\mu C_K} \right) \|f^{\varepsilon}\|_{0,\Omega_{\varepsilon}}^2. && (3.9) \end{aligned}$$

De même on a :

$$(f^{\varepsilon}, \varphi) \leq \frac{\mu C_K}{4} \|\nabla \varphi\|_{0,\Omega_{\varepsilon}}^2 + \left(\frac{2\overline{h}^2 \varepsilon^2}{\mu C_K} \right) \|f^{\varepsilon}\|_{0,\Omega_{\varepsilon}}^2. \tag{3.10}$$

En appliquant les inégalités de Hölder et de Young, il vient

$$\begin{aligned} 2a(u^{\varepsilon}, \varphi) &\leq \int_{\Omega_{\varepsilon}} 4\mu \left| d(u^{\varepsilon}) \right| . \left| d(\varphi) \right| \, dx + \\ &\leq \int_{\Omega_{\varepsilon}} 2 \left(\sqrt{\frac{\mu C_K}{4}} \left| d(u^{\varepsilon}) \right| \right) . \left(\sqrt{\frac{16\mu}{C_K}} \left| d(\varphi) \right| \right) \, dx \\ &\leq \frac{\mu C_K}{4} \int_{\Omega_{\varepsilon}} \left| d(u^{\varepsilon}) \right|^2 dx + \frac{16\mu}{C_K} \int_{\Omega_{\varepsilon}} \left| d(\varphi) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Korn, et le fait
$\sum_{i,j=1}^{3} |d_{ij}(\varphi)|^2 \leq |\nabla \varphi|^2$, l'inégalité présidente devient comme suite

$$2\mu C_K \|\nabla u^{\varepsilon}\|_{0,\Omega_{\varepsilon}}^2 \leq \frac{\mu C_K}{2} \|\nabla u^{\varepsilon}\|_{0,\Omega_{\varepsilon}}^2 + J^{\varepsilon}(\varphi) + \frac{16\mu}{C_K} \|\nabla \varphi\|_{0,\Omega_{\varepsilon}}^2 + \frac{\mu C_K}{4} \|\nabla \varphi\|_{0,\Omega_{\varepsilon}}^2 + \left(\frac{4\overline{h}^2 \varepsilon^2}{\mu C_K} \right) \|f^{\varepsilon}\|_{0,\Omega_{\varepsilon}}^2.$$

En choisissant $\varphi = G^\varepsilon$ et en multipliant par ε, on trouve :

$$\frac{3}{2}\mu C_K \varepsilon \left\| \nabla u^\varepsilon \right\|^2_{0,\Omega_\varepsilon} \leq \left(\frac{16\mu}{C_K} + \frac{\mu C_K}{4} \right) \varepsilon \left\| \nabla G^\varepsilon \right\|^2_{0,\Omega_\varepsilon} + \left(\frac{4\overline{h}^2}{\mu C_K} \right) \varepsilon^3 \left\| f^\varepsilon \right\|^2_{0,\Omega_\varepsilon}.$$

Pour $0 < \varepsilon < 1$, en faisant un changement de domaine, on trouve

$$\varepsilon \left\| \nabla G^\varepsilon \right\|^2_{0,\Omega_\varepsilon} \leq \left\| \nabla \hat{G} \right\|^2_{0,\Omega}$$

$$\varepsilon^3 \left\| f^\varepsilon \right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} = \left\| \hat{f} \right\|^2_{0,\Omega}.$$

En passant au domaine fixe Ω de l'inégalité (.,.) on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\| \nabla u^\varepsilon \right\|^2_{0,\Omega_\varepsilon} &= \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{2} \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|^2_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^{2} \left(\left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|^2_{0,\Omega} + \varepsilon^4 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|^2_{0,\Omega} \right) + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|^2_{0,\Omega} \\ &\leq C, \end{aligned} \tag{3.11}$$

où

$$C = \left(\frac{3}{2}\mu C_K \right)^{-1} \left\{ \left(\frac{16\mu}{C_K} + \frac{\mu C_K}{4} \right) \left\| \nabla \hat{G} \right\|^2_{0,\Omega} + \frac{4\overline{h}^2}{\mu C_K} \left\| \hat{f} \right\|^2_{0,\Omega} \right\}.$$

□

Lemme 3.3.

