République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Echahid Hamma Lakhdar EL-OUED

Faculté de Sciences Exactes

Département de Mathématiques

N° d'ordre :..

N° de série :..

Thèse en vue de l'obtention du diplôme de doctorat de sciences en mathématiques

Spécialité : Mathématiques appliquées

Titre de la thèse :

Théorèmes du point fixe dans des espaces métriques et applications

Présenté Par : Saadia MAHIDEB

Soutenu le : Mardi 14 Décembre 2021

Devant le jury composé de :

Abdelouahab MANSOUR	Professeur	Univ. El-Oued	Président
Said BELOUL	M.C.A	Univ. El-Oued	Encadreur
Yahia DJEBRANE	Professeur	Univ. Biskra	Examinateur
Tidjani MENACER	Professeur	Univ. Biskra	Examinateur
Abdelkader AMARA	M.C.A	Univ. Ouargla	Examinateur
Bachir DEHDA	M.C.A	Univ. El-Oued	Examinateur

Année universitaire : 2021/2022

Table des matières

Dédicace

Je dédie cette thèse

A mes parents

A mon mari

A mes filles, Safae et Ilef

A ma sœur, mes frères

A mes amis

Remerciements

Dans ces lignes où j'ai eu l'occasion de remercier les personnes qui m'ont aidé d'une façon ou d'une autre dans l'élaboration de mon travail de thèse, je voudrais commencer par exprimer toute ma gratitude envers **Mr. Said BELOUL** , Docteur à l'université d'El-Oued, pour avoir accepté de rapporter cette thèse ainsi que pour sa constante disponibilité, ses encouragements, son aide précieuse, ses conseils et ses grandes qualités scientifiques qui m'ont permis de mener à bien ce projet passionnant ; où il trouve ici l'expression de ma sincère reconnaissance.

Je remercie également **Mr. Abdelouahab Mansour**, Professeur à l'université d'El-Oued, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse.

Ma gratitude va également aux examinateurs **Mr. Yahia Djabrane**, Professeur à l'université de Biskra, **Mr. Tijdani Menacer**, Professeur à l'université de Biskra, **Mr. Abdelkader Amara**, Docteur à l'université de Ouargla et **Mr. Dehda Bachir**, Docteur à l'université d'El-Oued, membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail.

J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin.

ملخص

في هذه الأطروحة قمنا بالجمع بين مفهومα-مقبولية مع مفاهيم θ-تقلص و تقلص من نوع بيرند (Berinde) لإدخال نوع جديد من التقلصات للحصول على بعض النتائج المرتبطة بالنقطة الثابتة في فضاءات مترية تامة، نستنتج أيضا وجود نقط ثابتة في فضاءات مترية مرتبة جزئيا و فضاءات مترية تامة مزودة ببيان بإستخدام نتائجنا الرئيسية.
في الأخير طبقنا النتائج المحصل عليها لإثبات وجود حلول لمسألة القيمة الحدية لمعادلات تفاضلية كسرية مع شروط حدية تكاملية.

الكلمات المفتاحية :
فضاءات مترية، نظرية النقطة الثابتة، θ-تقلص ،تقلص من نوع بيرند، α-مقبولية، معادلات تفاضلية كسرية.

Abstract

In this thesis, we combine the notion of α admissible mappings with θ-contraction and Berinde type contraction concepts to introduce a new type of contractions and related fixed point results in complete metric spaces. We also deduce the existence of fixed points in partially ordered metric spaces and in complete metric spaces endowed with a graph by using our main results.

Finally, we provide an example and an application to the existence of the solutions for a boundary value problem of fractional differential equations to illustrate the importance of the obtained results.

Keywords :
Metrics spaces, theory of fixed point, θ-contraction, Berinde type contraction, α-admissible, fractional differential equations.

Résumé

Dans cette thèse, nous combinons la notion d'applications α-admissibles avec les concepts de θ-contraction et de contraction de type Berinde pour introduire un nouveau type de contractions et quelques résultats de points fixes associés dans des espaces métriques complets. Nous déduisons également l'existence de points fixes dans des espaces métriques partiellement ordonnés et dans des espaces métriques complets muni d'un graphe en utilisant nos principaux résultats. Enfin, nous donnons un exemple et une application à l'existence des solutions d'un problème aux limites d'équations différentielles fractionnaires pour clarifier l'importance des résultats obtenus.

Mots clés :
Espaces métriques, théorie du point fixe, θ-contraction, contraction de type Berinde, α-admissible,équation différentielle fractionnaire.

Notations

Les notations, symboles et abréviations les plus fréquemment utilisés sont répertoriés ci-dessous.

$\mathbb{N}$	:	L'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{R}$	:	L'ensemble des entiers réels.
$\mathbb{R}_+$	:	L'ensemble des entiers réels positifs.
(X, d)	:	Désigne un espace métrique où d est la distance associée .
$d(x, y)$	:	La distance entre x et y.
$(X, \preceq, d)$	:	un espace métrique ordonné complet.
$\preceq$	:	Relation d'ordre .
(X, p)	:	Espace métrique partiel.
p	:	Métrique partielle.
(X, p, $\preceq$)	:	espace métrique partiel ordonné partiellement
G	:	Désigne le graphe .
$L_1([a, b])$	:	l'espace des fonctions intégrables pour la mesure de Lebesgue dx
$Re(\alpha)$	:	la partie relle de nombre $\alpha \in \mathbb{C}$.
${}^cD^\alpha f(t)$	:	la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de **Caputo** de f, d'ordre $\alpha > 0$.

Introduction

Au cours des dernières années, la théorie du point fixe est devenue l'un des outils les plus importants pour résoudre certains problèmes dans divers domaines comme dans l'analyse non linéaire, la physique, la biologie et la théorie des jeux. Banach a fourni le premier théorème du point fixe dans les espaces métriques, qui a été généralisé dans différentes domaines, et l'une de ces généralisations a été donnée par Berinde [15], où il a introduit le concept de quasi contraction comme généralisation de la contraction faible, au sens de Berinde. Par la suite, de plusieurs résultats ont été obtenus par exemple, voir [12, 13, 69, 73].

Récemment, Babu et al. [9] ont introduit un nouveau type de condition contractive appelée "condition (B)", et ils ont prouvé l'existence d'un point fixe pour cette classe d'applications, de la même manière, Ćirić et al.[26] ont introduit le concept de condition de quasi contraction généralisée et ils ont établi des résultats de point fixe dans des espaces métriques ordonnés.

Samet et al. [66] ont introduit un nouveau concept appelé α-admissible et ils ont obtenu des résultats de point fixe pour les applications $\alpha-\psi$-contractives, plus tard certains résultats ont été donnés en utilisant ce concept, voir, par exemple [10, 47, 70].

Récemment, Jleli et Samet [43] ont introduit un nouveau type de contractions appelé θ-contraction pour prouver l'existence de points fixes pour telles contractions. Il convient de mentionner ici qu'une contraction au sens de Banach est une contraction particulière de θ-contraction, mais qu'il existe des θ-contractions qui ne sont pas des contractions de Banach. Après cela, plusieurs auteurs ont étudié des formes différentes de la θ-contraction, par exemple, voir [2, 28, 38, 56, 76].

Les théorèmes du point fixe pour les applications monotones à valeur unique ont été étudiés dans des espaces métriques partiellement ordonnés par de nombreux mathématiciens voir [54, 62, 1, 33] . Nieto et Rodriguez-Lopez [54, 55] ont été les premiers à étudier des théorèmes de point fixe pour des applications monotones non décroissantes dans des espaces métriques partiellement ordonnés et à appliquer les résultats obtenus pour étudier un problème d'existence d'équations différentielles ordinaires.

La notion d'espaces métriques partiels est l'une des diverses généralisations des espaces métriques ordinaires, son idée a été lancée par Matthews [51], plus tard plusieurs résultats à point fixe ont été donnés de cette manière, voir par exemple [7, 12, 69, 73].

Cette thèse se décompose de cinq chapitres partagés de la façon suivante :

Chapitre 1 : Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions mathématiques de base nécessaires sur les espaces métriques et la théorie du point fixe.

Chapitre 2 : Ce chapitre est consacré pour les définitions et les théorèmes de quelques types de conditions contractives.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre, nous avons détaillé nos résultats publiés dans [53], nous introduisons d'abord un nouveau type des contractions en combinant des contractions de type Berinde et θ-contraction avec le concept de α-admissibles, puis nous prouvons l'existence d'un point fixe dans des espaces métriques pour ce type de contractions sous des conditions faibles. Enfin, nous clôturons ce chapitre avec nos conséquences concernant un théorème de point fixe dans des espaces métriques partiellement ordonnés et dans des espaces métriques muni d'un graph.

Chapitre 4 : Dans ce chapitre, Le but de nos travail est d'introduire la notion de quasi (α,θ)-contractions de type Hardy-Rogers dans les espaces métriques partiels afin d'établir le point fixe. Deux exemples sont donnés pour démontrer la validité de nos principaux résultats.

Chapitre 5 : Ce chapitre sera consacré à une application concernant l'étude de problème des équations différentielles fractionnaires avec conditions intégrales aux limites.

Chapitre 1

Notions et Préliminaires

Commençons ce chapitre par certains des concepts que nous utilisons dans les chapitres suivants.

1.1 Espaces métriques

Définition 1.1. *Soit X un ensemble non vide. La fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ est appelée distance ou métrique sur X si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :*

(1) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(2) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$,

(3) $\forall x, y, z \in X,\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Un espace métrique est un couple (X, d), où d est une distance sur X.

L'ensemble $\mathbb{R}$ muin de la distance $d(x, y) = |x - y|$ est un espace métrique, appelé espace métrique usuel sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.2. *Soit (X, d) un espace métrique. Soit $\{x_n\}$ une suite dans X. On dit que la suite $\{x_n\}$ converge vers $x \in X$ si $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Dans ce cas, on dit que x est la limite de $\{x_n\}$.*

Définition 1.3. *Soient (X, d) un espace métrique et $\{x_n\}$ une suite dans X. La suite $\{x_n\}$ est de Cauchy si et seulement si*

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists N \in \mathbb{N}), [\forall n, m > N \ \Rightarrow\ d(x_n, x_m) < \varepsilon].$$

Toute suite convergente est de Cauchy.

Définition 1.4. *Un espace métrique* (X, d) *est complet si et seulement si toute suite de Cauchy dans* X *est convergente.*

Définition 1.5. *Un sous-ensemble* M *d'un espace métrique* (X, d) *est appelé*

(1) *ouvert si et seulement si pour tout* $x \in M$ *il existe* $r > 0$ *tel que* $B(x, r) \subset M$*, où*

$$B(x, r) = \{a \in X : d(x, a) < r\}.$$

(2) *borné si et seulement si le diamètre de* M*,* $\delta(M) < \infty$*, où*

$$\delta(M) = \sup\{d(x, y)/x, y \in M\},$$

(3) *fermé si et seulement si pour toute suite* $\{x_n\} \subset M$ *telle que* $x_n \longrightarrow x \in X$*, alors* $x \in M$*.*

(4) *compact si et seulement si toute suite dans* M *admet une sous-suite convergente dans* M*.*

Définition 1.6. *Un sous-ensemble* M *d'un espace métrique* (X, d) *est complet si pour toute suite de Cauchy* $\{x_n\}$ *dans* M *il existe* $x \in M$ *tel que* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$*.*

Proposition 1.1. *Soit* (X, d) *un espace métrique et soit* M *un sous-ensemble de* X*.*

(i) *Si* M *est complet alors* M *est fermé.*

(ii) *Si* X *est complet donc* M *est fermé si, et seulement si,* M *est complet.*

Définition 1.7. *Soient* X*,* Y *deux espaces métriques et* $f : X \to Y$ *une fonction continue. Alors :*

(1) *pour tout ouvert* U *de* Y*,* $f^{-1}(U)$ *est un ouvert de* X*.*

(2) *pour tout fermé* F *de* Y*,* $f^{-1}(F)$ *est un fermé de* X*.*

(3) *pour tout compact* K *de* X*,* $f(K)$ *est un compact de* Y*.*

1.2 Applications continues et semi continues

Définition 1.8. *Soient* $X = (X, d_1)$ *et* $Y = (Y, d_2)$ *deux espaces métriques. Une application* $T : X \to Y$ *est dite continue en un point* $x_0 \in X$ *si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que :*

$$\text{pour tout } x \in X,\ d_1(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_2(Tx, Tx_0) < \varepsilon$$

T *est dite continue sur* X *si elle est continue en tout point* $x \in X$*.*

Définition 1.9. *Soient* (X, d_1) *et* (Y, d_2) *deux espaces métriques et* $T : X \to X$ *est une application.* T *est continue en* $x \in X$ *si et seulement si pour toute suite* $\{x_n\} \subset X$ *telle que* $\{x_n\} \longrightarrow x$*, on a* $\{Tx_n\} \longrightarrow Tx$.

Définition 1.10. *Soient* (X, d_1) *et* (Y, d_2) *deux espaces métriques et* $T : X \to X$ *est une application.* T *est uniformément continue sur* X *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x, y \in X, \quad d_1(x,y) < \delta \Longrightarrow d_2(Tx, Ty) < \varepsilon.$$

Définition 1.11. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$*. Alors, pour* $\delta > 0$ *la limite supérieure de* f *et la limite inférieure de* f *sont définies respectivement comme :*

$$\limsup fx = \begin{cases} \sup\{fy : |x-y| < \delta\} & \textit{si le supérieure existe} \\ \infty & \textit{sinon} \end{cases},$$

$$\liminf fx = \begin{cases} \inf\{fy : |x-y| < \delta\} & \textit{si l'inférieure existe} \\ \infty & \textit{sinon} \end{cases}.$$

Définition 1.12. *Soit* X *un espace métrique. Soient l'application* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *et le point* $x_0 \in X$*. L'application* φ *est appelée*

- *Semi-continue supérieurement au point* x_0 *si*

$$\limsup_{x \to x_0} \varphi(x) \leq \varphi(x_0).$$

- *Semi-continue inférieurement au point* x_0 *si*

$$\liminf_{x \to x_0} \varphi(x) \geq \varphi(x_0).$$

- *Continue au* x_0 *si elle est à la fois semi-continue supérieure et semi-continue inférieure au* x_0.

En général, φ est dite semi-continue supérieurement (respect, semi-continue inférieurement) sur X si pour tout suite $\{x_n\}$ dans X telle que $x_n \to x$ implique $\limsup_{n\to\infty} \varphi(x_n) \leq \varphi(x)$ (respect, $x_n \to x$ implique $\liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(x)$.)

Exemple 1.2.1. 1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Donc φ est semi-continue supérieurement en 0 mais n'est pas semi-continue inférieurement.

2. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Donc φ est semi-continue inférieurement en 0 mais n'est pas semi-continue supérieurement.

1.3 Espaces métriques α-complets

Définition 1.13. [35] *Soient (X, d) un espace métrique et $\alpha : X \times X \to [0, \infty[$ une application. L'espace métrique X est dit α-complet si et seulement si toute suite de Cauchy $\{x_n\}$ dans X avec $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge dans X.*

Remarque 1.3.1. Si X est un espace métrique complet, alors X est un espace métrique α-complet. Mais l'inverse n'est pas vrai.

Exemple 1.3.1. [35] Soit $X =]0, \infty[$, d la distance usuelle et A un ensemble fermé dans X. On définit $\alpha : X \times X \to \mathbb{R}_+$ par

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 3 & \text{si } x, y \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

(X, d) est un espace α-complet, mais n'est pas complet.

De plus, si $\{x_n\}$ une suite de Cauchy de X telle que $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$, alors $x_n \in A$. donc elle converge dans A, car A est fermé.

Exemple 1.3.2. [49] Soient $X = (0, \infty)$ et la distance $d : X \times X \to \mathbb{R}$ définie par $d(x, y) = |x - y|$ pour tout $x, y \in X$. On définit $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ par

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} & \text{si } x, y \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases},$$

On sait que (X, d) n'est pas un espace métrique complet, mais (X, d) est un espace métrique α-complet. En effet, si $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans X telle que $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $x_n \in [1,2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $[1,2]$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$, on obtient que $([1,2],d)$ est un espace métrique complet et alors il existe $x_* \in [1,2]$ tel que $x_n \to x_*$ lorsque $n \to \infty$.

1.4 Applications α-continues

Définition 1.14. [35] *Soient (X,d) un espace métrique, $\alpha : X \times X \to \mathbb{R}_+$ et $T\colon X \to X$ deux applications. On dit que T une application α-continue sur (X,d), si pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ avec $x_n \to x \in X$ lorsque $n \to +\infty$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $Tx_n \to Tx$ lorsque $n \to +\infty$.*

C'est à dire :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n,x) = 0 \\ \qquad\quad \textit{et} \\ \alpha(x_n,x_{n+1}) \geq 1 \end{cases} \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n\to+\infty} d(Tx_n,Tx) = 0.$$

Remarque 1.4.1. On voit facilement que toute application continue est aussi α-continue. En général, la réciproque n'est pas vraie.