Sous les hypothèses des théorèmes 3.1 *alors, il existe une constante positive* C' *ne dépend pas de* ε *telle que :*

$$\left\| \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C', \quad i = 1, 2, \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C', \tag{3.13}$$

$$\left\| \nabla \hat{p}^\varepsilon \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C'. \tag{3.14}$$

Démonstration. Soient u^ε et p^ε des solutions du problème (PV_1^ε), alors

$$a(u^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon) + b^\varepsilon(p^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon) + J^\varepsilon(\varphi) - J^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon), \quad \forall \varphi \in K^\varepsilon.$$

En prenant $\varphi = u^\varepsilon \pm \psi$ avec $\psi \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)^3$, on trouve donc l'égalité suivante :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} dx' dx_3 = 2\mu \int_{\Omega_\varepsilon} d_{ij}(u^\varepsilon) . d_{ij}(\psi) \, dx' dx_3 - \int_{\Omega_\varepsilon} f^\varepsilon . \psi dx' dx_3, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)^3.$$

En utilisant les inégalités de Hölder, de Poincaré puis l'estimation (3.11), on trouve la majoration suivante :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} dx' dx_3\right| &\leq 2\mu \left\|d\left(u^\varepsilon\right)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon} \left\|d\left(\psi\right)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon} + \left\|f^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_\varepsilon} \left\|\psi\right\|_{0,\Omega_\varepsilon} \\ &\leq 2\mu \left\|\nabla u^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_\varepsilon} \left\|\nabla \psi\right\|_{0,\Omega_\varepsilon} + \left\|f^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_\varepsilon} \varepsilon h^* \left\|\nabla \psi\right\|_{0,\Omega_\varepsilon} \\ &\leq \left(2\mu C + h^* \left\|\hat{f}\right\|_{0,\Omega}\right) \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \left\|\nabla \psi\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}.\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\left|\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} dx' dx_3\right| \leq C' \left\|\nabla \hat{\psi}\right\|_{0,\Omega} \tag{3.15}$$

avec

$$C' = 2\mu C + h^* \left\|\hat{f}\right\|_{0,\Omega}$$

(ne dépend pas de ε).

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} dx' dx_3 &= \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{p}^\varepsilon \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial x_i} dx' dz + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \hat{p}^\varepsilon \frac{\partial \hat{\psi}_3}{\partial z} dx' dz \\ &= -\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_i} \hat{\psi}_i dx' dz - \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial z} \hat{\psi}_3 dx' dz.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Par conséquent, si $\hat{\psi}_1 = 0$ et $\hat{\psi}_3 = 0$, on a :

$$\int_\Omega \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_2} \hat{\psi}_2 dx' dz \leq C' \left\|\hat{\psi}_2\right\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall \hat{\psi}_2 \in H_0^1\left(\Omega\right),$$

donc

$$\left\|\frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_2}\right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C'.$$

Pour $\hat{\psi}_2 = 0$ et $\hat{\psi}_3 = 0$, on obtient

$$\left\|\frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}\right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C'.$$

Pour $\hat{\psi}_1 = 0$ et $\hat{\psi}_2 = 0$, on a :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial z} \hat{\psi}_3 dx' dz \leq C' \left\|\hat{\psi}_3\right\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall \hat{\psi}_3 \in H_0^1\left(\Omega\right),$$

donc

$$\frac{1}{\varepsilon} \left\|\frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C'.$$

On déduit de (3.16) que

$$\|\nabla \hat{p}^{\varepsilon}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C'.$$

$\square$

3.3 Résultat de convergence et problème limite

Théorème 3.1.

Sous les hypothèses des lemmes 3.2-3.3, il existe $(u_i^*)_{i=1,2}$ dans V_z et p^* dans $L_0^2(\Omega)$ tel que ; pour toute sous suites de $\hat{u}^{\varepsilon}$ et $\hat{p}^{\varepsilon}$ notées encore $\hat{u}^*$ et p^* on a les résultats de convergences suivants :

$$\hat{u}_i^{\varepsilon} \rightharpoonup u_i^* \quad i = 1,2 \text{ faiblement dans } V_z, \tag{3.17}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial x_j} \rightharpoonup 0 \quad i,j = 1,2 \text{ faiblement dans } L^2(\Omega), \tag{3.18}$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \quad i = 1,2 \text{ faiblement dans } L^2(\Omega), \tag{3.19}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial z} \rightharpoonup 0 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \tag{3.20}$$

$$\varepsilon \hat{u}_3^{\varepsilon} \rightharpoonup 0 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \tag{3.21}$$

$$\hat{p}^{\varepsilon} \rightharpoonup p^* \quad \text{faiblement dans } L_0^2(\Omega). \tag{3.22}$$

De plus, les solutions limites (u^*, p^*) vérifient :

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} = 0 \text{ dans } \Omega, \tag{3.23}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} p^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} dx' dz = 0. \tag{3.24}$$

Démonstration. D'après le lemme 3.2, il existe une constante C indépendante de ε telle que :

$$\left\| \frac{\partial \hat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial z} \right\|_{0,\Omega}^2 \leq C \,, \qquad i = 1,2.$$

En utilisant cette estimation avec l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\|\hat{u}_i^{\varepsilon}\|_{0,\Omega} \leq h^* \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial z} \right\|_{0,\Omega}, \ i = 1,2.$$

C'est-à-dire que u_i^ε est borné dans V_z pour $i = 1, 2$, ceci implique l'existence de u_i^* dans V_z tel que ; u_i^ε converge faiblement vers u_i^* dans V_z.

D'autre part, grâce au lemme3.2, on a :

$$\left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega} \leq C,$$

alors il existe un élément $l \in L^2(\Omega)$ telle que $\varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}$ converge faiblement vers l. De plus, il vient de (3.17) que $\dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}$ converge vers $\dfrac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial x_j}$, donc pour tout $\varphi \in L^2(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \varphi dx' dz = \varepsilon \int_\Omega \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \varphi dx' dz.$$

Lorsque ε tend vers 0, on obtient

$$\int_\Omega l \varphi dx' dz = 0,$$

et donc $l = 0$ dans $L^2(\Omega)$. Ce qui donne la convergence faible de (3.18).
De même grâce à l'inégalité $\left\| \varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \leq C$, on a la convergences de $\varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}$ vers une fonction l dans $L^2(\Omega)$. De même, par l'estimation : $\varepsilon^2 \left\| \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{0,\Omega}^2 \leq C$ et l'inégalité de Poincaré, on a :

$$\left\| \varepsilon^2 \hat{u}_3^\varepsilon \right\|_{0,\Omega}^2 \leq h^{*2} \varepsilon^4 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{0,\Omega}^2 \leq h^{*2} \varepsilon^2 C,$$

cela implique que $\varepsilon^2 \hat{u}_3^\varepsilon$ converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j} \right) \varphi dx' dz = -\int_\Omega \left(\varepsilon^2 \hat{u}_3^\varepsilon \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx' dz,$$

Lorsque ε tendre vers 0, on trouve :

$$\int_\Omega l \varphi dx' dz = 0.$$

En utilisant la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on obtient $l = 0$ dans $L^2(\Omega)$.

Nous utilisons le fait que $\operatorname{div}(\hat{u}^\varepsilon) = 0$ et les convergences de (3.18), on obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} &= -\sum_{i=1}^{2} \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_i}, \\ \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_i} &\rightharpoonup 0 \quad i = 1, 2 \textit{ faiblement dans } L^2(\Omega), \end{aligned}$$

ce qui donne la convergence faible de (3.20).

On déduit de (3.5)-(3.6) que

$$\|\varepsilon\hat{u}_3^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq h^*\varepsilon \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{0,\Omega} \leq C,$$

on a donc la convergences de $\varepsilon\hat{u}_3^\varepsilon$ vers une fonction l dans $L^2(\Omega)$ et $\varepsilon\dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}$ converge faiblement vers $\dfrac{\partial l}{\partial z}$ dans $L^2(\Omega)$. D'après (3.21) et l'unicité de la limite faible, on déduit que $\dfrac{\partial l}{\partial z} = 0$, c'est-à-dire que l ne dépend pas de la variable z.