Exemple 1.4.1. [49] Soient $X = (0,\infty)$ et la distance $d : X \times X \to \mathbb{R}$ définie par $d(x,y) = |x-y|$ pour tout $x, y \in X$. On définit $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ par

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x,y \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon }. \end{cases},$$

et

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \in [1,2] \\ x^2 - 6x + 12 & \text{si } x \in (0,1) \cup (2,\infty). \end{cases},$$

Il est facile de voir que T n'est pas continue à $x = 1$. Par conséquent, T n'est pas continue. Ensuite, nous montrons que T est α-continue. Soit $\{x_n\}$ une suite dans X avec $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in [1,2]$ et alors $Tx_n = \dfrac{x_n}{2}$. Si $x_n \to x$ lorsque $n \to \infty$ pour un certain $x \in X$, on a $Tx_n = \dfrac{x_n}{2} \to \dfrac{x}{2} = Tx$ pour $n \to \infty$. Par conséquent, T est α-continue.

Définition 1.15. [37] *Soient $T\colon X \to X$ une application sur un espace métrique (X,d) et $\alpha : X \times X \to \mathbb{R}_+$ une fonction. T est dite :*

1. *α-semi-continue supérieurement sur X, si pour $x \in X$ et une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ avec*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0 \\ \qquad\quad et \\ \alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \end{cases} \forall n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n\to+\infty} \sup d(x_n, Tx_n) \leq d(x, Tx).$$

2. *α-semi-continue inférieurement sur X, si pour $x \in X$ et une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ avec*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0 \\ \qquad\quad et \\ \alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \end{cases} \forall n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n\to+\infty} \inf d(x_n, Tx_n) \geq d(x, Tx).$$

Lemme 1.2. [37] *Soit T une application sur un espace métrique (X, d) et $\alpha : X \to X$ une fonction. T est α-continue si et seulement si elle est α-semi continue inférieurement et α-semi continue supérieurement.*

Exemple 1.4.2. [37] Soient $X = [0, +\infty)$ et $d(x, y) = |x - y|$. On définit $T : X \to X$ et $\alpha : X \times X \to [0, +\infty)$ par :

$$Tx = \begin{cases} x^5 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2 + \sin \pi x & \text{si } x > 1 \end{cases},$$

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 + x^2 + y^2 & \text{si } x, y \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Il est clair que T n'est pas continue en 1, mais elle est α-continue, car si (x_n) une suite convergente vers x dans X telle que $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$, alors $x_n \in [0, 1]$ et $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^5 = x^5$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = Tx$, ce qui implique que T est α-continue.

1.5 Applications α-admissibles

En 2012, Samet et al. [66] ont introduit le concept d'une application α-admissibles et ont établi des divers théorèmes de point fixe pour de telles applications définies sur des espaces métriques complets.

Définition 1.16. [66] *Soient X un ensemble non vide, $T : X \to X$ et $\alpha : X \times X \to \mathbb{R}_+$ deux applications. On dit que T est α-admissible si pour tout $x, y \in X$*

$$\alpha(x,y) \geq 1 \Longrightarrow \alpha(Tx,Ty) \geq 1.$$

Exemple 1.5.1. Soit $X =]0, +\infty[$. On définit $T : X \to X$ et $\alpha : X \times X \to \mathbb{R}_+$ par $Tx = 2$ et

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si } x < y \end{cases}.$$

Alors, T est α-admissible.

Exemple 1.5.2. Soit $X = [0, +\infty)$. On définit $T : X \to X$ et $\alpha : X \times X \to [0, +\infty)$ par $Tx = \sqrt{x}$ pour tout $x \in X$ et

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} e^{x-y} & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si } x < y \end{cases}.$$

Alors, T est α-admissible.

Définition 1.17. [66] *Soit T un auto-application sur un espace métrique (X, d) et soit $\alpha, \eta \colon X \times X \to [0, +\infty)$ deux fonctions. On dit que T est une application α-admissible par rapport à η si pour tout $x, y \in X$*

$$\alpha(x,y) \geq \eta(x,y) \implies \alpha(Tx,Ty) \geq \eta(Tx,Ty).$$

Notons que si nous prenons $\eta(x, y) = 1$, alors cette définition se réduit à la définition 1.16. De plus, si l'on prend $\alpha(x, y) = 1$, alors on dit que T est une application η-sous-admissible.

Exemple 1.5.3. Soient $X = [0, \infty[$ muni d'une distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$ pour tout $x, y \in X$ et $T : X \to X$ définie par

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 2x^3 + 1 & \text{si } x \in]1, \infty[\end{cases},$$

et

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \in]1, \infty[\end{cases} \quad \text{et} \quad \eta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 4 & \text{si } x \in]1, \infty[\end{cases}.$$

On sait que (X, d) est un espace métrique complet.

Nous montrons que T est α-admissible par rapport à η (ou (α, η)-admissible).

Soit $x, y \in X$, si $\alpha(x, y) \geq \eta(x, y)$, alors $x, y \in [0, 1]$. Par contre, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $Tx \in [0, \frac{1}{4}]$. Il s'ensuite que $\alpha(Tx, Ty) = 4$ et $\eta(x, y) = 1$. Ainsi $\alpha(Tx, Ty) \geq \eta(Tx, Ty)$. Donc T est (α, η)-admissible.

1.6 Fonction de gauge

Définition 1.18. [61] *Une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est dite fonction de gauge si elle satisfait au moins une des propriétés suivantes :*

1. *φ est monotone croissante ;*
2. *$\varphi(t) < t$ pou tout $t > 0$;*
3. *$\varphi(0) = 0$;*
4. *φ est continue ;*
5. *$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0$ pour tout $t > 0$;*
6. *$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty$ pour tout $t > 0$;*
7. *$t - \varphi(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$;*
8. *φ est sous-additive c-à-d $\varphi(x + y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$ pour tout $x, y \geq 0$.*

Exemple 1.6.1. La fonction $\varphi(t) = at,\ t \in \mathbb{R}_+,\ a \in]0, 1[$ est une fonction de gauge.

1.7 Fonctions de comparaison et de c-comparaison

La fonction de comparaison a été présentée pour la première fois par Berinde dans [17].

Définition 1.19. *Une fonction $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ est appelé une fonction de comparaison si elle satisfait les conditions suivantes :*

(i) *φ est croissante,*

(ii) $\lim_{n\to+\infty} \varphi^n(t) = 0$, *pour tout $t > 0$.*

Lemme 1.3. *Chaque fonction de comparaison satisfait $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(t) < t$, pour tout $t > 0$.*

Définition 1.20. *Une fonction $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ est appelé une fonction de c-comparaison si elle satisfait les conditions suivantes :*

(i) φ *est croissante,*

(ii) $\sum\limits_{n \to +\infty}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty$, *pour tout* $t > 0$.

Exemple 1.7.1. La fonction

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{t}{3} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{2}{3} \\ \frac{t}{2} - \frac{1}{18} & \text{si } t > \frac{2}{3} \end{cases},$$

est une fonction de c-comparaison

Exemple 1.7.2. La fonction

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}t & \text{si } t = 1 \\ \frac{3}{4}t & \text{si } t > 1 \end{cases},$$

est une fonction de c-comparaison

Remarque 1.7.1. Toute fonction de comparaison est une fonction de c-comparaison mais l'inverse n'est toujours vrai comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.7.3. Soit $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ définie par $\varphi(t) = \frac{t}{t+1}$. Alors φ est une fonction de comparaison mais pas une fonction de c-comparaison car $\varphi^n(t) = \frac{t}{nt+1}$ pour $t \geq 0$.

1.8 Notions de base du point fixe

Définition 1.21. *Soit T une application de X dans X. Un point $x \in X$ est dit fixe de T si $x = Tx$.*

Exemple 1.8.1. On définit l'application $T(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $0 < \theta < 2\pi$.

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La transformation T (rotation) a un point fixe unique et ce point est $(0, 0)$

Toutes les fonctions n'ont pas nécessairement de point fixe. De plus, si une fonction a un point fixe, elle ne peut pas être unique.

Définition 1.22. *Soit (X, d) un espace métrique. Une application $T : X \to X$ est dite :*

1. *Lipschitzienne (ou k-Lipschitzienne) si et seulement si il existe une constante $k \geq 0$ telle que pour tout $x, y \in X$ on a :*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

2. *Contraction ou une application contractante si $k < 1$.*
3. *Non expansive si et seulement si elle est 1-Lipschitzienne,*
4. *Contractive si et seulement si pour tout $x, y \in X,\ x \neq y$, on a :*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y).$$

On remarque que

$$Contraction \Rightarrow Contractive \Rightarrow Nonexpansive \Rightarrow Lipschitzienne$$

Mais les implications inverses ne sont pas vraies en général. De plus, toutes ces applications sont continues.

Exemple 1.8.2. Considérons l'espace métrique usuel $(\mathbb{R}, d)$. Définissons

$$T(x) = ax + b, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Alors, T est contractante sur $\mathbb{R}$ si $a < 1$.

Exemple 1.8.3. Considérons l'espace métrique euclidien $(\mathbb{R}^2, d)$. On définit

$$T(x, y) = \left(\frac{x}{a} + b, \frac{y}{c} + b\right), \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{1.2}$$

Alors, f est contractante sur $\mathbb{R}^2$ si $a, c > 1$.

Chapitre 2

Quelques types de conditions contractives

Dans ce chapitre, on va donner des définitions et des notions basiques concernant quelques types de conditions contractives comme contraction de Banach, Edelstein, Kannan, Chatterjea, Meir et Keeler, Reich, Ćirić..., De plus, le théorème de point fixe pour chaque type.

2.1 Le principe de Banach et ses généralisations

En 1922, Stefan Banach [11] a établi un théorème remarquable du point fixe connu sous le nom de « Principe de contraction de Banach » (BCP) qui est l'un des résultats les plus importants de l'analyse et considéré comme la source principale de la théorie du point fixe métrique.

Théorème 2.1 (Principe de contraction de Banach). [11] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une contraction. Alors*

(i) T a un point fixe unique $x^* \in X$.,

(ii) Pour tout $x \in X$, la suite $\{x_n\}$ de Picard definie par $Tx_n = x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ converge vers x^*,

(iii) Pour tout $x \in X$,

$$d(T^n x, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, Tx), n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 2.1.1. soit $X = \mathbb{R}$ et $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par $Tx = \frac{2}{3}x + 1, x \in \mathbb{R}$. alors T est une contraction et $x^* = 3$ est un point fixe de T.

Corollaire 2.2. *Soient X un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application continue telle que T^k une contraction de X pour un entier positif k. Alors T a un point fixe unique dans X.*

Remarque 2.1.1. La condition de continuité de T dans le corollaire précédent n'est pas nécessaire.

Exemple 2.1.2. $X = \mathbb{R}$ et

$$Tx = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

T n'est pas continue, donc n'est pas une contraction.

$$T^2x = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

T^2 est une contraction, et T^2 et T ont le même point fixe 1.

Théorème 2.3. *Soient X un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application telle que T^k une contraction de X pour un entier positif k. Alors T a un point fixe unique*

2.1.1 Quelques généralisations

Théorème de Edelstein

Dans l'année 1962, Edelstein [30] a prouvé la version suivante du principe de contraction de Banach

Théorème 2.4. [30] *Soient (X, d) un espace métrique compact et $T : X \to X$ une application. Supposons que*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y) \ \text{ pour tout } x, y \in X \text{ avec } x \neq y. \tag{2.1}$$

Alors, T a un point fixe unique dans X.

Théorème de Kannan

Dans le théorème de Banach nous utilisons la continuité de l'application T pour prouver l'existence du point fixe. Ainsi, il est naturel de se poser la question suivante : existe-t-il des

conditions de contraction qui n'obligent pas l'application T d'être continue ?
En 1968, Kannan [46] a répondu à cette question par l'affirmative et a prouvé un théorème de point fixe pour la condition de contraction suivante, qui est appelée contraction de Kannan

Théorème 2.5 (Contraction de Kannan). [46] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application telle q'il existe un nombre réel $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ et pour tout x, y*

$$d(Tx, Ty) \leqslant \alpha[d(Tx, x) + d(Ty, y)] \tag{2.2}$$

. Alors

(1) *T a un point fixe unique $x^* \in X$.,*

(2) $\lim_{n\to\infty} T^n x = x^*$.

(3) *Pour tout $x \in X$,*

$$d(T^n x, x^*) \leq \frac{\beta^n}{1-\beta} d(x, Tx), \beta \in [0, 1[\,.$$

Théorème de Chatterjea

Théorème 2.6. [22] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application telle q'il existe un nombre réel $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ et pour tout $x, y \in X$*

$$d(Tx, Ty) \leqslant \alpha[d(Tx, y) + d(Ty, x)]. \tag{2.3}$$

Alors , T a un point fixe unique dans X.

Théorème de Meir et Keeler

Théorème 2.7. [52] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application satisfaisant pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$:*

$$\epsilon \leqslant d(x, Tx) < \epsilon + \delta \Longrightarrow d(Tx, Ty) < \epsilon. \tag{2.4}$$

Alors, T a un point fixe unique dans X.

Remarque 2.1.2. Si T satisfait la contraction de Meir-Keeler (2.4), alors T est une contractive .

Théorème de Reich

Théorème 2.8. [63] *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application telle q'il existe des nombres positifs* $a, b, c \in [0, 1[$ *vérifiant* $a + b + c < 1$ *et :*

$$d(Tx, Ty) \leqslant ad(x, y) + bd(x, Tx) + cd(y, Ty) \text{ pour tout } x, y \in X. \tag{2.5}$$

Alors, T *a un point fixe unique dans* X.

Théorème de Ćirić

Théorème 2.9. [25] *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application tel qu'il existe des nombres positifs* a, b, c *et* $e \in [0, 1[$ *vérifiant* $a + b + c + 2e < 1$ *et pour tout* $x, y \in X$ *:*

$$d(Tx, Ty) \leqslant ad(x, y) + bd(x, Tx) + cd(y, Ty) + e[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \tag{2.6}$$

Alors, T *admet un point fixe unique .*

Théorème 2.10. [25] *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application tel q'il existe un nombre* $h \in [0, 1[$ *et pour tout* $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leqslant h.max\,\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\} \tag{2.7}$$

Alors, T *admet un point fixe unique.*

Remarque 2.1.3.
1. Une application satisfaisant 2.6 est appelée contraction généralisée.
2. Une application satisfaisant 2.7 est appelée quasi contraction.
3. Il est clair que 2.6 implique 2.7, mais la réciproque n'est pas vraie .

Théorème de Zamfirescu

Théorème 2.11. [75] *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application tel q'il existe des nombers réles* a, b *et* c *vérifiant* $0 \leqslant a < 1, 0 \leqslant b < \frac{1}{2}$ *et* $0 \leqslant c < \frac{1}{2}$, *tels que , pour tout* $x, y \in X$ *au moins l'une des affirmations suivantes est vraie :*

$(z1)$: $d(Tx, Ty) \leqslant ad(x, y)$,

$(z2)$: $d(Tx, Ty) \leqslant b[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$,

$(z3)$: $d(Tx, Ty) \leqslant c[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$.

Alors, T a un point fixe unique dans X.

Théorème de Hardy et Rogers

Théorème 2.12. [34] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application tel q'il existe des nombres positifs $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in [0, 1[$ vérifiant $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 < 1$ et*

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) \;\leq\; & a_1 d(x, Tx) + a_2 d(y, Ty) + a_3 d(x, Ty) \\ & + a_4 d(y, Tx) + a_5 d(x, y) \end{aligned} \tag{2.8}$$

pour tout $x, y \in X$. Alors, T a un point fixe unique dans X.

Théorème de Berinde

Théorème 2.13. [16] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une contraction faible telle qu'il existe $r \in [0, 1[$ et $L \geq 0$ tels que , pour tout $x, y \in X$,*

$$d(Tx, Ty) \leqslant rd(x, y) + Ld(y, Tx).$$

Alors, T a un point fixe unique dans X.

2.2 Contraction non linéaire

Boyd et Wong [20] ont obtenu le résultat suivant qui est une extension du principe de contraction de Banach.

Théorème 2.14. [20] *Soient (X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application. Supposons qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ semi-continue supérieurement telle que $\phi(t) < t$ pour tout $t > 0$ et vérifiant :*

$$d(Tx, Ty) \leq \phi(d(x, y)), \tag{2.9}$$

pour tout $x, y \in X$. Alors T admet un point fixe unique x^*. De plus, pour tout $x \in X$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x^*$.

Dans ce cas, T est dite ϕ-contractive ou contraction non linéaire.

Remarque 2.2.1. La condition $\phi(t) < t$ pour tout $t > 0$ est très importante. Même si la condition $\phi(t) < t$ n'est pas vérifiée pour au moins une valeur de $t > 0$, alors T peut n'avoir aucun point fixe ou bien plus d'un point fixe.

Exemple 2.2.1. Soient $X =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ un espace métrique muni de la distance usuelle et $T : X \to X$ une application définie par :

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & \text{si} \quad x \geq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1) & \text{si} \quad x \leqslant -1 \end{cases},$$

et $Sx = -Tx$ pour tout $x \in X$. Alors T et S satisfont la condition 2.9 avec

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{si} \quad t < 2 \\ \frac{1}{2}t + 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Remarquons que la fonction φ satisfait toutes les conditions du théorème 2.14 sauf que $\varphi(2) = 2$. On peut remarquer que T a deux points fixes -1 et 1, alors que S n'a pas de points fixes.