D'autre part, $\varepsilon\hat{u}_3^\varepsilon \rightharpoonup l$ implique $\gamma(\varepsilon\hat{u}_3^\varepsilon) \to \gamma(l)$ tel que : γ l'application de trace, mais $\gamma(\varepsilon\hat{u}_3^\varepsilon) = \varepsilon\hat{u}_3^\varepsilon(x', 0) = 0$, donc $\gamma(l) = l = 0$ sur ω, de sorte que $l = 0$ dans Ω.

Pour démontrer (3.22), on utilise (3.14) avec l'inégalité suivante [12] :

$$\|\hat{p}^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq K \left(\|\nabla \hat{p}^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} + \int_\Omega \hat{p}^\varepsilon dxdz \right).$$

Comme $\hat{p}^\varepsilon \in L_0^2(\Omega)$, on déduit que :

$$\|\hat{p}^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq C'' \text{ où } C'' = KC'.$$

Ce qui montre qu'il existe une sous suite extraire $\hat{p}^\varepsilon$ converge faiblement vers p^* dans $L^2(\Omega)$.

En plus p^* appartient à $L_0^2(\Omega)$, car $L_0^2(\Omega)$ est un sous espace fermé dans $L^2(\Omega)$.

Grâce au (3.13), on a pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\left| \left\langle \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial z}, \varphi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \right| \leq \left\| \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \varepsilon C \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.25}$$

Et comme $\left\langle \dfrac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial z}, \varphi \right\rangle = -\left\langle \hat{p}^\varepsilon, \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \right\rangle$, alors (3.25) est implique que

$$\left| -\left\langle \hat{p}^\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \right| \leq \varepsilon C \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)},$$

on passe ε au zéro, et en utilisant la convergence faible de (3.22), on trouve :

$$\left\langle p^*, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

ce que implique que

$$-\left\langle \frac{\partial p^*}{\partial z}, \varphi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

d'où (3.23).

En multipliant l'équation $\mathbf{div}\,(\hat{u}^\varepsilon) = 0$ par $p^* \in L^2(\Omega)$ et en intégrant, on obtient

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega p^* \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_i} + \int_\Omega p^* \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} = 0.$$

Par la formule de Green, on trouve :

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega p^* \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_i} - \int_\Omega \frac{\partial p^*}{\partial z} \hat{u}_3^\varepsilon + \int_{\Gamma_1} p^* \hat{u}_3^\varepsilon \nu_3 d\sigma = 0. \tag{3.26}$$

On rappelle que $\hat{u}_3^\varepsilon = 0$ sur Γ, et comme $\dfrac{\partial p^*}{\partial z} = 0$ dans Ω, donc (3.26) devient

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega p^* \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_i} = 0,$$

lorsque ε tendre vers 0, et en utilisant (3.17), on obtient (3.24). □

Théorème 3.2.

Avec les mêmes hypothèses du théorème 3.1, la solution limite (u^*, p^*) vérifie les formules suivantes :

$$\begin{aligned} &\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u_i^*}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - u_i^*)\, dx' dz - \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega p^* \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\varphi}_i - u_i^*)\, dx' dz + \\ &+ J(\hat{\varphi}) - J(u^*) \geq \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i (\hat{\varphi}_i - u_i^*) dx' dz, \qquad \forall \hat{\varphi} \in \Pi(K), \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$-\mu \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2} = \hat{f}_i - \frac{\partial p^*}{\partial x_i} \qquad \textit{pour} \quad i = 1, 2 \qquad \textit{dans } H^{-1}(\Omega). \tag{3.28}$$

Démonstration. L'inéquation variationnelle (3.4) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} &\hat{a}(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi}) - \int_\Omega \hat{p}^\varepsilon \mathbf{div}(\hat{\varphi}) dx' dz + \int_\omega \hat{k}\, |\hat{\varphi} - s|\, dx' \geq \int_\omega \hat{k}\, |\hat{u}^\varepsilon - s|\, dx' + \hat{a}(\hat{u}^\varepsilon, \hat{u}^\varepsilon) \\ &+ \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon)\, dx' dz + \varepsilon \int_\Omega \hat{f}_3 (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon)\, dx' dz, \quad \forall \hat{\varphi} \in K. \end{aligned}$$

En passant à la limite et en utilisant les résultats de convergence du théorème 3.1, avec la semi-continuité inférieurement de J, on obtient donc

$$\begin{aligned} &\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u_i^*}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - u_i^*)\, dx' dz - \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega p^* \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial x_i} dx' dz - \\ &\int_\Omega p^* \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial z} dx' dz + \int_\omega \hat{k}\, |\hat{\varphi} - s|\, dx' \geq \int_\omega \hat{k}\, |u^* - s|\, dx' + \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i (\hat{\varphi}_i - u_i^*) dx' dz. \end{aligned} \tag{3.29}$$

On utilise les notations des (3.23) (3.24), alors (3.27) est immédiat.

On choisit maintenant dans l'inéquation variationnelle (3.27)

$$\hat{\varphi}_i = u_i^* \pm \hat{\psi}_i,\ \hat{\psi}_i \in H_0^1(\Omega) \quad i = 1, 2,$$

et donc

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u_i^*}{\partial z} . \frac{\partial\, \hat{\psi}_i}{\partial z} dx' dz - \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega p^* \frac{\partial\, \hat{\psi}_i}{\partial x_i} dx' dz = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i \hat{\psi}_i dx' dz,\ \forall \hat{\psi} \in H_0^1(\Omega),$$

par la formule de **Green** , il résulte

$$-\mu \int_\Omega \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2} \psi_i dx' + \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial p^*}{\partial x_i} \hat{\psi}_i dx' dz = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i \hat{\psi}_i dx' dz.$$

En choisissant $\hat{\varphi}_1 = 0$ et $\hat{\varphi}_2 \in H_0^1(\Omega)$, puis $\hat{\varphi}_2 = 0$ et $\hat{\varphi}_1 \in H_0^1(\Omega)$, on trouve :

$$-\mu \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2} = \hat{f}_i - \frac{\partial p^*}{\partial x_i} \qquad \text{pour } i = 1, 2 \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

□

Théorème 3.3.

Sous les mêmes hypothèses du théorème 3.2, on a :

$$\int_\omega \hat{k} \left(|\psi + s^* - s| - |s^* - s| \right) dx' - \int_\omega \mu \tau^* \psi dx' \geq 0 \qquad \forall \psi \in L^2(\omega)^2, \tag{3.30}$$

$$\begin{cases} \mu |\tau^*| < \hat{k} \Rightarrow s^* = s \\ \mu |\tau^*| = \hat{k} \Rightarrow \exists \beta > 0 \text{ tel que } s^* = s + \beta \hat{\tau}^* \end{cases} \tag{3.31}$$

avec

$$\tau^*(x') = \frac{\partial u^*}{\partial z}(x', 0) \ \text{ et } \ s^*(x') = u^*(x', 0). \tag{3.32}$$

De plus u^* et p^* vérifient l'équation généralisée faible de Reynolds

$$\int_\omega \left(\frac{h^3}{12\mu} \nabla p^*(x') + \widetilde{F}(x') - \frac{h}{2} s^* + \int_0^h u^*(x', z)\, dz \right) . \nabla \psi(x')\, dx' = 0,\ \forall \psi \in H^1(\omega). \tag{3.33}$$

où $\widetilde{F}(x') = \int_0^h F(x', y)\, dy - \frac{h}{2} F(x', h),\ \ F(x', y) = \int_0^y \int_0^\xi \widehat{f^\varepsilon}(x', t)\, dt d\xi.$

Démonstration. On choisit dans (3.27), $\hat{\varphi} = u^* + \psi$ avec $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)^2$, donc

$$\begin{aligned} &\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i^*}{\partial z}\frac{\partial \psi_i}{\partial z}dx'dz - \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}p^*\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}dx'dz + \\ &\int_{\omega}\hat{k}\left|u^* + \psi - s\right|dx' - \int_{\omega}\hat{k}\left|u^* - s\right|dx' \\ \geq\ &\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{f}_i\psi_i dx'dz. \end{aligned}$$