2.3 Contraction faible

Considérons les deux ensembles suivants :

Ψ est l'ensemble de fonctions $\psi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ qui sont continues, croissante et $\psi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

Φ est l'ensemble de fonctions $\varphi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ qui sont semi-continues inférieurement et $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$

Le concept de contraction faible a été introduit en 1997 par Alber et Guerre-Delabrière [3].

Définition 2.1. [3] *Une application $T : X \to X$ est dite φ-contraction faible s'il existe une fonction $\varphi \in \Phi$ telle que pour chaque $x, y \in X$*

$$d(Tx, Ty) \leqslant d(x, y) - \varphi(d(x, y)).$$

Alber et Guerre-Delabrière [3] ont défini ce concept pour les applications sur les espaces de Hilbert et ont prouvé l'existence de points fixes. En 2001, Rhoades a montré que la plupart des résultats de [3] sont toujours vrais pour n'importe quel espace de Banach. En particulier, il a prouvé le théorème suivant qui est évidemment l'une des généralisations du principe de contraction de Banach car il contient la contraction comme cas particulier ($\varphi(t) = (1-k)t$).

Théorème 2.15. [64] *Soient (X, d) un espace métrique complet, et T une φ-contraction faible sur X pour un certain $\varphi \in \Phi$. Alors T a un unique point fixe.*

Dutta et Choudhury [29] ont présenté une nouvelle généralisation du principe de contraction et ont prouvé le théorème suivant

Théorème 2.16. [29] *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $T : X \to X$ une auto-application satisfaisant l'inégalité*

$$\psi(d(Tx, Ty)) \leqslant \psi(d(x, y)) - \varphi(d(x, y)),$$

pour certains $\psi \in \Psi$ et $\varphi \in \Phi$ et tout $x, y \in X$. Alors T a un unique point fixe.

Très récemment, Choudhury et al. [23] ont prouvé le théorème suivant

Théorème 2.17. [23] *Soit (X, d) un espace métrique complet, et soit $T : X \to X$ telie que*

$$\psi(d(Tx, Ty)) \leqslant \psi(m(x, y)) - \varphi(\max\{d(x, y), d(y, Ty)\}),$$

pour certains $\varphi \in \Phi, \psi \in \Psi$, et $m(x, y) = max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{1}{2}(d(x, Ty) + d(y, Tx))\}$. Alors f a un unique point fixe.

Popescu [60] a prouvé le théorème suivant.

Théorème 2.18. [60] *Soient (X, d) un espace métrique complet non vide et $T : X \to X$ une application satisfaisant pour tout $x, y \in X$*

$$\psi(d(Tx, Ty)) \leqslant \psi(M(x, y)) - \varphi(M(x, y)),$$

où

(1) $\psi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *est une fonction croissante : $\psi(t) = 0 \iff t = 0$,*

(2) $\varphi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *est une fonction :* $\varphi(t) = 0 \iff t = 0$*, et* $\liminf_{n\to\infty} \varphi(a_n) > 0$ *si* $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$*,*

(3) $\varphi(a) > \psi(a) - \psi(a-)$ *pour tout* $a > 0$*, où* $(a-)$ *est la limite à gauche de* ψ *en* a*.*

Alors T *a un unique point fixe*

Dans [16] Berinde a introduit et étudié une application de contraction faible sur un espace métrique complet qui est plus faible que les opérateurs de Zamfirescu.

Définition 2.2. [16] *Soit* (X, d) *un espace métrique. Une application* $T : X \to X$ *est dite contraction faible s'il existe une constante* $\delta \in (0, 1)$ *et un* $L \geq 0$ *tels que :*

$$d(Tx, Ty) \leqslant \delta d(x, y) + Ld(y, Tx) \text{ pour tout } x,\ y \in X \tag{2.10}$$

Remarque 2.3.1. [16] Comme la distance est symétrique, la condition de contraction faible 2.10 inclut implicitement la double condition suivante

$$d(Tx, Ty) \leqslant \delta d(x, y) + Ld(x, Ty). \tag{2.11}$$

obtenue à partir de 2.10 en remplaçant formellement d(Tx, Ty) et d(x, y) par d(Ty, Tx) et d(y, x), respectivement, puis en échangeant x et y.

Par conséquent, pour vérifier la contractivité faible de T , il est nécessaire de vérifier à la fois 2.10 et 2.11.

Évidemment, toute contraction stricte satisfait 2.10, avec $\delta = a$ et $L = 0$, et est donc une contraction faible (qui possède un unique point fixe).

D'autres exemples de contractions faibles sont donnés par les propositions suivantes

Proposition 2.19. [16] *Toute application de Kannan, c'est-à-dire toute application satisfaisant la condition de contraction 2.2, est une contraction faible.*

Proposition 2.20. [16] *Toute application satisfaisant la condition de contraction 2.3, est une contraction faible.*

Corollaire 2.21. [16] *Toute application de Zamfirescu, c'est-à-dire n'importe quelle application satisfaisant les hypothèses du théorème 2.11, est une contraction faible.*

Proposition 2.22. [16] *Toute quasi contraction(voir la remarque 2.1.3) avec* $0 < h < \dfrac{1}{2}$ *est une contraction faible.*

Théorème 2.23. [16] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une (δ, L)-contraction faible, c'est-à-dire une application satisfaisant 2.10 avec $\delta \in (0,1)$et un certain $L \geq 0$. Alors*

1. *$Fix(T) = \{x \in X : Tx = x\} \neq \varnothing$.*
2. *Pour tout $x_0 \in x$, l'itération Picard $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ définie par $x_0 \in x$ et $x_{n+1} = Tx_n, n \in \mathbb{N}$ converge à un point fixe x^* de T.*
3. *Les estimations suivantes*

$$d(x_n, x^*) \leqslant \frac{\delta^n}{1-\delta} d(x_0, x_1), n \in \mathbb{N},$$

$$d(x_n, x^*) \leqslant \frac{\delta}{1-\delta} d(x_{n-1}, x_n), n \in \mathbb{N}^*,$$

sont valables où est la constante δ apparaissant en 2.10 .

les résultats de Berinde [15] étendent, unifient et améliorent de nombreux théorèmes des points fixes dans la littérature.

Définition 2.3. [15] *Soit (X, d) un espace métrique. Une auto-application $T : X \to X$ est dite φ-contraction faible ou (φ, L)-contraction faible, s'il existe une fonction de comparaison φ et un $L \geq 0$, tels que.*

$$d(Tx, Ty) \leqslant \varphi(d(x, y)) + Ld(y, Tx) \textit{ por tout } x, y \in X.$$

Théorème 2.24. [15] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une φ-contraction faible avec φ une fonction c-comparaison. Alors*

1. *$Fix(T) = \{x \in X : Tx = x\} \neq \varnothing$.*
2. *Pour tout $x_0 \in X$, l'itération Picard $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ définie par $x_0 \in x$ et $x_{n+1} = Tx_n, n \in \mathbb{N}$ converge à un point fixe x^* de T.*
3. *Les estimations suivantes*

$$d(x_n, x^*) \leqslant s(d(x_n, x_{n+1})), n = \mathbb{N}, \tag{2.12}$$

sont valables où $s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(t), t \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 2.25. [15] *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une* (δ, L)-*contraction faible. Supposons que* T *satisfasse aussi la condition suivante :*
il existe une fonction de comparaison ψ *et un* $L_1 \geq 0$ *tels que*

$$d(Tx, Ty) \leqslant \psi(d(x, y)) + L_1 d(x, Tx), \text{ pour tout } x, y \in X$$

. Alors

1. *T a un point fixe unique, c'est-à-dire* $Fix(T) = \{x^*\}$.
2. *L'estimation 2.12 est valable.*
3. *Le taux de convergence de l'itération de Picard est donné par*

$$d(x_n, x^*) \leqslant \varphi(d(x_{n-1}, x_*)), n = \mathbb{N}^*.$$

Une autre généralisation remarquable a été donnée par Pata [57]. Dans ce cas les applications sur un espace métrique qui sont contractives sans être des contractions.

Définition 2.4. [57] *Soient* (X, d) *un espace métrique et* $T : X \to X$ *une application, on dit que* T *une contraction faible si :*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y), \forall x, y \in X, \ x \neq y.$$

Remarque 2.3.2. [57]

1. Si T est une contraction faible, alors T a au plus un point fixe.
2. Si T est une contraction faible et X un espace métrique compact, alors T a un point fixe unique dans X.(Théorème 2.4).

Exemple 2.3.1. Considérons l'espace métrique complet $X = [1, +\infty[$, et on définit $T : X \to X$ comme suite

$$T(x) = x + \frac{1}{x}.$$

f est une contraction faible mais sans points fixes.

Théorème 2.26. [57] *Soit* T *une contraction faible d'un espace métrique compact* X*. Alors* T *a un point fixe unique* x^**. De plus, pour tout* $x_0 \in X$*, la suite* $\{T^n x_0\}$ *converge vers* x^**.*

Corollaire 2.27. [57] *Soient X un espace métrique compact et $T : X \to X$. Si T^m une contraction faible, pour certains $m \geq 1$, alors T a un point fixe unique $x^* \in X$. De plus, pour tout $x_0 \in X$, la suite $\{T^n x_0\}$ converge vers x^*.*

Théorème 2.28. [31] *Soit T une contraction faible de X. Alors il existe une fonction continue et strictement croissante $\varphi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ tels que $\varphi(t) < t$, pour tout $t > 0$ et*

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y)), \text{ pour tout } x, y \in X.$$

2.4 Contraction de Wordowski

En 2012, Wardowski [74] a introduit un nouveau type de contractions appelé F-contraction. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fonctions $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes :

(F_1) : F est strictement croissante, c'est-à-dire pour tout $t_1, t_2 \in]0, +\infty[$ tels que $t_1 < t_2 \Rightarrow F(t_1) < F(t_2)$.

(F_2) : Pour toute suite $\{t_n\}_{n \in N}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} F(t_n) = -\infty$.

(F_3) : Il existe $k \in]0, 1[$ tel que $\lim\limits_{t \to 0^+} t^k F(t) = 0$.

Définition 2.5. [74] *Soit (X, d) un espace métrique. Une application $T : X \to X$ est dite F-contraction ou application F-contractante si $F \in \mathcal{F}$ et il existe $\tau > 0$ tels que pour tout $x, y \in X$,*

$$d(Tx, Ty) > 0 \implies \tau + F(d(Tx, Ty)) \leqslant F(d(x, y)). \tag{2.13}$$

Exemple 2.4.1. [74] Soit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donne par $F(x) = \ln x$. Il est clair que F satisfait $(F1), (F2)$ et $(F3)$ pour tout $k \in]0, 1[$. Chaque application $T : X \to X$ vérifiant 2.13 est une F-contraction telle que

$$d(Tx, Ty) \leqslant e^{-\tau} d(x, y), \text{ pour tout } x, y \in X, Tx \neq Ty.$$

Il est clair que pour $x, y \in X$ tel que $Tx = Ty$ l'inégalité $d(Tx, Ty) \leqslant e^{-\tau} d(x, y)$ est également vérifiée, c'est-à-dire que T est une contraction de Banach [11].

Exemple 2.4.2. [74] Soit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donne par $F(x) = \ln x + x$. Il est clair que F satisfait $(F1) - (F3)$. Chaque application $T : X \to X$ vérifiant 2.13 est une F-contraction telle que

$$\frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)} e^{d(Tx,Ty) - d(x,y)} \leqslant e^{-\tau} \text{ pour tout } x, y \in X, Tx \neq Ty.$$

Si on remplace la condition contractive de Wardowski dans (2.13) par différents exemples des fonctions F, on obtient divers types de contractivité, dont certains types connus ont été trouvé dans la littérature.

Remarque 2.4.1. D'après (F_1) et 2.13, on obtient $d(Tx, Ty) < d(x, y)$, pour tout $x, y \in X, Tx \neq Ty$, c'est-à-dire toute application F-contractante est contractive. De plus, il est bien connu que si T est contractive, alors elle est non expansive, donc Lipschitzienne, et alors elle est continue. Par conséquent, toute application F-contractante est continue.

Le théorème suivant, qui a été donné par Wardowski, est une généralisation du principe de contraction de Banach d'une manière différente du principe bien connu dans la littérature.

Théorème 2.29. [74] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une F-contraction. Alors, T a un point fixe unique $z \in X$. En outre, pour tout $x_0 \in X$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n x_0 = z$.*

Dans la suite, nous allons donné une autre version du théorème de Wardowski. On aura d'abord besoin le lemme suivant. Pour la preuve on renvoie à [67].

Lemme 2.30. *Soient $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante et $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Alors, les affirmations suivantes sont satisfaites :*

1. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} F(t_n) = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to-\infty} t_n = 0$.*
2. *Si $\inf F = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} F(t_n) = -\infty$.*

Remarque 2.4.2. D'après le lemme précédent, Secelean [67] a montré que la condition (F_2) dans la définition 2.5 peut être remplacer par une condition équivalente et très simple comme suit :

$(F_2^{'})$: $\inf F = -\infty$.

Par ailleurs, Piri et Kumam [58] ont utilisé la condition suivante au lieu de (F_3).

$(F_3^{'})$: F est continue sur $]0, +\infty[$.

En désignant par $\mathcal{F}^*$ l'ensemble de toutes les fonctions F satisfaisant les conditions (F1), $(F_2^{'})$ et $(F_3^{'})$.

Exemple 2.4.3. Soit $F_1(t) = \dfrac{-1}{t}$ et $F_2(t) = \dfrac{1}{1-e^t}$, alors on voit facilement que $F_1, F_2 \in \mathcal{F}^*$.

Théorème 2.31. [58] *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application. Supposons qu'il existe* $F \in \mathcal{F}^*$ *et* $\tau > 0$ *tels que :*

$$\forall x, y \in X, [d(Tx, Ty) > 0 \Longrightarrow \tau + F(d(Tx, Ty)) \leqslant F(d(x, y))].$$

Alors, T *a un point fixe unique* $z \in X$*. De plus, pour tout* $x_0 \in X$*, on a* $\lim_{n \to +\infty} T^n x_0 = z$*.*

Définition 2.6. [27] *Soit* (X, d) *un espace métrique. Une auto-application* T *sur* X *est appelée* F*-contraction de type Hardy-Rogers s'il existe* $F \in \mathcal{F}$ *et* $\tau \in \mathbb{R}_+$ *tels que*

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leqslant F(\alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty) + \delta d(x, Ty) + L d(y, Tx)). \quad (2.14)$$

pour tout $x, y \in X$ *avec* $d(Tx, Ty) > 0$*, où* $\alpha + \beta + \gamma + 2\delta = 1, \gamma \neq 1$ *et* $L \geq 0$*.*

Remarque 2.4.3. De $(F1)$ et 2.14, on déduit que toute F-contraction de type Hardy Rogers T satisfait la condition suivante :

$$d(Tx, Ty) \leqslant \alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty) + \delta d(x, Ty) + L d(y, Tx)$$

pour tout $x, y \in X$, où $\alpha + \beta + \gamma + 2\delta = 1, \gamma \neq 1$ et $L \geq 0$.

Théorème 2.32. [27] *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et soit* T *un auto-application sur* X*. Supposons qu'il existe* F *et* $\tau \in \mathbb{R}_+$ *tels que* T *soit une* F*-contraction de type Hardy-Rogers, c'est-à-dire,*

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leqslant F(\alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty) + \delta d(x, Ty) + L d(y, Tx)),$$

pour tout $x, y \in X$*,* $Tx \neq Ty$*, où* $\alpha + \beta + \gamma + 2\delta = 1, \gamma \neq 1$ *et* $L \geq 0$*. Alors* T *a un point fixe. De plus, si* $\alpha + \delta + L \leqslant 1$*, alors le point fixe de* T *est unique.*

Comme premier corollaire du théorème 2.32, en prenant $\alpha = 1$ et $\beta = \gamma = \delta = L = 0$, on obtient le théorème 2.29 . De plus, en posant $\alpha = \delta = L = 0$ et $\beta + \gamma = 1$ et $\beta \neq 0$, on obtient la version suivante du résultat de Kannan [46].

Corollaire 2.33. [27] *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et soit* T *un auto-application sur* X*. Supposons qu'il existe* $F \in \mathcal{F}$ *et* $\tau \in \mathbb{R}_+$ *tels que*

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leqslant F(\beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty)),$$

pour tout $x, y \in X, Tx \neq Ty$*, où* $\beta + \gamma = 1, \gamma \neq 1$*. Alors* T *a un unique point fixe dans* X*.*

Une version du théorème du point fixe de Chatterjea [22] est obtenue à partir du théorème 2.32 en posant $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et $\delta = \frac{1}{2}$.

Corollaire 2.34. [27] *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit T un auto-application sur X. Supposons qu'il existe $F \in \mathcal{F}$ et $\tau \in \mathbb{R}_+$ tels que*

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leqslant F(\frac{1}{2}d(x, Ty) + Ld(y, Tx))$$

pour tout $x, y \in X, Tx \neq Ty$. Alors T a un point fixe dans X. Si $L \leqslant \frac{1}{2}$, alors le point fixe de T est unique.

Enfin, si l'on choisit $\delta = L = 0$, on obtient un théorème de type Reich [63].