Par la formule de **Green**, on obtient

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\mu\frac{\partial^2 \hat{u}_i^*}{\partial z^2}\psi_i dx'dz + \sum_{i=1}^{2}\int_{\omega}\mu\frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z}\psi_i\nu_3 dx' + \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial p^*}{\partial x_i}\psi_i dx'dz - \\ &-\sum_{i=1}^{2}\int_{\omega}p^*\psi_i\nu_i dx' + \int_{\omega}\hat{k}\left|u^* + \psi - s\right|dx' - \int_{\omega}\hat{k}\left|u^* - s\right|dx' \geq \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{f}_i\psi_i dx'dz, \end{aligned} \tag{3.34}$$

on utilise (3.28) et comme $\nu = (0, 0, -1)$ est le vecteur normal extérieur à ω, donc (3.34) entraîne que

$$\int_{\omega}\hat{k}\left(\left|\psi + s^* - s\right| - \left|s^* - s\right|\right)dx' - \int_{\omega}\mu\tau^*\psi dx' \geq 0 \qquad \forall\psi \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)^2,$$

telle que s^* et τ^* sont respectivement les traces de u^* et $\dfrac{\partial \hat{u}^*}{\partial z}$ sur ω. L'inégalité précédente est aussi valable pour tout $\psi \in (D(\omega))^2$ et par densité de $D(\omega)$ dans $L^2(\omega)$, on trouve (3.30). Pour (3.31), on utilisons l'analogue de $[5]$.

Pour démontrer (3.33), en intégrant deux fois (3.28) de 0 à z, c'est-à-dire que

$$-\int_0^z\int_0^{\zeta}\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial \eta^2}(x', y)\,dyd\zeta = \int_0^z\int_0^{\xi}\hat{f}_i(x', y)\,dyd\xi - \int_0^z\int_0^{\zeta}\frac{1}{\mu}\frac{\partial p^*}{\partial x_i}(x')\,dyd\zeta,$$

et donc

$$-u_i^*(x', z) + u_i^*(x', 0) + z\frac{\partial u_i^*}{\partial z}(x', 0) = \int_0^z\int_0^{\xi}\hat{f}_i(x', y)\,dyd\xi - \frac{z^2}{2\mu}\frac{\partial p^*}{\partial x_i}(x'), \tag{3.35}$$

utilisons les notations des (3.32) et on intègre de 0 à h, on obtient

$$-\int_0^h u_i^*(x', \theta)\,d\theta + hs_i^*(x') + \frac{h^2}{2}\tau_i^*(x') = \int_0^h F_i(x', y)\,dy - \frac{h^3}{6\mu}\frac{\partial p^*}{\partial x_i}(x'). \tag{3.36}$$

D'autre par, on prend $z = h$ dans (3.35), avec $u_i^*(x', h(x')) = 0$, on trouve :

$$s_i^*(x') + h\tau_i^*(x') = F_i(x', h) - \frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial p^*}{\partial x_i}(x'). \tag{3.37}$$

On déduit de (3.36)-(3.37) que

$$\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p^*}{\partial x_i}(x') + \widetilde{F}_i(x') - \frac{h}{2}s_i^*(x') + \int_0^h u_i^*(x',\theta)\,d\theta = 0,$$

donc

$$\frac{h^3}{12\mu}\nabla p^*(x') + \widetilde{F}(x') - \frac{h}{2}s^*(x') + \int_0^h u^*(x',\theta)\,d\theta = 0,$$

et donc (3.33) est prouvée. □

3.4 Unicité de la solution du problème limite

Théorème 3.4. *La solution* (u^*, p^*) *du problème limite* (3.27) (3.28) *est unique dans* $V_z \times L_0^2(\Omega)$.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux solution (u^1, p^1) et (u^2, p^2) de l'inéquation variationnelle (3.27), on a donc

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i^1}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_i - u_i^1\right)dx'dz - \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}p^1\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat{\varphi}_i - u_i^1\right)dx'dz + J(\varphi) - J\left(u_i^1\right)$$
$$\geq \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{f}_i(\hat{\varphi}_i - u_i^1)dx'dz \tag{3.38}$$

et

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i^2}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_i - u_i^2\right)dx'dz - \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}p^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat{\varphi}_i - u_i^2\right)dx'dz + J(\varphi) - J\left(u^2\right)$$
$$\geq \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{f}_i(\hat{\varphi}_i - u_i^2)dx'dz. \tag{3.39}$$

Prenant $\varphi = u^2$ dans (3.38) puis $\varphi = u^1$ dans (3.39) ,

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i^1}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(u_i^2 - u_i^1\right)dx'dz - \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}p^1\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i^2 - u_i^1\right)dx'dz + J\left(u^2\right) - J\left(u^1\right)$$
$$\geq \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{f}_i(u_i^2 - u_i^1)dx'dz \tag{3.40}$$

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i^2}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(u_i^1 - u_i^2\right)dx'dz - \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}p^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i^1 - u_i^2\right)dx'dz + J\left(u^1\right) - J\left(u^2\right)$$
$$\geq \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{f}_i(u_i^1 - u_i^2)dx'dz. \tag{3.41}$$

En sommant les deux inéquations (3.40) et (3.41), on obtient

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(u_i^1 - u_i^2\right) . \frac{\partial}{\partial z} \left(u_i^1 - u_i^2\right) dx'dz \leq 0,$$

ceci implique

$$\mu \left\| \frac{\partial}{\partial z} \left(u_i^1 - u_i^2\right) \right\|_{0,\Omega}^2 = 0.$$

Par l'inégalité de Poincaré, on trouve :

$$\left\|u_i^1 - u_i^2\right\|_{0,\Omega} \leq C \left\| \frac{\partial}{\partial z} \left(u_i^1 - u_i^2\right) \right\|_{0,\Omega}^2 = 0,$$

donc

$$u^1 = u^2 \quad \text{dans } V_z.$$

Pour prouver l'unicité de p^*, on utilise l'équation (3.33) pour (u^1, p^1) et (u^2, p^2) :

$$\int_{\omega} \left(\frac{h^3}{12\mu} \nabla p^1(x') + \widetilde{F}(x') - \frac{h}{2} s^* + \int_0^h u^1 (x', z)\, dz \right) . \nabla \psi (x')\, dx' = 0,\ \forall \psi \in H^1 (\omega), \quad (3.42)$$

$$\int_{\omega} \left(\frac{h^3}{12\mu} \nabla p^2(x') + \widetilde{F}(x') - \frac{h}{2} s^* + \int_0^h u^2 (x', z)\, dz \right) . \nabla \psi (x')\, dx' = 0,\ \forall \psi \in H^1 (\omega). \quad (3.43)$$

En retranchant (3.43) du (3.42), on obtient

$$\int_{\omega} \frac{h^3}{12\mu} \nabla \left(p^1 - p^2\right) . \nabla \psi \ dx'dxz = 0. \quad (3.44)$$

Nous pouvons prendre $\psi = p^1 - p^2$ dans (3.44), on déduit que

$$\int_{\omega} \frac{(h)^3}{12} \nabla \left(p^1 - p^2\right) . \nabla \left(p^1 - p^2\right) \ dx' = 0.$$

Mais

$$\frac{h_*^3}{12\mu} \left\|\nabla \left(p^1 - p^2\right)\right\|_{L^2(\omega)}^2 \leq \int_{\omega} \frac{h^3}{12\mu} \nabla \left(p^1 - p^2\right) . \nabla \left(p^1 - p^2\right) \ dx',$$

ce qui implique que

$$\left\|\nabla \left(p^1 - p^2\right)\right\|_{L^2(\omega)} = 0.$$

Et d'après l'inégalité de Poincaré $\left(\|\psi\|_{L^2(\omega)} \leq C \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega)}\right)$, on trouve :

$$\left\|p^1 - p^2\right\|_{L^2(\omega)} = 0.$$

D'où l'unicité de p^*. Ce qui termine la démonstration du théorème 3.4 . □

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème stationner de Stokes avec frottement dans un domaine à trois dimensions.

La convergence asymptotique de ce problème couplé en vitesse-pression est prouvé la lois de Tresca et aussi prouvée .

Bibliographie

[1] A. Assemien, G. Bayada, M. Chambat, *Inertial effects in the asymptotic behavior of a thin film flow.* Asymptot Anal, 9 (3), (1994), 177–208.

[2] G. Bayada, M. Chambat, *The transition between the Stokes equation and the Reynolds equation,* A mathematical proof, Appl. Math. Optim. 14 (1986) 73–93.