Corollaire 2.35. [27] *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit T un auto-application sur X. Supposons qu'il existe $F \in \mathcal{F}$ et $\tau \in \mathbb{R}_+$ tels que*

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leqslant F(\alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty)),$$

pour tout $x, y \in X, Tx \neq Ty$, où $\alpha + \beta + \gamma = 1, \gamma \neq 1$. Alors T a un unique point fixe dans X.

Définition 2.7. *Soit X un ensemble non vide. Si (X, d) est un espace métrique et $(X, \preceq)$ est partiellement ordonné, alors $(X, d, \preceq)$ est appelé un espace métrique ordonné.*
Alors $x, y \in X$ sont dits comparables si $x \preceq y$ ou $y \preceq x$ est vérifié.
Soit $(X, \preceq)$ un ensemble partiellement ordonné. Un auto-application T sur X est dite croissante si $Tx \preceq Ty$ chaque fois que $x \preceq y$ pour tout $x \in X$.
Un espace métrique ordonné $(X, d, \preceq)$ est régulier si pour toute suite croissante $\{x_n\}$ dans X convergeant vers un certain $x \in X$, on a $x_n \preceq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.36. [27] *Soit $(X, d, \preccurlyeq)$ un espace métrique complet ordonné et T une auto-application croissante sur X. Supposons qu'il existe $F \in \mathcal{F}$ et $\tau \in R_+$ tels que T une F-contraction de type Hardy-Rogers, c'est-à-dire*

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leqslant F(\alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty) + \delta d(x, Ty) + Ld(y, Tx)),$$

pour tout comparable $x, y \in X, Tx \neq Ty$, où $\alpha + \beta + \gamma + 2\delta = 1, \gamma \neq 1$ et $L \geq 0$. Si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) *il existe* $x_0 \in X$ *tel que* $x_0 \preccurlyeq Tx_0$.

(ii) X *est régulier i.e pour toute suite croissante* $\{x_n\}$ *dans* X *convergeant vers un certain* $x \in X$, *on a* $x_n \preceq x$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Alors T *a un point fixe. De plus, si* $\alpha + \delta + L \leqslant 1$, *alors l'ensemble des points fixes de* T *est bien ordonné si et seulement si* T *a un point fixe unique.*

Théorème 2.37. [27] *Soient* $(X, d, \preccurlyeq)$ *un espace métrique complet ordonné et* T *une auto-application croissante sur* X. *Supposons qu'il existe* $F \in \mathcal{F}$ *et* $\tau \in \mathbb{R}_+$ *tels que* T *soit une* F*-contraction de type Hardy-Rogers . Si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *Il existe* $x_0 \in X$ *tel que* $x_0 \preccurlyeq Tx_0$.

(ii) X *Est régulier.*

Alors T *a un point fixe. De plus, si* $\alpha + 2\gamma + \delta + L < 1$ *et la condition suivante est vérifiée :*

(iii) *Pour tout* $z, w \in X$ *il existe* $v \in X$ *tel que* z *et* v *sont comparables et* w *et* v *sont comparables.*

Alors T *a un point fixe unique.*

Exemple 2.4.4. [27] Soit $X = \left\{ S_n = \dfrac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N} \right\}$ et $d(x, y) = |x - y|$ pour tout $x, y \in X$. (X, d) est un espace métrique complet. Soit T l'auto-application sur X définie par

$$TS_n = \begin{cases} S_1 & \text{si } n = 1, \\ S_{n+1} & \text{si n est pair,} \\ S_{n-1} & \text{si n est impair.} \end{cases}$$

S_1 est un point fixe de T.

2.5 Contraction de Suzuki

En 1962, Edelstein [30] a prouvé la version suivante du principe de contraction de Banach.

Théorème 2.38. [30] *Soient* (X, d) *un espace métrique compact et* $T : X \to X$ *une application. Supposons que* $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ *est satisfaite pour tout* $x, y \in X$ *avec* $x \neq y$. *Alors,* T *a un point fixe unique dans* X.

Suzuki [72] a prouvé des versions généralisées des résultats d'Edelstein dans un espace métrique compact comme suit :

Théorème 2.39. [72] *Soient* (X, d) *un espace métrique compact et* $T : X \to X$ *une application. Supposons que pour tout* $x, y \in X$ *avec* $x \neq y$*, on a*

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y) \Longrightarrow d(Tx, Ty) \leq d(x, y).$$

Alors, T *a un point fixe unique dans* X*.*

En 2014, Piri et Kumam [58] ont introduit une nouvelle application en combinant les idées de Wardowski [74] et Suzuki [72] appelée F-contraction de type Suzuki.

Définition 2.8. [58] *Soit* (X, d) *un espace métrique. Une application* $T : X \to X$ *est dite* F*-contraction de type Suzuki s'il existe* $F \in \mathcal{F}$ *et* $\tau > 0$ *tels que pour tout* $x, y \in X$ *avec* $Tx \neq Ty$*, on a*

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y) \implies \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)).$$

Théorème 2.40. [58] *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une* F*-contraction de type Suzuki. Alors,* T *a un point fixe unique dans* X*.*

Théorème 2.41 (Génerelisation de Suzuki). [71] *Soient (X, d) un espace métrique complet et* $T : X \to X$*. On définit une fonction décroissante* $\theta : [0, 1[\to \left]\frac{1}{2}, 1\right]$ *vérifiant :*

$$\theta(r) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq r \leq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ (1-r)r^{-2} & si \quad \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \leq r \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ (1+r)^{-1} & si \quad \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq r < 1 \end{cases}.$$

Supposons qu'il existe $r \in [0, 1[$*, tel que*

$$\theta(r)d(x, Tx) \leqslant d(x, y) \Longrightarrow d(Tx, Ty) \leqslant rd(x, y),$$

pour tout $x, y \in X$*. Alors* T *admet un point fixe unique* x^* *dans* X*. De plus on a* $\lim_{n\to\infty} T^n x = x^*$*.*

2.6 Contraction de type theta

Plusieurs auteurs ont généralisé le principe de contraction de Banach [11] en introduisant les différentes contractions sur les espaces métriques. L'une de ces généralisations a été donnée par Jleli et Samet [43], qui ont introduit un nouveau type de contraction s'appelé θ-contraction.

Soient (X, d) un espace métrique et Θ l'ensemble de toutes les fonctions $\theta :]0, +\infty[\rightarrow]1, +\infty[$ satisfaisant les conditions suivantes :

(Θ_1) θ est croissante,

(Θ_2) pour chaque suite $t_n \subset]0, +\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta(t_n) = 1$ ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$,

(Θ_3) il existe $r \in]0, 1[$ et $l \in]0, +\infty[$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\theta(t) - 1}{t^r} = l$.

Alors, une application $T : X \rightarrow X$ est dite θ-contraction s'il existe $k \in]0, 1[$ et $\theta \in \Theta$ tels que

$$\theta(d(Tx, Ty)) \leqslant [\theta(d(x, y))]^k , \tag{2.15}$$

pour tout $x, y \in X$ où $d(Tx, Ty) > 0$.

Exemple 2.6.1. Si T est une contraction de Banach, c'est-à-dire qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \text{ pour tout } x, y \in X.$$

Alors on a

$$\mathrm{e}^{d(Tx,Ty)} \leq \left(\mathrm{e}^{d(x,y)}\right)^k$$

La fonction $\theta :]0, +\infty[\rightarrow]1, +\infty[$ définie par $\theta(t) = \mathrm{e}^{\sqrt{t}}$ est appartient à Θ.

Remarque 2.6.1. Chaque application θ-contraction sur un espace métrique est continue.

Le résultat de point fixe suivant a été prouvé par Jleli et Samet [43], qui est une véritable généralisation du principe d'application de contraction de Banach.

Théorème 2.42. [42] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ est θ-contraction, Alors T a un point fixe dans X.*

On note $\tilde{\Theta}$ l'ensemble des fonctions $\theta :]0, \infty[\rightarrow]1, \infty[$ satisfaisant les conditions suivantes :

$(\Theta_1)'$: θ est croissante et continue.

$(\Theta_2)'$: $\inf\limits_{t\in]0,\infty[} \theta(t) = 1$

Exemple 2.6.2. Il est évident que les exemples suivants sont des fonctions appartenant à $\tilde{\Theta}$:

$$\theta_1(t) = 1 + t, \quad \text{avec } t > 0 \ , \quad \theta_2(t) = \mathrm{e}^{\sqrt{t}} \quad \text{avec } t > 0 \ .$$

Définition 2.9. [50] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application. T est appelée θ-type contraction, s'il existe $k \in \,]0, 1[$ et $\theta \in \tilde{\Theta}$ tels que pour tout $x, y \in X$,*

$$d(Tx, Ty) \geq 0 \Longrightarrow \theta(d(Tx, Ty)) \leqslant [\theta(M(x, y))]^k \tag{2.16}$$

où

$$M(x, y) = \max\left\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{1}{2}d(x, Ty), d(y, Tx)\right\}. \tag{2.17}$$

Définition 2.10. [50] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application. T est appelée θ-contraction de type Suzuki, s'il existe $k \in \,]0, 1[$ et $\theta \in \tilde{\Theta}$ tels que pour tout $x, y \in X$ avec $Tx \neq Ty$,*

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y) \Longrightarrow \theta(d(Tx, Ty)) \leqslant [\theta(M(x, y))]^k \tag{2.18}$$

où

$$M(x, y) = \max\left\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{1}{2}d(x, Ty), d(y, Tx)\right\}.$$

Remarque 2.6.2. On déduit d'après la définition précédente que si $T : X \to X$ est une θ-type contraction, alors T est une θ-contraction de type Suzuki.

Théorème 2.43. [50] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une θ-contraction de type Suzuki, alors T a un point fixe unique $z \in X$ et pour chaque $x \in X$ la suite $\{T^n x\}$ converge vers z.*

Remarque 2.6.3. Le théorème 2.43 est une généralisation et amélioration de résultats principaux de Suzuki [72].

A partir du théorème 2.43, nous pouvons obtenir le théorème d'existence du point fixe suivant pour les θ-type contractions.

Théorème 2.44. [50] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une θ-type contraction, alors T a un point fixe unique $z \in X$ et pour chaque $x \in X$ la suite $\{T^n x\}$ converge vers z.*

Remarque 2.6.4. Le théorème 2.44 est une généralisation et amélioration du principe de contraction de Banach [11] et de quelques résultats récents de Jleli et Samet [42, 43].

On note l'ensemble Ψ de toutes les fonctions $\psi :]0, \infty[\to]1, \infty[$ satisfaisant les conditions suivantes :

(ψ_1) θ est croissante et $\psi(t) = 1$ ssi $t = 1$.

(ψ_2) pour toute suite $\{t_n\} \subset]0, +\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta(t_n) = 1$ ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$,

(ψ_3) il existe $r \in]0, 1[$ et $l \in]0, +\infty[$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\theta(t) - 1}{t^r} = l$.

(ψ_4) $\psi(a + b) \leq \psi(a)\psi(b)$ pour tout $a, b > 0$.

En 2015, Hussain et al. [36] ont modifié et étendu le théorème 2.42 et prouvé le théorème de point fixe suivant pour une condition θ-contraction généralisée dans des espaces métriques complets :

Définition 2.11. *Soient (X, d) un espace métrique et soit $T : X \to X$ une application. T est appelée JS-contraction s'il existe une fonction $\psi \in \Psi$ et des nombres réels positifs k_1, k_2, k_3 et k_4 avec $0 \leq k_1 + k_2 + k_3 + 2k_4 < 1$ tel que*

$$\begin{aligned} \psi(d(fx, fy)) \quad \leq \quad & [\psi(d(x, y))]^{k_1} [\psi(d(x, fx))]^{k_2} [\psi(d(y, fy))]^{k_3} \\ & \times [\psi(d(x, fy) + d(y, fx))]^{k_4} , \end{aligned} \tag{2.19}$$

pour tout $x, y \in X$.

Théorème 2.45. *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une JS-contraction continue. Alors T a un point fixe unique.*

Maintenant, nous utilisons la condition suivante au lieu de la condition (θ_3).

(θ_3') est continue sur $(0, 1)$.

On note Ω l'ensemble de toutes les fonctions satisfaisant les conditions $(\theta_1), (\theta_2)$ et (θ_3').

Théorème 2.46. [40] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ est θ-contraction $(\theta \in \Omega)$, Alors T a un unique point fixe $z \in X$ et, pour tout $x_0 \in X$, la suite $T^n x_0$ converge vers z.*

Jamshaid et al [40] ont défini la θ-contraction de type Suzuki-Berinde pour prouver quelques théorèmes de point fixe dans des espaces métriques complets.

Définition 2.12. *Soient (X, d) un espace métrique et T un application sur X dans lui même. On dit que T est θ-contraction de type Suzuki-Berinde s'il existe $\theta \in \Omega$, $k \in (0,1)$ et $L > 0$ tels que, pour tout $x, y \in X$ avec $Tx \neq Ty$,*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}d(x,Tx) < d(x,y) \Longrightarrow \theta(d(Tx,Ty)) &\leq [\theta(d(x,y))]^k + L\min\{d(x,Tx),\\ &\quad d(x,Ty), d(y,Tx)\}.\end{aligned}$$

Théorème 2.47. [40] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ est θ-contraction de type Suzuki-Berinde, Alors T a un unique point fixe $z \in X$ et, pour tout $x_0 \in X$, la suite $\{T^n x_0\}$ converge vers z.*

Chapitre 3

Théorèmes du point fixe pour θ-contractions généralisées

Dans ce chapitre, nous combinons la notion d'applications α admissibles avec les concepts de θ-contraction et la contraction de type Berinde pour introduire un nouveau type de contractions et des résultats de points fixes dans des espaces métriques complets. On déduit aussi l'existence de points fixes dans des espaces métriques partiellement ordonnés et dans des espaces métriques complets munis d'un graphe en utilisant nos résultats principaux.

Définition 3.1. *[15] Soit (X, d) un espace métrique. Une application $T : X \to X$ est appelée une quasi (δ, L)-contraction faible s'il existe $\delta \in [0, 1)$ et $L \geq 0$ tels que*

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, Tx),$$

pour tout $x, y \in X$.

Définition 3.2. [9] *Soit (X, d) un espace métrique. Une application $T : X \to X$ satisfait la condition (B), s'il existe $\delta \geq 0$ et $L \geq 0$ tels que pour tout $x, y \in X$ on a*

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + L \min(d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)).$$

Définition 3.3. [19] *Soit (X, d) un espace métrique. Une application $T : X \to X$ est dite quasi contraction forte de type Ćirić, s'il existe $\delta \geq 0$ et $L \geq 0$ tels que pour tout $x, y \in X$ nous avons*

$$d(Tx, Ty) \leq \delta M(x, y) + Ld(y, Tx),$$

où

$$M(x,y) = \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{1}{2}\Big(d(x,Ty) + d(y,Tx)\Big)\right\}$$

Définition 3.4. [66] *Soient X un ensemble non vide et $T : X \to X$, $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ deux applications. T est α-admissible si pour $x, y \in X$*

$$\alpha(x,y) \geq 1 \implies \alpha(Tx,Ty) \geq 1.$$

Définition 3.5. [43] *Soit Θ l'ensemble de toutes les fonctions $\theta : (0,+\infty) \to (1,+\infty)$ tel que :*

(θ_1) : *θ est croissante,*

(θ_2) : *Pour chaque suite $\{t_n\}$ dans $(0,+\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \theta(t_n) = 1$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$,*

(θ_3) : *Il existe $r \in (0,1)$ et $l \in (0,\infty]$ tels que $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\theta(t)-1}{t^r} = l$.*

Exemple 3.0.1.

1. $\theta_1(t) = e^t$.
2. $\theta_2(t) = e^{te^t}$.
3. $\theta_3(t) = e^{\sqrt{t}}$.
4. $\theta_4(t) = e^{\sqrt{t}e^t}$.

Dans la suite, on note Ψ l'ensemble de tous fonctions continues $\psi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ satisfaisant :

(1) : ψ est croissante,

(2) : $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$, pour tout $t \in [0,+\infty)$.

Il est clair que si $\psi \in \Psi$, alors $\psi(t) < t$, pour tout $t \in [0,+\infty)$.

Définition 3.6. *[15] Soit (X,d) un espace métrique. Une application $T : X \in X$ est dite une ψ-contraction faible s'il existe $L \geq 0$ et $\psi \in \Psi$ tels que*

$$d(Tx,Ty) \leq \psi(d(x,y)) + Ld(y,Tx),$$

pour tout $x, y \in X$.

3.1 (α,ψ,θ)-contractions généralisées

Définition 3.7. *Soient (X,d) un espace métrique et $\alpha : X\times X \to \mathbb{R}^+$. Une application $T : X \to X$ est appelée une quasi (α,ψ,θ)-contraction généralisée , s'il existe $\theta \in \Theta$, $\psi \in \Psi$, $L \geq 0$ et $k : (0,\infty) \to [0,1)$ satisfait $\lim_{t\to s^+} \sup k(t) < 1$ pour tous les $s \in (0,\infty)$ tel que*

$$\alpha(x,y)\theta(d(Tx,Ty)) \leq [\theta(\psi(M(x,y)) + LN(x,y)]^{k(M(x,y))}, \tag{3.1}$$

pour tout $x,y \in X$ avec $d(Tx,Ty) > 0$, où

$$M(x,y) = \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\right\}$$

et $N(x,y) = \min\{d(x,Ty), d(y,Tx)\}$.