[3] M. Boukrouche, F. Boughanim, H. Smaoui, *Asymptotic behavior of a non-Newtonian flow with stick- stip condition*, Electronic Journal of Differential Equations, Conference 11, pp. 71–80, (2004).

[4] M. Boukrouche, G. Lukaszewicz, *Asymptotic analysis of solutions of a thin film lubrication problem with Coulomb fluid–solid interface law*, International Journal of Engineering Science, Vol. 41, 521–537, (2003).

[5] H. Brezis, *Equation et inéquation non linéaire dans les espaces vectoriels en dualité*, Annales de l'institut Fourier, tome 18, pp.115-175, n 1(1968).

[6] L. Chupin, *Modélisation et Analyse mathématique en films minces*, Institut Camille Jordan - INSA de Lyon, (2009). (math.univ-lyon1.fr/˜chupin/FICHIERS.../chupin-hdr-soutenance.pdf).

[7] R. Dautry et J.L.Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les Sciences et les Techniques*, Volume (3), Masson, Paris (1984).

[8] M. DILMI, *Problèmes aux limites obtiques et non linéaires pour les équations de Lamé*, Thèse de Doctorat en sciences, Janvier (2009).

[9] G. Duvant, J.L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod Paris (1972).

[10] R. El Mir, *Etude mathématique et analyse asymptotique de quelques problèmes de lubrification par des fluides non-newtoniens avec des conditions de non adhérence aux bords*, Thèse, Université Jean Monnet - Saint-Etienne, (2005).

[11] I. Ekeland and R. Temam, *Analyses convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Gauthier - Villars Paris, 1974

[12] V. Girault, P. A. Raviart, *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*. Springer (1979) .

[13] J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Volume (1), Dunod, Paris (1968).

[14] R. Pit, *Mesure locale de la vitesse à l'interface solide-liquide simple : Glissement et rôle des interactions*. Thése Physique Université Paris XI, 1999.

[15] R. Pit, H. Hervet, L. Léger, *Direct experimental evidences for flow with slip at hexadecane solid interfaces*. La revue de Métallurgie-CIT/Science, February (2001).

[16] O. Reynolds, *On the slipperiness of ice,* Man. Lit. Phil. Soc., Memoirs and Proceedings, 43 :199–220, 1898-99.

[17] O. Reynolds, *On the theory of lubrication and its application to Mr Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil*, Phil. Trans. Roy. Soc., A 117 :157–234, 1886.

[18] F. Saidi, *Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides newtoniens non isothermes et incompressibles avec des conditions aux bords non linéaires. Etude mathématique et numérique*, Thèse, Université Jean Monnet - Saint-Etienne, (2004).

RESUME

Dans ce mémoire nous considérons un problème de Stokes dans un domaine borné à trois dimension avec des conditions de frottement de Tresca sur une partie du bord et soumis à de condition de Drichlet sur l'autre parti. Nous étudions les résultats d'existence et d'unicité de la solution faible de ce problème, puis nous établissons le comportement asymptotique des solutions quand l'épaisseur du domaine tend vers zéro.

Mots-clès : Analyse Asymptotique, condition de Tresca, Espace de Sobolev, Stokes, Equations de Reynolds, Estimations a priori.

Abstract

In this memory we consider the stationary equation for Stokes fluid in a three dimensional bounded domain with Tresca boundary condition on a part of the boundary and subject to Drichlet condition on the other party. We study the existenceand uniqueness results for the weak solution of this problem, then we establish the asymptotic behavior of its solutions, when the depth of the thin domain tends to zero .

Keywords : Asymptotic Analysis, Tresca condition, Sobolev Space, Stokes, Reynolds Equation, A priori estimates.

ملخص

في هذه المذكرة ، نعتبر مشكلة ستوكس في مجال ثلاثي الأبعاد مع شروط تريسكا على طرف واحد من الحافة وتخضع لشرط ديريكلي على الطرف الآخر. ندرس وجود ووحدانية الحل الضعيف لهذه المسألة ، ثم نثبت السلوك المقارب للحلول عندما يميل سمك المجال إلى الصفر.

الكلمات المفتاحية:

تحليل مقارب ، تريسكا ، فضاء سوبوليف ، معادلات ستوكس ، رينولدز ، تقديرات أولية.