Si $\alpha(x,y) = 1$ pour tout $x,y \in X$, alors T est appelée une quasi (ψ,θ)-contraction généralisée.

Exemple 3.1.1. Soient $X = \{1,2,3\}$ et $d(x,y) = |x-y|$. On définit $T\colon X \to X$ et $\alpha : X\times X \to [0,\infty)$ par

$$Tx = \begin{cases} 2 & x \in \{1,2\} \\ 1 & x = 3 \end{cases}, \qquad \alpha(x,y) = e^{|x-y|}.$$

En prenant $\theta(t) = e^t$, $\psi(t) = \dfrac{2}{3}t$, $L = 4$ et $k(t) = e^{-\frac{1}{2}t}$.
Maintenant, nous montrons que la condition de contraction est vérifiée.

1. Pour $x = 1$ et $y = 3$, on a
$$3 \leq e^{-\frac{1}{2}}(\frac{4}{3}+4),$$
ce qui implique
$$e^3 \leq e^{e^{-\frac{1}{2}}(\frac{4}{3}+4)}.$$
2. Pour $x = 2$ et $y = 3$, on a
$$\frac{3}{2} \leq e^{-\frac{1}{2}}(\frac{4}{3}+4),$$
ce qui implique
$$e^{\frac{3}{2}} \leq e^{e^{-\frac{1}{2}}(\frac{4}{3}+4)}.$$

Alors T est un quasi (α,ψ,θ)- contraction généralisé.

Théorème 3.1. *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une quasi (α, ψ, θ)-contraction généralisée , avec $\theta \in \Theta$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) *T est α-admissible.*

(2) *Il existe $x_0 \in X$ tel que $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$.*

(3) *X est α-régulier, c'est-à-dire pour chaque suite $\{x_n\}$ dans X tel que $x_n \to x \in X$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\alpha(x_n, x) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Alors T a un point fixe.

Démonstration. D'après (2) il existe $x_0 \in X$ tel que $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$, soit $x_1 = Tx_0$. Si $x_0 = x_1$, alors x_0 est un point fixe. Supposons le contraire, comme T est α-admissible, et en utilisant (3.1) nous obtenons

$$\begin{aligned} \alpha(x_0, x_1)\theta(d(Tx_0, Tx_1)) &\leq [\theta(\psi(M(x_0, x_1)) + LN(x_0, x_1)]^{k(M(x_0,x_1))} \\ &= [\theta(\psi(M(x_0, x_1))]^{k(M(x_0,x_1))}, \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} M(x_0, x_1) &= \max\left\{d(x_0, x_1), d(x_0, Tx_0), d(x_1, Tx_1), \frac{d(x_0, Tx_1) + d(x_1, Tx_0)}{2}\right\} \\ &= \max\left\{d(x_0, x_1), d(x_0, x_1), d(x_1, x_2), \frac{d(x_0, x_2)}{2}\right\} \\ &\leq \max\{d(x_0, x_1), d(x_1, x_2)\}. \end{aligned}$$

Si $d(x_0, x_1) \leq d(x_1, Tx_1)$, on obtient

$$\begin{aligned} d(x_1, Tx_1)) &\leq \alpha(x_0, x_1)\theta(d(Tx_0, Tx_1)) \\ &\leq [\theta(\psi(d(x_1, Tx_1))]^{k(d(x_1,Tx_1))} \\ &< d(x_1, Tx_1)), \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction, alors on obtient $M(x_0, x_1) \leq d(x_0, x_1)$.

Par contre

$$\begin{aligned} N(x_0, x_{11}) &= \min\{d(x_0, Tx_1), d(x_1, Tx_0)\} \\ &= \min\{d(x_0, x_2), d(x_1, x_1)\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où par (3.1) et de l'inégalité $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ on obtient

$$\begin{aligned}\theta(d(x_1, Tx_1)) &\leq \alpha(x_0, x_1)\theta(d(Tx_0, Tx_1)) \\ &\leq [\theta(\psi(d(x_0, x_1))]^{k(d(x_0,x_1))}.\end{aligned}$$

En mettant $x_2 = Tx_1$, on obtient

$$\begin{aligned}d(x_1, x_2)) &\leq \alpha(x_0, x_1)\theta(d(Tx_0, Tx_1)) \\ &\leq [\theta(\psi(d(x_0, x_1))]^{k(d(x_0,x_1))}.\end{aligned}$$

Comme T est α-admissible, nous obtenons $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$, donc (3.1) donne

$$\begin{aligned}\theta(d(x_2, x_3)) &\leq \alpha(x_0, x_1)\theta(d(Tx_1, Tx_2)) \\ &\leq [\theta(\psi(M(x_1, x_2)) + N(x_1, x_2)]^{k(M(x_1,x_2))} \\ &\leq [\theta(M(x_0, x_1))]^{k(d(x_0,x_1)).k(M(x_1,x_2))}.\end{aligned}$$

Comme la première étape, nous pouvons vérifier facilement que $M(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_2)$ et $N(x_1, x_2) = 0$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\theta(d(x_2, x_3)) &\leq \alpha(x_1, x_2)\theta(d(Tx_1, Tx_2)) \\ &\leq [\theta(d(x_0, x_1))]^{k(d(x_0,x_1)).k(d(x_1,x_2))}.\end{aligned}$$

De la même façon, on construit une suite $\{x_n\}$ satisfaisant $x_{n+1} = Tx_n$. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} = x_{n_0+1}$, alors x_{n_0} est un point fixe. Supposons le contraire, donc $d(x_n, Tx_n) > 0$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ depuis la α-admissibilité de T pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en utilisant (3.1) nous obtenons

$$\begin{aligned}\alpha(x_n, x_{n+1})\theta(d(Tx_{n-1}, Tx_n)) &\leq [\theta(\psi(d(x_{n-1}, x_n))]^{k(d(x_{n-1},x_n))} \\ &\leq [\theta(d(x_0, x_1)]^P,\end{aligned}$$

où $P = \prod_{i=1}^{n} k(d(x_{i-1}, x_i))$.

La suite $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ est une suite décroissante et bornée inférieurement, alors elle est convergente. Car $\lim\limits_{t \to s^+} \sup k(t) < 1$, alors il existe $\delta \in (0, 1)$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $k(d(x_n, x_{n+1})) < \delta$, pour tout $n \geq n_0$. Ainsi $P \leq \delta^{n-n_0}$, et nous avons donc

$$1 < \theta(d(x_n, x_{n+1})) \leq [\theta(d(x_0, x_1))]^{\delta^{n-n_0}}, \tag{3.2}$$

pour tout $n \geq n_0$.

Passant à la limite quand $n \to \infty$, nous obtenons $\lim\limits_{n\to\infty} \theta(d(x_n, x_{n+1})) = 1$.

A partir de (θ_2) on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Maintenant, nous prouvons que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy.

A partir de (θ_3) il existe $r \in [0,1)$ et $l \in (0,\infty]$ tels que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\theta(d(x_n, x_{n+1}) - 1}{(d(x_n, x_{n+1})^r} = l$.

Si $l < +\infty$, soit $2\varepsilon = l$, donc d'après la définition de la limite il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\varepsilon = l - \varepsilon \leq \frac{\theta(d(x_n, x_{n+1}) - 1}{(d(x_n, x_{n+1})^r} = l$$

$$n(d(x_n, x_{n+1}))^r \leq \frac{n\big[\Big(\theta(d(x_0, x_1))\Big]^{\delta^{n-n_0}} - 1)}{\varepsilon}. \tag{3.3}$$

Si $l = +\infty$, soit A un nombre réel positif arbitraire, donc d'après la définition de la limite il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$ nous avons

$$\frac{\theta(d(x_n, x_{n+1})) - 1}{(d(x_n, x_{n+1}))^r} > A,$$

ce qui implique que

$$n(d(x_n, x_{n+1}))^r < \frac{n(\theta(d(x_0, x_1))^{\delta^{n-n_0}} - 1)}{A}. \tag{3.4}$$

Passant à la limite quand $n \to \infty$ dans (4.2)(resp dans (4.3)), on obtient

$$\lim_{n\to\infty} n(d(x_n, x_{n+1}))^r = 0.$$

De la définition de la limite, il existe $n_2 \geq \max\{n_0, n_1\}$ tel que pour tout $n \geq n_2$, on a

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}}.$$

Ensuite la série $\sum\limits_{n_1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1})$ est convergente, donc $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy.

Et comme (X, d) est complet, donc $\{x_n\}$ converge vers quelque $x \in X$.

Maintenant, montrons que x est un point fixe pour T, en effet, puisque X est régulier donc pour une suite $\{x_n\}$ satisfaite $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ et $x_n \to x$, en utilisant (3.1) on obtient

$$\begin{aligned} \theta(d(x_{n+1}, Tx)) &= \theta(d(Tx_n, Tx)) \\ &\leq [\theta(d(x_n, x)]^{k(d(x_n,x))} \\ &< \theta(d(x_n, x)), \end{aligned}$$

comme θ est croissante, on obtient

$$0 \leq d(x_{n+1}, Tx) < d(x_n, x).$$

En passant à la limite on obtient $d(x, Tx) = 0$ ce qui implique que $x = Tx$. $\square$

Remarque 3.1.1.

1. Si pour tout $x, y \in X$, nous avons $\alpha(x, y) \geq 1$, alors le point fixe est unique.
2. Si pour tout $x, y \in Fix(T)$, on a $\alpha(x, y) \geq 1$. Donc le point fixe est unique.
3. Si pour tout $x, y \in X$, il existe $z \in X$ tel que $\alpha(x, z) \geq 1$ et $\alpha(y, z) \geq 1$, alors le point fixe est unique.

Si $\alpha(x, y) = 1$, pour tout $x, y \in X$, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.2. *Soient (X, d) un espace métrique complet, $T : X \to X$ est une application, s'il existe $\theta \in \Theta, \psi \in \Psi$, $L \geq 0$ et $k : (0, \infty) \to [0, 1)$ avec $\lim_{t \to s^+} \sup k(t) < 1$ pour tous les $s \in (0, \infty)$ tels que pour tout $x, y \in X$*

$$\theta(d(Tx, Ty)) \leq [\theta(\psi(M(x, y)) + LN(x, y)]^{k(M(x,y))}, \tag{3.5}$$

avec $d(Tx, Ty) > 0$. Alors T a un point fixe.

Si on prend $\theta(t) = e^t$ et le logarithme de deux côtés dans corollaire 4.4 on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.3. *Soient (X, d) un espace métrique complet, $T : X \to X$ une application, s'il existe $\theta \in \Theta, \psi \in \Psi$, $L \geq 0$ et $k : (0, \infty) \to [0, 1)$ avec $\lim_{t \to s^+} \sup k(t) < 1$ pour tout $s \in (0, \infty)$ tels que pour tout $x, y \in X$*

$$d(Tx, Ty)) \leq k(M(x, y))[\psi(M(x, y)) + LN(x, y)], \tag{3.6}$$

avec $d(Tx, Ty) > 0$. Alors T a un point fixe.

Exemple 3.1.2. Soient $X = \mathbb{R}$ et $d(x, y) = |x - y|$. On définit $T \colon X \to X$ et $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ par

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} & \text{si } x, y \in [0, 1] \\ \dfrac{x}{3} + 1 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{5} & \text{si } x > 1 \end{cases},$$

et

$$\alpha(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{si } x,y\in[0,+\infty) \\ \dfrac{1}{5} & \text{sinon} \end{cases}.$$

En prenant $\theta(t)=e^{te^t}$, $\psi(t)=\frac{4}{5}t$ et $k(t)=e^{-\frac{1}{4}t}$.

Pour $x=0$ on obtient $T(0)=\frac{1}{2}$ et $\alpha(0,\frac{1}{2})=1$.

Pour tout $x,y\in[0,+\infty)$, on a $\alpha(x,y)=1$ et $T([0,+\infty))=(0,+\infty)$, ce qui implique que T est α-admissible. Maintenant, nous montrons que la condition de contraction est vérifiée. Pour $x,y\in X$, nous avons $T([0,1])=[\frac{1}{2},1]\subset[0,1]$. Alors T est α-admissible.

Nous discutons des cas suivants

1. Pour tout $x,y\in(-\infty,0)$ avec $x\neq y$, on a $d(Tx,Ty)>0$ et
$$\begin{aligned}\ln(\alpha(x,y))+\frac{d(Tx,Ty)}{d(x,y)}e^{d(Tx,Ty)-\frac{4}{5}d(x,y)} &= -\ln(5)+\frac{5}{12}e^{-\frac{7}{15}|xy|}\\ &\leq e^{-\frac{1}{4}|x-y|}\\ &= k(d(x,y).\end{aligned}$$

2. Pour tout $x,y\in[0,1]$ avec $x\neq y$, on a $d(Tx,Ty)>0$ et
$$\begin{aligned}\frac{d(Tx,Ty)}{d(x,y)}e^{d(Tx,Ty)-\frac{4}{5}d(x,y)} &= \frac{1}{4}e^{-\frac{3}{10}|xy|}\\ &\leq e^{-\frac{1}{4}|x-y|}\\ &= k(d(x,y).\end{aligned}$$

3. Pour tous $x,y\in(1,+\infty)$ avec $x\neq y$, on a $d(Tx,Ty)>0$ et
$$\begin{aligned}\frac{d(Tx,Ty)}{d(x,y)}e^{d(Tx,Ty)-\frac{4}{5}d(x,y)} &= \frac{5}{8}e^{-\frac{3}{5}|xy|}\\ &\leq e^{-\frac{1}{4}|x-y|}\\ &= k(d(x,y).\end{aligned}$$

Si $\{x_n\}$ une suite dans $[0,\infty)$ converge vers x, il est clair que $x\in[0,\infty)$. Alors toutes les hypothèses du théorème 3.1 sont vérifiées, donc T a un point fixe. Ici T a deux points fixes 1 et 2, puisque $\alpha(1,2)=0<1$ et pour $x>1$, ou $y<0$ on a $\alpha(x,y)=0$.

3.2 Théorème du point fixe dans un espace métrique complet partiellement ordonné

Dans cette section, nous donnons comme conséquences un théorème d'existence d'un point fixe dans un espace métrique complet partiellement ordonné.

Théorème 3.4. *Soient* $(X, \preceq, d)$ *un espace métrique ordonné complet et* $T : X \to X$ *est une application. Supposons que les assertions suivantes vérifiées :*

(1) *Pour tout* $x, y \in X$ *tels que* $x \preceq y$ *nous avons* $Tx \preceq Ty$.

(2) *Il existe* $x_0 \in X$ *tel que* $x_0 \preceq Tx_0$ *;*

(3) *Il existe* $\theta \in \Theta$, $\psi \in \Psi$, $L \geq 0$ *et* $k : (0, \infty) \to [0, 1)$ *satisfait* $\lim_{t \to s^+} \sup k(t) < 1$ *pour tous les* $s \in (0, \infty)$ *tels que*

$$\theta(d(Tx, Ty)) \leq [\theta(M(x, y))]^{k(M(x,y))},$$

pour tout $x, y \in X$ *avec* $x \preceq y$ *et* $d(Tx, Ty) > 0$. *Alors* T *a un point fixe.*

Démonstration. On définit $\alpha : X \times X \to \mathbb{R}_+$ par

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \preceq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

De (3), on a $x \preceq y$ donc $\alpha(x, y) = 1 \geq 1$, ce qui implique que T est un presque (α, ψ, θ)-contraction généralisé.

Aussi à partir de (1) pour $x \in X$ et $y \in Tx$ tels que $x \preceq y$, c'est-à-dire que $\alpha(x, y) = 1 \geq 1$ nous avons $Tx \preceq Ty$, alors T est α-admissible.

De (2) il existe $x_0 \in X$ tel que $x_0 \preceq Tx_0 = x_1$, ce qui implique $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$.

A partir de [54] tout espace ordonné est régulier. D'où touts les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaites, alors T a un point fixe. □

3.3 Théorème du point fixe dans un espace métrique complet munis d'un graphe

Maintenant, nous présentons l'existence d'un point fixe pour une application définie d'un ensemble dans lui même à partir d'un espace métrique complet X, muni d'un graphe.

Définition 3.8. *Soit (X, d) un espace métrique. Un graphe orienté G est un couple formé de deux ensembles, un ensemble $V(G)$ dont les éléments sont appelés sommets, et un ensemble $E(G)$ contenue dans le produit cartésien $X \times X$, dont les éléments sont appelés arcs ou arêtes. On notera $G = (V(G), E(G))$.*

Lorsque $a = (x, y) \in E(G)$ on dit que a est l'arête de G d'extrémités x et y, ou que a joint x et y, ou que a passe par x et y. Les sommets x et y sont dits adjacents dans G.

Considérons un graphe G tel que $V(G)$ l'ensemble de ses sommets coïncides avec X et $E(G)$ l'ensemble de ses arêtes contient toutes les boucles, c'est-à-dire $E(G) \supseteq \Delta$, où $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$. Supposons que G n'a pas d'arêtes parallèles, nous pouvons donc définir G avec le couple $(V(G), E(G))$.

Théorème 3.5. *Soit (X, d) un espace métrique complet muni d'un graphe $G = (V(G), E(G))$, où $V(G)$ est son sommets et $E(G)$ ses arêtes, supposons de plus que G n'a pas des arêtes parallèles et $T : X \to X$ une application. Supposons que le les affirmations suivantes vérifiés :*

(1) *Pour tout $x, y \in X$ tels que $(x, y) \in E(G)$ on a $(Tx, Ty) \in E(G)$.*

(2) *Il existe $x_0 \in X$ tel que $(x_0, Tx_0) \in E(G)$;*

(3) *Il existe $\theta \in \Theta$,$\psi \in \Psi$, $L \geq 0$ et $k : (0, \infty) \to [0, 1)$ tel que $\limsup_{t \to s^+} k(t) < 1$ pour tous les $s \in (0, \infty)$ satisfait*

$$\theta(d(Tx, Ty)) \leq [\theta(\psi(M(x, y)) + LN(x, y)]^{k(M(x,y))},$$

pour tout $x, y \in X$ avec $(x, y) \in E(G)$ et $d(Tx, Ty) > 0$. Alors T a un point fixe.

Démonstration. On définit $\alpha : X \times X \to \mathbb{R}_+$ par

$$\alpha\colon X \times X \to [0, +\infty), \quad \alpha(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \preceq y. \\ 0, & \text{Par ailleurs.} \end{cases}$$

A partir de (3), on a $(x, y) \in E(G)$ donc $\alpha(x, y) = 1 \geq 1$, ce qui implique que T est une quasi (α, ψ, θ)-contraction généralisé.

Aussi à partir de (1) pour $x \in X$ et $y \in Tx$ tels que $(x, y) \in E(G)$, c'est-à-dire $\alpha(x, y) = 1 \geq 1$ nous avons $(Tx, Ty) \in E(G)$, alors T est α-admissible. A partir de (2) il existe $x_0 \in X$ tel que $(x_0, Tx_0) \in E(G)$, ce qui implique $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$.

A partir de [39] tout espace métrique muni d'un graphe est régulier. Alors toutes les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaites, alors T a un point fixe. □

Chapitre 4

Théorèmes du point fixe dans des espaces métriques partiels

Dans ce chapitre, nous combinons la notion d'applications α-admissibles avec les concepts de θ-contraction et de contraction de type Berinde pour introduire un nouveau type de contractions et des résultats du point fixe associés dans des espaces métriques complets. On en déduit aussi l'existence de points fixes dans des espaces métriques partiellement ordonnés et dans des espaces métriques complets muni d'un graphe en utilisant nos principaux résultats.

Définition 4.1. [17] *Soit (X,d) un espace métrique. Une application $T : X \to X$ est dite faible au sens de Berinde, ou (δ-L)-contraction s'il existe $\delta \in [0,1)$ et $L \geq 0$ tel que*

$$d(Tx,Ty) \leq \delta d(x,y) + Ld(y,Tx),$$

pour tout $x, y \in X$.

Définition 4.2. [9] *On dit qu'une auto-application T sur un espace métrique (X,d) satisfait la condition (B) s'il existe $\delta \geq 0$ et $L \geq 0$ tel que pour tout $x, y \in X$ on a*

$$d(Tx,Ty) \leq \delta d(x,y) + L \min\Big(d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\Big).$$

Définition 4.3. [19] *L'auto-application T sur un espace métrique (X,d) est dite quassi contraction forte de type Ćirić s'il existe $\delta \geq 0$ et $L \geq 0$ tel que pour tout $x, y \in X$ nous avons*

$$d(Tx,Ty) \leq \delta M(x,y) + Ld(y,Tx),$$

où

$$M(x,y) = \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{1}{2}\Big(d(x,Ty)+d(y,Tx)\Big)\right\}.$$

Définition 4.4. [51] *Soit $X \neq \varnothing$. $p : X \times X \to [0,\infty)$ est une distance partielle sur X si et seulement si elle est satisfait les hypothèses suivantes*

(1) $p(x,x) = p(y,x) = p(x,y)$ *si et seulement si* $x = y$

(2) $p(x,x) \leq p(x,y)$

(3) $p(x,y) = p(y,x)$

(4) $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$.

L'espace (X,p) est appelé espace métrique partiel.

Il est clair que si $p(x,y) = 0$ alors les deux conditions (1) et (2) implique que $x = y$. toute distance partielle p sur X est engendre une T_0 topologie τ_p sur X qui a pour base la famille open de p-boules $B_p(x,\varepsilon) : \{x \in X, \varepsilon > 0\}$, où $B_p(x,\varepsilon) = \{y \in X : p(x,y) < p(x,x) + \varepsilon\}$, pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$.

Définition 4.5. [51] *Soit (X,p) un espace métrique partiel.*

— *Une suite $\{x_n\}$ dans un espace métrique partiel $(X,\ p)$ converge vers $x \in X$ si et seulement si $p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x,x_n)$.*

— *Une suite $\{x_n\}$ dans X est dite de Cauchy si $\lim_{n\to\infty} p(x_n,x_m)$ existe et fini.*

— *(X,p) est dit complet si toute suite de Cauchy $\{x_n\}$ dans X converge par rapport à τ_p vers un point $x \in X$ tel que $\lim_{n\to\infty} p(x,x_n) = p(x,x)$.*
Dans ce cas, on dit que la distance partielle p est complète.

Si p est une distance partielle sur X, alors les fonctions $d_p, p^w : X \times X \to \mathbb{R}_+$ donnée par

$$\begin{aligned} d_p(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y), \\ p^w(x,y) &= p(x,y) - \min\{p(x,x), p(y,y)\}, \end{aligned}$$

sont des mesures ordinaires sur X.

Lemme 4.1. [51] *Soit (X,p) un espace métrique partiel. On a*

1. *$\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans (X,p) si et seulement si elle est de Cauchy dans l'espace métrique (X,d_p).*

2. *X est complet si et seulement si l'espace métrique (X, d_p) est complet.*

Définition 4.6. *Soit (X, p) un espace métrique partiel, une suite (x_n) de X est dite 0-Cauchy si et seulement si $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$. L'espace (X, p) est dit 0-complet si et seulement si toute suite de 0-Cauchy converge dans (X, p).*

Proposition 4.2.

1. *Toute suite de 0-Cauchy dans (X, p) est de Cauchy dans (X, d_p).*
2. *Tout espace métrique partiel complet est 0-complet.*

Définition 4.7. [7] *Soit (X, p) un espace métrique partiel. Une application $T : X \to X$ est appelée (δ, L)-contraction faible s'il existe un $\delta \in [0, 1)$ et $L \geq 0$ tel que*

$$p(Tx, Ty) \leq \delta p(x, y) + Lp^w(y, Tx),$$

pour tout $x, y \in X$.

Définition 4.8. [7] *Soit (X, p) un espace métrique partiel. Une application $T : X \to X$ est appelée faiblement (ϕ, L)-contraction s'il existe une fonction de comparaison ϕ et $L \geq 0$ telle que*

$$p(Tx, Ty) \leq \phi(p(x, y)) + Lp^w(y, Tx),$$

pour tout $x, y \in X$.

Définition 4.9. [43] *Soit Θ l'ensemble de toutes les fonctions $\theta : (0, +\infty) \to (1, +\infty)$ satisfaisant :*

(θ_1) : *θ est croissante,*

(θ_2) : *Pour tout suite $\{\varepsilon_n\}$ dans $(0, +\infty)$,*

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 1 \text{ si et seulement si } \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0,$$

(θ_3) : *Il existe $\rho \in (0, 1)$ et $\varrho \in [0, \infty)$ tel que $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{\theta(t) - 1}{t^\rho} = \varrho$.*

Exemple 4.0.1. Les fonctions suivantes sont des éléments de Θ.
$\theta_1(t) = e^t$. $\quad \theta_2(t) = e^{te^t}$. $\quad \theta_3(t) = e^{\sqrt{t}}$. $\quad \theta_4(t) = e^{\sqrt{t}e^t}$.

4.1 (α, θ)-Contractions de type Hardy-Rogers

Définition 4.10. *Une auto-application T sur (X,p) est appelée quassi (α, θ)-contraction de type Hardy-Rogers, s'il existe $k \in [0,1)$, $\theta \in \Theta$ et $\alpha\ : X \times X \to \{-\infty\} \cup (0, +\infty)$ tel que*

$$p(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \alpha(x,y)\theta(p(Tx,Ty)) \leq \theta(M(x,y) + LN(x,y), \tag{4.1}$$

pour tout $x, y \in X$, où

$$M(x,y) = a_1 p(x,y) + a_2 p(x,Tx) + a_3 p(y,Ty) + a_4 p(x,Ty) + a_5 p(y,Tx),$$

avec $a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 + a_5 = 1, a_3 \neq 1, L \geq 0$ et $N(x,y) = \min\{p^w(x,Ty)), p^w(y,Tx)\}$.

Théorème 4.3. *Soit (X,p) un espace métrique partiel complet et $T : X \to X$ une quassi (α, θ)-contraction de type Hardy-Rogers satisfaisant les conditions suivantes :*

(1) *Il existe $x_0 \in X$ tel que $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$,*

(2) *T est α-admissible,*

(3) *X est α-régulier, c'est-à-dire pour toute suite $\{x_n\}$ dans X telle que $x_n \to x$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$, on a $\alpha(x_n, x) \geq 1$.*

Alors, T a un unique point fixe $x^* \in X$.

Preuve. De (1) il y a x_0 tel que $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$, où $x_1 = Tx_0$. Si $x_0 = x_1$ alors x_1 est un point fixe, supposons le contraire donc $p(Tx_0, Tx_1) = p(x_1, Tx_1) > 0$ alors en utilisant (4.1) on obtient

$$\theta(p(Tx_0, Tx_1)) \leq [\theta(M(x_0, x_1))]^k + p^w(N(x_0, x_1))$$

mais

$$\begin{aligned} M(x_0, x_1) &= a_1 p(x_0, x_1) + a_2 p(x_0, Tx_0) + a_3 p(x_1, Tx_1) + a_4 p(x_0, Tx_1) + a_5 p(x_1, Tx_0) \\ &\leq (a_1 + a_2 + a_4) p(x_0, x_1) + (a_3 + a_4) p(x_1, x_2) + (a_5 - a_4) p(x_1, x_1) \\ &\leq (a_1 + a_2 + a_4) p(x_0, x_1) + (a_3 + a_4 + a_5) p(x_1, x_2) \end{aligned}$$

et

$$N(x_0, x_1) = \min\{p^w(x_0, x_1), p^w(x_0, x_2)\} = 0.$$

Alors on a

$$\theta(p(x_1, x_2)) \leq [\theta(M(x_0, x_1))]^k < \theta(M(x_0, x_1)),$$

comme θ est croissante, nous obtenons

$$p(x_1, x_2) < M(x_0, x_1) \leq (a_1 + a_2 + a_4)p(x_0, x_1) + (a_3 + a_4 + a_5)p(x_1, x_2),$$

ce qui implique que

$$p(x_1, x_2) < \frac{(a_1 + a_2 + a_4)}{1 - a_3 - a_4 - a_5} p(x_0, x_1) = p(x_0, x_1).$$

D'où

$$\theta(p(x_1, x_2) = \theta(p(Tx_0, Tx_1) < \Big[\theta(p(x_0, x_1))\Big]^{k^n}.$$

Puisque T est α-admissible, nous avons $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$. Si $x_1 \neq x_2$ on obtient $p(Tx_1, Tx_2) > 0$, alors en utilisant (4.1) on avoir

$$\theta(p(Tx_1, Tx_2)) \leq [\theta(M(x_1, x_2))]^k + p^w(N(x_1, x_2))$$

comme dans la première étape, on obtient

$$\theta(p(x_2, x_3) = \theta(p(Tx_0, Tx_1) < \Big[\theta(p(x_1, x_2))\Big]^k < [\theta(p(x_0, x_1))]^{k^2}.$$

En continuant de cette façon, on construit une suite $\{x_n\}$ définie par $x_{n+1} = Tx_n$ vérifie $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ et $p(x_n, x_{n+1}) > 0$, on a donc

$$1 < \theta(p(x_n, x_{n+1}) = \theta(p(Tx_{n-1}, Tx_n) < \Big[\theta(p(x_0, x_1)) \ Gros]^{k^n}.$$

En passant à la limite quand $n \in \infty$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \theta(p(x_n, x_{n+1}) = 1,$$

ce qui implique que

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

On montre que la suite $\{x_n\}$ est de Cauchy, à partir de (θ_3) il existe $\rho \in (0, 1)$ et $\varrho \in [0, \infty]$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta(p(x_n, x_{n+1})) - 1}{(p(x_n, x_{n+1}))^\rho} = \varrho$$

Si $\varrho < \infty$, soit $2\varepsilon = \varrho$, donc à partir de définition de la limite il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\varepsilon = \varrho - \varepsilon \leq \frac{\theta(p(x_n, x_{n+1}) - 1)}{(p(x_n, x_{n+1})^\rho)} = \varrho$$

$$d(x_n,x_{n+1})^\rho \leq \frac{\theta(p(x_n,x_{n+1}))-1}{\varepsilon},$$

ce qui implique

$$n(p(x_n,x_{n+1}))^\rho \leq \frac{n(\theta(p(x_0,x_1))^{k^n}-1)}{\varepsilon}, \tag{4.2}$$

Si $\varrho=\infty$, soit A un nombre réel positif arbitraire, donc d'après la définition de la limite il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$ on a

$$\frac{\theta(p(x_n,x_{n+1}))-1}{(p(x_n,x_{n+1}))^\rho} > A,$$

ce qui implique que

$$n(p(x_n,x_{n+1}))^\rho \leq \frac{n(\theta(p(x_0,x_1))^{k^n}-1)}{A}. \tag{4.3}$$

En passant à la limite quand $n\to\infty$ dans (4.2)(resp dans (4.3)), on obtient

$$\lim_{n\to\infty} n(p(x_n,x_{n+1}))^\rho = 0.$$

De la définition de la limite, il existe $n_2 \geq \max\{n_0,n_1\}$ tel que pour tout $n \geq n_2$, on a

$$p(x_n,x_{n+1}) \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho}}}.$$

Alors la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p(x_n,x_{n+1})$ est convergente, donc son reste tend vers 0, ce qui implique que pour tout $n \geq m \geq n_0$, on a

$$p(x_n,x_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} p(x_i,x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{\infty} p(x_i,x_{i+1}) \to 0.$$

Donc $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy.

Puisque (X,p) est complet, donc $\{x_n\}$ est converge vers $x \in X$ et on a

$$\lim_{n\in\infty} p(x_{n+1},x) = \lim_{n,m\in\infty} p(x_n,x_m) = p(x,x) = 0.$$

Par (3), nous avons $\alpha(x_n,x) \geq 1$, alors en utilisant (4.1) nous obtenons

$$1 < \theta(p(x_{n+1},Tx)) \leq \Big[\theta(M(x_n,x))\Big]^k < \theta(p(x_n,x)),$$

ce qui implique que

$$\lim_{n\to\infty} \theta(p(x_{n+1},Tx)) = 1,$$

en appliquant (θ_2) on obtient

$$\lim_{n\to\infty} p(x_{n+1}, Tx)) = p(x, Tx) = 0.$$

Alors $p(x, x) = p(x, Tx) = 0$, donc la première propriété sur la distance partielle donne $x = Tx$. □

Si $\alpha(x, y) = 1$, pour tout $x, y \in X$ on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 4.4. *Soit (X, p) un espace métrique partiel et soit $T : X \to X$ une application tel que pour tout $x, y \in X$, on a*

$$\theta(p(Tx, Ty)) \leq [\theta(M(x, y)]^k + LN(x, y),$$

où $\theta \in \Theta$ et $k \in (0, 1)$. Alors T a un point fixe dans X.

Corollaire 4.5. *Soit $(X, p, \preceq)$ un espace métrique partiel partiellement ordonné et $T : X \to X$ une application croissante telle que pour tout $x, y \in X$ avec $x \preceq y$, nous avons*

$$\theta(p(Tx, Ty)) \leq \Big[\theta(M(x, y)\Big]^k + L\min\{p(x, Ty), p(y, Tx)\},$$

où $\theta \in \Theta$ et $k \in (0, 1)$.
Si les assertions suivantes sont vérifiées :

1. *Il existe $x_0 \in X$ tel que $x_0 \preceq Tx_0$.*
2. *Pour toute suite croissante $\{x_n\}$ dans X avec $x_n \to x$, on a $x_n \preceq x$.*

Alors T a un point fixe dans X .

Preuve. On définit la fonction $\alpha : X \times X \to \mathbb{R}_+$ par

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \preceq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Maintenant, nous vérifions les conditions du théorème 4.6, en fait, l'existence de $x_0 \in X$ avec $x_0 \preceq Tx_0$ implique que $\alpha(x_0, Tx_0) = 1$, aussi la monotonie de T implique qu'il est admissible. Par conséquent, toutes les conditions du théorème 4.6 sont satisfaites, alors T a un point fixe. □

4.2 (α, θ) contractions de type Suzuki

Maintenant, nous introduisons la notion de quassi (α, θ)-contraction de Suzuki de type Hardy-Rogers dans un espace métrique partiel.

Définition 4.11. *Soit (X, p) un espace métrique partiel et $T : X \to X$ une auto-application. T est une quassi (α, θ)-contraction de Suzuki de type Hardy-Rogers, s'il existe $\theta \in \Theta$ et $L \geq 0$ tel que*

$$\frac{1}{2}p(x, Tx) \leq p(Tx, Ty) \implies \theta(p(Tx, Ty)) \leq \Big[\theta(M(x, y)\Big]^k + LN(x, y), \tag{4.4}$$

pour tout $x, y \in X$.

Théorème 4.6. *Soit (X, p) un espace métrique partiel complet et $T : X \to X$ une quassi (α, θ)-contraction de Suzuki de type Hardy-Rogers telle que :*

(1) *Il existe $x_0 \in X$ tel que $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$,*

(2) *T est α-admissible,*

(3) *X est α-régulier, c'est-à-dire pour toute suite $\{x_n\}$ tel que $x_n \to x$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$, on a $\alpha(x_n, x) \geq 1$.*

Alors, T a un point fixe dans X.

Preuve. De l'hypothèse (1), il existe x_0 tel que $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$. Si $x_0 = x_1$, alors x_0 est un point fixe et la preuve est terminée. Supposons $x_0 \neq x_1$, alors $p(x_0, x_1) > 0$ et

$$\frac{1}{2}p(x_0, Tx_0) = \frac{1}{2}p(x_0, x_1) < p(x_0, x_1,$$

alors en utilisant (4.4) nous obtenons

$$\theta(p(x_1, x_2)) = \theta(p(Tx_0, Tx_1)) \leq [\theta(M(x_0, x_1))]^k + LN(p(x_0, x_1)$$

comme dans la preuve du théorème 3.1, on obtient

$$p(x_1, x_2) < p(x_0, x_1).$$

En continuant de cette manière, nous construisons une suite $\{x_n\}$ telle que

$$x_{n+1} = Tx_n \;\; ; \;\textit{et} \quad \alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1.$$

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} = x_{n_0+1}$, alors x_{n_0} est un point fixe. Supposons $x_n \neq x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque T est α-admissible nous avons $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ et $\frac{1}{2}p(x_n, Tx_n) = \frac{1}{2}p(x_n, x_{n+1}) < p(x_n, x_{n+1})$, alors en utilisant (4.4) on obtient

$$\theta(p(x_n, x_{n+1})) = \theta(p(Tx_{n-1}, Tx_n)) \leq [\theta(M(x_{n-1}, x_n))]^k + LN(x_{n-1}, x_n).$$

Le reste de la preuve est comme dans la preuve du théorème 3.1. □

Corollaire 4.7. *Soit (X,p) un espace métrique partiel complet muni d'un graphe $G = (V(G), E(G))$, où $V(G)$ est ses sommets et $E(G)$ ses arêtes, supposons de plus que G n'est pas d'arêtes parallèles et que $T : X \to X$ est une auto-application. Supposons que les affirmations suivantes soient vérifiées :*

(1) *Pour touts $x, y \in X$ tel que $(x,y) \in E(G)$ on a $(Tx, Ty) \in E(G)$.*

(2) *Il existe $x_0 \in X$ tel que $(x_0, Tx_0) \in E(G)$,*

(3) *Il existe $\theta \in \Theta$, $L \geq 0$ et $k \in [0,1)$ tels que*

$$\frac{1}{2}p(x,Tx) \leq p(x,y) \ \ \textit{implique} \ \ \theta(p(Tx,Ty)) \leq [\theta(M(x,y)]^k + LN(x,y),$$

pour tout $x, y \in X$ avec $(x,y) \in E(G)$ et $p(Tx,Ty) > 0$. Alors T a un point fixe.

Preuve. On définit $\alpha : X \times X \to \mathbb{R}_+$ par

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \preceq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

A partir de (3), on a $(x,y) \in E(G)$ donc $\alpha(x,y) = 1 \geq 1$, ce qui implique que T est une quassi (α,θ)- Contraction de Suzuki.

Aussi à partir de (1) pour $x \in X$ et $y \in Tx$ tel que $(x,y) \in E(G)$, c'est-à-dire $\alpha(x,y) = 1 \geq 1$ nous avons $(Tx,Ty) \in E(G)$, alors T est α-admissible.

De (2) il existe $x_0 \in X$ tel que $(x_0, Tx_0) \in E(G)$, ce qui implique $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$.

A partir de [39] tout espace métrique muni d'un graphe est régulier. Alors toutes les hypothèses du théorème 4.6 sont satisfaites, alors T a un point fixe. □

Exemple 4.2.1. Soit $X = \{1,2,3,4\}$ et $p(x,y) = \max\{x,y\}$. On définit $T\colon X \to X$ et $\alpha : X \times X \to [0,+\infty)$ par

$$Tx = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{1,2,3\} \\ 2 & \text{si } x = 4 \end{cases},$$

et

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x, y \in \{1,2,3\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

En prenant $\theta(t) = \mathrm{e}^t$, $a_1 = \frac{4}{5}$, $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$, $L = 1$ et $k = \frac{4}{5}$.
Soit x, y dans X tel que $\alpha(x,y) \geq 1$, donc $x, y \in \{1,2,3\}$ et pour ce cas nous avons :

$$\alpha(Tx, Ty) = \alpha(1,1) = 1 \geq 1.$$

Alors T est α-admissible.

Puisque p est symétrique, on distingue donc les cas suivants :

1. Pour $x = y = 1$, on a
$$\mathrm{e} = \mathrm{e}^{p(T1,T1)} \leq \mathrm{e}^{\frac{16}{25}} + 1 = 2,89648$$
2. pour $(x = 1$ ou $x = 2)$ et $y = 2$ on a
$$\mathrm{e}^{p(T1,T2)} = \mathrm{e} \leq \mathrm{e}^{\frac{32}{25}}$$
3. Pour pour tous $(x = 1$ ou $x = 3)$ et $y = 3$ on a
$$\mathrm{e}^{p(T1,T2)} = \mathrm{e} \leq \mathrm{e}^{\frac{48}{25}}$$
4. Pour pour tous $x = 2$ et $y = 3$ ou on a
$$\mathrm{e}^{p(T1,T2)} = \mathrm{e} \leq \mathrm{e}^{\frac{48}{25}}$$

Si $\{x_n\}$ une suite dans X converge vers x avec $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$, donc $x_n \in \{1,2,3\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $x \in \{1,2,3\}$ ce qui implique $\alpha(x_n, x) \geq 1$. Alors toutes les hypothèses du théorème 4.6 sont vérifiées, donc T a un point fixe. Ici T a un point fixe 1.

Exemple 4.2.2. Soit $X = [0, \infty)$ et $p(x,y) = \max\{x,y\}$. On définit $T \colon X \to X$ et $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ par

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{x+2}{2} & \text{si } x \in [0,4] \\ \dfrac{2x+1}{3} & \text{si } x > 4 \end{cases},$$

et

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x, y \in [0,4] \\ \dfrac{1}{5} & \text{sinon} \end{cases}.$$

En prenant $\theta(t) = e^t$, $\psi(t) = \dfrac{4}{5}t$, $L = 1$ et $k = \dfrac{1}{4}$.
Soit x, y dans X tel que $\alpha(x, y) \geq 1$, donc $x, y \in [0, 4]$ et pour ce cas nous avons $Tx, Ty \in [1, 3]$, ce qui implique que $\alpha(Tx, Ty) = 1 \geq 1$. Alors T est α-admissible.
Pour $x, y \in [0, 4]$ avec $x \geq y$, on a

$$\mathrm{e}^{p(Tx,Ty)} = \mathrm{e}^{\frac{x+2}{2}} \leq \mathrm{e}^{\frac{9(x+2)}{16}} + x$$

Si $\{x_n\}$ une suite dans X converge vers x avec $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$, donc $x_n \in [0, 4]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $x \in [0, 4]$ ce qui implique $\alpha(x_n, x) \geq 1$. Alors toutes les hypothèses du théorème 4.6 sont vérifiées, donc T a un point fixe qui est 2.

Chapitre 5

Applications aux équations différentielles fractionnaires

Dans ce chapitre, on va appliquer le théorème 3.1 pour étudier le problème d'existence de la solution pour un équation différentielle fractionnaire avec des conditions intégrales aux limites.

5.1 Rappel sur le calcul fractionnaire

5.1.1 La fonction Gamma

Définition 5.1. *: Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\alpha) > 0$, on définit la fonction suivante :*

$$\Gamma : \alpha \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.
En intégrant par parties, on peut voir que

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha),\ Re(\alpha) > 0.$$

En particulier

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!.$$

5.1.2 La fonction Bêta

Définition 5.2. *: La fonction Bêta est une fonction définie par :*

$$\begin{aligned} B(p,q) &= \int_o^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,\ Re(q)>0,\ Re(p)>0. \\ &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ Re(q)>0,\ Re(p)>0. \end{aligned}$$

L'intégration d'ordre fractionnaire est une généralisation de la notion de l'intégration d'ordre entier.

5.1.3 Intégrale Fractionnaire

Définition 5.3. [48] *L'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \geq 0$, pour une fonction $f \in C([a,b])$ est définie par :*

$$I_a^\alpha f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(t)dt & si\ \alpha > 0 \\ f(t) & si\ \alpha = 0 \end{cases}.$$

Si $a = 0$, I_a^α sera notée I^α.

Proposition 5.1. *Soit $f \in C([a,b])$. Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :*

(i) $I^0 f(t) = f(t)$.

(ii) $I^\alpha I^\beta f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t)$.

(iii) l'opérateur intégral I^α est linéaire.

$$I^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda I^\alpha f(t) + I^\alpha g(t), \alpha \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{C}.$$

(iv) $\dfrac{d}{dt}(I^\alpha f)(t) = I^{\alpha-1} f(t)$.

Il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire, dans cette partie on va citer les quatre célèbres approches de la dérivée fractionnaire : dérivée de Riemann-Liouville (1847), de Caputo (1967), et de Hadamard (1891) et, enfin, celle de Caputo-Hadamard (2012).

5.1.4 Dérivées fractionnaires au sens Riemann-Liouville

On donne l'approche de B.Riemann et J.Liouville de dérivation fractionnaire par l'intégrale suivante :

Définition 5.4. [48] *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre α* (avec $n-1 \leq \alpha < n$) *au sens de* ***Riemann-Liouville*** *est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \\ &= \frac{d^n}{dt^n}(I^{n-\alpha} f(t)) = D^n I^{n-\alpha} f(t). \end{aligned}$$

ici $n = [\alpha]+1$ et $[\alpha]$ désignant la partie entière de α.

Proposition 5.2.

1. *Composition avec l'intégrale fractionnaire :*

i) *L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche*

$$^{RL}D^r \left(I^r f(t)\right) = f(t),$$

en général on a

$$^{RL}D^{r_1} \left(I^{r_2} f(t)\right) = ^{RL} D^{r_1 - r_2} f(t)$$

et si $r_1 - r_2 < 0, ^{RL} D^{r_1-r_2} f(t) = I^{r_2-r_1} f(t)$.

ii) *En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas*

$$^{RL}D^{-r_1} \left({}_a^{RL}D_t^{r_2} f(t)\right) = ^{RL} D^{r_2-r_1} f(t) - \sum_{k=1}^{m} \left[{}^{RL}D_t^{r_2-k} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{r_1-k}}{\Gamma\left(r_1-k+1\right)}$$

avec $m-1 \leq r_2 < m$

2. *Composition avec les dérivées d'ordre entier La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne comutent que si :$f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$*

$$\frac{d^n}{dt^n}\left({}^{RL}D^r f(t)\right) = ^{RL} D^{n+r} f(t),$$

mais

$$^{RL}D^r \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) = ^{RL} D^{n+r} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-r-n}}{\Gamma(k-r-n+1)}.$$

3. *Pour l'opérateur différentiel fractionnaire Riemann-Liouville, la propriété d'interpolation correspondante lit*

$$\lim_{\alpha\to n} {}^{RL}D^{\alpha}f(t) = f^{(n)}(t).$$

$$\lim_{\alpha\to n} {}^{RL}D^{\alpha}f(t) = f^{(n-1)}(t)$$

4. *c'est un opérateur linéaire* $\alpha \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{C}$

$${}^{RL}D^{\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda^{RL}D^{\alpha}f(t) +^{RL} D^{r}g(t).$$

Lemme 5.3. *Soit* $\alpha > 0$*, alors*

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}f(t) = f(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1}t^{n-1}$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n = [\alpha] + 1,$

5.1.5 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Dans cette partie on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelques propriétaires essentielles.

Définition 5.5. [59] *Pour une fonction donnée* f *sur l'intervalle* $[a, b]$ *la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de* ***Caputo*** *de* f*, d'ordre* $\alpha > 0$ *est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds \\ &= I^{(n-\alpha)}D^{(n)}f(t), \end{aligned} \tag{5.1}$$

ici $n = [\alpha] + 1$ *et* $[\alpha]$ *désignant la partie entière de* α*.*

Définition 5.6. *On note l'opérateur* D^n*,* $n \in \mathbb{N}$ *différentiation de l'opérateur d'ordre entier, i.e.,*

$$D^n = \frac{d^n}{dt^n}.$$

Proposition 5.4. *On donne les propriétés suivantes :*

1. *Si* f *est une fonction continue on a :* ${}^{c}D^{\alpha}I^{\alpha}f = f$
2. *On suppose que* $n-1 < \alpha < n$*,* $m, n \in \mathbb{N}$*,* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et soit la fonction* $f(t)$ *telle que* ${}^{c}D^{\alpha}f(t)$ *existe, alors*

$${}^{c}D^{\alpha}D^{m}f(t) =^{c} D^{\alpha+m}f(t) \neq D^{mc}D^{\alpha}f(t).$$

3. *Soit* $n-1<\alpha<n,\ \ n\in\mathbb{N},\ \ \alpha\in\mathbb{R}$ *et soit* $f(t)$ *telle que* ${}^cD^{\alpha}f(t)$ *existe alors, on a les propriétés suivantes pour l'opérateur de Caputo.*

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to n}{}^cD^{\alpha}f(t) &= f^{(n)}(t).\\ &= f^{(n-1)}(t)-f^{(n-1)}(0).\end{aligned}$$

4. *La dérivation fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire. Soit* $n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N},\ \alpha,\lambda\in\mathbb{C}$ *:*

$${}^cD^{\alpha}(\lambda f(t)+g(t))=\lambda^cD^{\alpha}f(t)+^cD^{\alpha}g(t).$$

Exemple 5.1.1. La différentiation de la fonction constante pour l'opérateur de Caputo est

$${}^cD^{\alpha}c=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t(t-x)^{n-\alpha-1}c^{(n)}dx=0.$$

Alors ${}^cD^{\alpha}c=0$.

Et pour Riemann-Liouville :

$${}^{RL}D^{\alpha}c=\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha}\neq 0.$$

Lemme 5.5. *Soit* $\alpha>0$, *alors l'équation différentielles*

$${}^cD^{\alpha}f(t)=0$$

admet les solutions

$$f(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_{n-1}t^{n-1}$$

tels que : $c_i\in\mathbb{R},\ i=0,1,2,\cdots,n=[\alpha]+1.$

5.1.6 Dérivées fractionnaires au sens de de Hadamard

Dans cette partie on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard ainsi que quelques propriétaires

Définition 5.7. [48] *Soit une fonction* $f\in C([a,b[)$, *la dérivée fractionnaire d'ordre* $\alpha>0$ *au sens d'Hadamard de* f *est*

$${}_HD_a^{\alpha}=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\delta^n\int_a^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1}f(s)\frac{ds}{s}\qquad n-1<\alpha<n,n\in\mathbb{N}^*$$

tel que $\delta=t\dfrac{d}{dt}$

Proposition 5.6. [48] *Soit $\alpha > \beta > 0$. Si $f \in C([a,b[)$, alors :*

$$ {}_HD_a^\beta({}_HI_a^\alpha f)(t) = {}_H I_a^{\alpha-\beta} f(t)$$

En particulier, si $\alpha = \beta$, alors

$$ {}_HD_a^\alpha({}_HI_a^\alpha f)(t) = f(t)$$

5.1.7 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo-Hadamard

Dans cette partie on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard ainsi que quelques propriétaires

Définition 5.8. [41] *Soit $f \in AC_\delta^n([a,b]), n \in \mathbb{N}^*$. La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \geq 0$ au sens de Caputo-Hadamard de la fonction f est définie comme suite :*

$$ {}_H^CD_a^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} \delta^n f(s)ds \qquad n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$$

tel que $\delta = t\dfrac{d}{dt}$

Proposition 5.7. [48] *Soit $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in AC_\delta^n([a,b])$. La relation entre la dérivée de Caputo-Hadamard et celle de Hadamard est donnée par :*

$$ {}_H^CD_a^\alpha = {}_H D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta(k)f(a)}{k!} \left(\log \frac{x}{a}\right)^k \right]$$

où

$$ {}_H^CD_a^\alpha = {}_H D_a^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta(k)f(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{k-\alpha}$$

Proposition 5.8. [48] *Soit $\alpha > \beta > 0$. Si $f \in C([a,b])$, alors :*

$$ {}_H^CD_a^\beta({}_HI_a^\alpha f)(t) = I_a^{\alpha-\beta} f(t)$$

En particulier, si $\alpha = \beta$, alors

$$ {}_H^CD_a^\alpha({}_HI_a^\alpha f)(t) = f(t)$$

5.2 Existence des solutions pour un problèmes aux limites

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^q x(t) = f(t, x(t)), \ t \in J = [0,1], \\ x(0) = 0, \\ x(1) = \lambda \int_0^1 g(s, x(s))ds, \end{cases} \tag{5.2}$$

où ${}^cD^q$ avec $1 < q \leq 2$ est la dérivée fractionnaire de Caputo, $\lambda > 0$ et $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Soit $X = C(J, \mathbb{R})$ Soit l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ avec la norme de la convergence uniforme $\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)|, t \in J\}$.
Pour l'existence de la solution du problème (5.2), on a besoin du lemme suivant :

Lemme 5.9. *Une fonction x est une solution du problème (5.2) si et seulement si, x est une solution de l'équation intégrale suivante :*

$$x(t) = \lambda \int_0^1 g(s, x(s))ds, + \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s))ds,$$

pour tout $t \in J$, où

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(q)} \begin{cases} (t-s)^{q-1} - t(1-s)^{q-1}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ -t(1-s)^{q-1}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \tag{5.3}$$

Démonstration. Nous avons

$$I^q({}^cD^q x(t)) = x(t) - c_0 - c_1 t = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s))ds$$

en utilisant les valeurs limites nous obtenons

$$x(0) = c_0 = 0$$

$$\begin{aligned} x(1) &= c_1 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s, x(s)ds \\ &= \lambda \int_0^1 g(s, x(s))ds. \end{aligned}$$

Alors

$$c_1 = -\frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 ((1-s)^{q-1} f(s, x(s))ds + \lambda \int_0^1 g(s, x(s))ds,$$

ce qui donne

$$x(t) = -\frac{t}{\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,x(s))ds + \lambda t\int_0^1 g(s,x(s))ds + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (ts)^{q-1} f(s,x(s))ds$$

ce qui implique que

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,x(s))ds + \lambda t\int_0^1 g(s,x(s))ds,$$

où

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(q)}\begin{cases} (t-s)^{q-1} - t(1-s)^{q-1}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ -t(1-s)^{q-1} & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

□

$$\begin{aligned}\int_0^1 G(t,s)ds &= \frac{1}{\Gamma(q)}\left[\int_0^1 (t-s)^{q-1} - t(1-s)^{q-1}ds - \int_t^1 t(1-s)^{q-1}ds\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)}[t^q + 1] \leq \frac{2}{\Gamma(q)}.\end{aligned}$$

Soit $G_0 = \dfrac{2}{\Gamma(q)}$

Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(A_1) : Pour $x, y \in X$ avec $(x,y) \in E(G)$ implique $(Tx, Ty) \in E(G)$.

(A_2) : Il existe $x_0 \in X$ tel que $(x_0, Tx_0) \in E(G)$.

(A_3) : Il existe $\psi, \varphi \in L^1(J)$ tel que pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}|f(t,x_1(t)) - f(t,x_2(t))| &\leq \varphi(t)\|x_1 - x_2\|, \\ |g(t,x_1(t)) - g(t,x_2(t)| &\leq \psi(t)\|x_1 - x_2\|,\end{aligned}$$

où $c_0 = G_0\|\varphi\|_{L^1} + \lambda\|\psi\|_{L^1} < \dfrac{1}{2}$, et T une quasi (α,ψ,θ)-contraction généralisée.

Théorème 5.10. *Sous les hypothèses $(A_1) - (A_3)$, le problème (5.2) a une solution en X.*

Démonstration. Pour $(x,y) \in E(G)$ et pour tout $t \in J$ on a

$$\begin{aligned}|Tx(t) - Ty(t)| &= |\int_0^1 G(t,s)(f(s,x(s)) - f(s,y(s)))ds \\ &\quad +\lambda t\int_0^1 (g(s,x(s)) - g(s,y(s))ds)| \\ &\leq (G_0\|\varphi\|_{L^1} + \lambda\|\phi\|_{L^1})|x-y|,\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|Tx(t) - Ty(t)\|_\infty \leq G_0(\|\varphi\|_{L^1} + \|\phi\|_{L^1})\|x - y\|_\infty,$$

donc

$$d(Tx, Ty) \leq (G_0\|\varphi\|_{L^1} + \|\phi\|_{L^1})d(x, y) = c_0 M(x, y),$$

où

$$M(x, y) = \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{1}{2}(d(x, Ty) + d(y, Tx))\}.$$

On a donc

$$e^{\sqrt{d(Tx,Ty)}} \leq (e^{\sqrt{2c_0 M(x,y)}})^{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Ensuite, tous les les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaites de $\psi(t) = \frac{1}{2}t$, $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $L = 0$ et $\theta(t) = e^{\sqrt{t}}$, donc T a un point fixe qui est un solution du problème (5.2). □

Remarque 5.2.1. Dans l'application précédente, nous n'avions pas besoin de la troisième hypothèse du théorème 3.1, puisque dans [39] l'auteur mentionnait que tout espace métrique muni d'un graphe est un espace régulier.

Conclusion générale et perspective

Dans ce travail, nous avons présenté un théorème du point fixe en utilisant une combinaison de certains concepts pour obtenir un nouveau type de θ-contractions dans lequel notre étude améliore et généralise certains résultats. Un exemple a été donné pour illustrer nos résultats et en conséquence, nous avons donné des résultats en point fixe sur un espace métrique muni d'un ordre partiel ou d'un graphe. Enfin, nous avons appliqué notre nouveau théorème pour assurer l'existence de solutions pour un problème de valeur aux limites d'équations différentielles fractionnaires avec des conditions aux limites intégrales dans des conditions plus faibles

A l'avenir, On va chercher d'autres combinaisons des diverses contractions pour améliorer nos résultats

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, M. A. El-Gebeily, D. O'Regan, *Generalized contractions in partially ordered metric spaces*, Appl. Anal. 87 (2008), 1-8.

[2] J. Ahmad, A. E. Al-Mazrooei, Y. J. Cho and Y.O. Yang, *Fixed point results for generalized θ-contractions*, J. Nonlinear Sci. Appl, 10 (2017), 2350-2358.

[3] Y. I. Alber and S. G. Delabriere, *Principle of weakly contractive maps in Hilbert spaces*, New results in operator theory, Birkhäuser, Basel, 1997. 7-22.

[4] M. U. Ali, T. Kamran, M. Postolache, *Solution of Volterra integral inclusion in b-metric spaces via new fixed point theorem*, Nonlinear Anal. Model. Control, 22(1)(2017), 17-30.

[5] A. Ali, S. Mahideb and S. Beloul, *A common fixed point theorem for multi-valued θ_δ-contractions via subsequential continuity*, Communications. Vol 69(2), (2020), 1473-1483.

[6] Al-Mazrooei, Y. J. Cho and Y.O. Yang, *Fixed point results for generalized θ-contractions*, J. Nonlinear Sci. Appl, 10 (2017), 2350-2358.

[7] I. Altun, F. Sola, H. Simsek, *Generalized contractions on partial metric spaces*, Topology Appl. 157 (2010), 2778-2785.

[8] I. Altun, G .Minak, H. Dag, *Multivalued F-contractions on complete metric spaces*, Demonstr. Math, 47(2014).

[9] G. V. R. Babu, M. L. Sandhy and M. V. R. Kameshwari, *A note on a fixed point theorem of Berinde on weak contractions*, Carpathian J. Math. 24 (2008), 8-12.

[10] Z. Badehiana, M. S. Asgaria, *Integral type Fixed point Theorems for α-admissible Mappings Satisfying $\alpha - \psi - \phi$-Contractive Inequality*, Filomat 30(12) (2016), 3227-3234.

[11] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math, 3 (1922), 133-181.

[12] S. Beloul, *Common fixed point theorems for multi-valued contractions satisfying generalized condition(B) on partial metric spaces*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. Vol. 30(5) (2015), 555-566.

[13] S. Beloul, *A common fixed point theorem For generalized almost contractions in metric-like spaces*, Appl. Math. E-Notes, 18 (2018), 127-139.

[14] S. Beloul and H. Kaddouri, *Fixed point theorems for subsequentially multi-valued F_δ-contractions in metric spaces*, Facta Univ Nis Ser. Math. Inform, 35.2 (2020), 379-392.

[15] V. Berinde, *Approximating fixed points of weak φ-contractions using the Picard iteration*, Fixed Point Theory, (2003), 131-142

[16] V. Berinde, *Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration*, Nonlinear Anal. Forum 9 (2004), 45–53.

[17] V. Berinde, *General constructive fixed point theorems for Ćiric-type almost contractions in metric spaces*, Capathian J. Math. 24(2008), 10-19.

[18] V. Berinde, *Iterative Approximation of Fixed Points*, Editura Efemeride, Baia Mare, 2002.

[19] V. Berinde, *Some remarks on a fixed point theorem for Ćiric-type almost contractions*, Carpath. J. Math. 25 (2009), 157-162.

[20] D. W. Boyd and S. W. Wong, *On nonlinear contractions*, Proc. Amer. Math. Soc, 20 (1969), 458-464.

[21] S. Chandok and M. Postolache, *Fixed point theorem for weakly Chatterjea-type cyclic contractions*, Fixed Point Theory Appl, 2013(1), 1-9.

[22] S. K. Chaterjea, *Fixed point theorems*, C. R. Acad. Bulgare Sci. 25 (1972), 727–730.

[23] B. S. Choudhury, P. Konor, B. E. Rhoades and N. Metiya, *Fixed point theorems for generalized weakly contractive mapping*, Nonlinear Anal. 74 (2011), no. 6, 2116–2126.

[24] B. S. Choudhury, N. Metiya and M. Postolache, *A generalized weak contraction principle with applications to coupled coincidence point problems*, Fixed Point Theory Appl, 2013(1), 1-21.

[25] B. L. Ćirić, *Generalized contractions and fixed-point theorems*, Publ. Inst. Math. (Belgr.) 12(26) (1971), 19-26.

[26] B. L. Ćirić, *Multi-valued nonlinear contraction mappings*, Nonlinear Anal. (2009), 2716-2723.

[27] M. Cosentino, P. Vetroa, *Fixed Point Results for F-Contractive Mappings of Hardy-Rogers-Type*, Filomat 28(4) (2014), 715-722

[28] G. Durmaz, *Some theorems for a new type of multivalued contractive maps on metric space*, Turkish J. Math. 41(2017), 1092-1100.

[29] P. N. Dutta and B. S. Choudhury, *A generalisation of contraction principle in metric spaces*, Fixed Point Theory Appl, 2008, 1-8.

[30] M. Edelstein,*On fixed and periodic points under contractive mappings*, J. London Math. Soc, 37(1962), 74-79.

[31] L. Fornari, V. Pata, *A note on weak contractions in compact metric spaces*, preprint (2019).

[32] M. Geraghty, *On contractive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., 40 (1973), 604-608.

[33] T. Gnana Bhaskar, V. Lakshmikantham, *Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications*, Nonlinear Anal : Theory, Methods and applications 65.7 (2006), 1379-1393.

[34] G. E. Hardy, T. D. Rogers, *A generalization of a fixed point theorem of Riech*, Bull.Cand.Math. Soc.16 (1963), 201-206.

[35] N. Hussain, M. A. Kutbi, P. Salimi, *Fixed point theory inα-complete metric spaces with applications*, Abstr. Appl.Anal, Vol. 2014, No. SI41, 1-11

[36] N. Hussain, V. Parvaneh, B. Samet, C. Vetro, *Some fixed point theorems for generalized contractive mappings in complete metric spaces*, Fixed Point Theory Appl,2015(1), 1-17.

[37] I. Iqbal, N. Hussain, *Fixed point theorems for generalized multivalued nonlinear F-contractions*, J. Nonlinear Sci. Appl, 9(2016), 5870-5893.

[38] H. Isik and C. Ionescu, *New type of multivalued contractions with related results and applications*, U.P.B. Sci. Bull, Series A, 80(2) (2018), 13-22.

[39] J. Jachymski, *The contraction principle for mappings on a metric space with a graph*, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 1359-1373.

[40] A. Jamshaid, A. Abdullah E, C. Y. Je, Y. Young-Oh, *Fixed point results for generalized θ-contractions*, J. Nonlinear Sci. Appl. (2017), 10(5), 2350-2358.

[41] F. Jarad, D. Baleanu and T. Abdeljawad, *Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives*, Adv. Differ. Equ, No.1 (2012), 1-8.

[42] M. Jleli, E. Karapınar, B. Samet, *Further generalizations of the Banach contraction principle*, J. Inequal. Appl, 2014, 439.

[43] M. Jleli and B. Samet, *A new generalization of the Banach contraction principle*, J. Inequal. Appl, 2014(1), 1-8.

[44] H. Kaddouri, H. Isik and S. Beloul, *On new extensions of F-contraction with an application to integral inclusions*, U.P.B. Sci. Bull. Series A Vol.81(3) (2019), 31-42.

[45] T. Kamran, M. Postolache, U. M. Ali and Q. Kiran, *Feng and Liu type F-contraction in b-metric spaces with application to integral equations*, J. Math. Anal. 7 (2016), No. 5, 18-27.

[46] R. Kannan, *Some results on fixed points*, Bull. Cal. Math. Soc. 60 (1968), 71-76.

[47] E. Karapinar, *Discussion on (α, ψ)- contractions on generalized metric spaces*, Abstr. Appl. Anal, (2014).

[48] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier Science B.V, Amsterdam (2006).

[49] A. Latif, W. Sintunavarat and A. Ninsri, *Approximate fixed point theorems for partial generalized convex contraction mappings in α-complete metric spaces*, T. J. M, Vol. 19 (2015), No. 1, pp. 315-333.

[50] X. Liu, S. Chang, Y. Xiao and L. C. Zhao, *Existence of fixed points for θ-type contraction and θ-type Suzuki contraction in complete metric spaces*, Fixed Point Theory and Applications, 2016(1), 1-12.

[51] S. G. Matthews, *Partial metric topology*, Proc. of the 8^{th} Summer Conference on General Topology and Appl., Ann. New York Acad. Sci., 728(1994), 183-197.

[52] A. Meir, E. Keeler, *A theorem on contraction mappings*, J. Math. Anal. Appl. 28 (1969), 326-329.

[53] S. Mahideb, A. Ali, S. Beloul, *On generalized almost theta-contractions with an application to fractional differential equations*, U.P.B.Sci. Series A, 2021, vol. 83, no 3, 35-44.

[54] J. J. Nieto, and R. Rodríguez-López, *Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations*, Order. 22(2005), 223-239.

[55] J. J. Nieto, R. Rodriguez-Lopez, *Existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets and applications to ordinary differential equation*, Acta Math. Sin. Engl. Ser, 2007, vol. 23, no 12, p. 2205-2212.

[56] A. Pansuwan, W. Sintunavarat, V. Parvaneh and Y. J. Cho, *Some fixed point theorems for (α, θ, k)-contraction multivalued mappings with some applications*, Fixed Point Theory Appl, 2015(1), 1-11.

[57] V. Pata, *Fixed Point Theorems and Applications*, Vol. 116. Cham : Springer, 2019.

[58] H. Piri, P. Kumam, *Some fixed point theorems concerning F-contraction in complete metric spaces*, Fixed Point Theory and Applications, 2014(1), 1-11.

[59] I. Podlubny, *Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation*, Fractional Calculus and Applied Analysis. 5(2002), 367-386.

[60] O. Popescu, *Fixed points for (ψ, ϕ)-weak contractions*, Appl. Math. Lett. 24.1 (2011), 1-4.

[61] P. D. Proinov, *A generalization of the Banach contraction principle with high order of convergence of successive approximations*, Nonlinear Anal. 67 (2007), 2361-2369.

[62] A. C. Ran, M. C. Reurings, *A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations*. Proc. Am. Math. Soc, 132 (2004), 1435-1443.

[63] S. Reich, *Some remarks concerning contraction mapping*, Canad. Math. Bull. 14 (1971), 121-124.

[64] B. E. Rhoades, *Some theorems on weakly contractive maps*, Nonlinear Anal. 47 (2001), no. 4, 2683–2693.

[65] P. Salimi, A. Latif, N. Hussain, *Modified $\alpha - \eta$-contractive mappings with applications*, Fixed Point Theory Appl, 2013(1), 1-19.

[66] B. Samet, C. Vetro and P. Vetro, *Fixed point theorems for $\alpha - \psi$ -contractive type mappings*, Nonlinear Analysis, 75.4 (2012), 2154-2165.

[67] N. A. Secelean, *Iterated function systems consisting of F-contractions*, Fixed Point Theory and Appl, 2013(1), 1-13.

[68] W. Shatanawi, M. Postolache, *Common fixed point results of mappings for nonlinear contractions of cyclic form in ordered metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. 2013(1), 1-13.

[69] W. Shatanawi and M. Postolache, *Coincidence and fixed point results for generalized weak contractions in the sense of Berinde on partial metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. 2013(1), 1-17.

[70] T. Sistani and M. Kazemipour, *Fixed point theorems for $\alpha - \psi$-contractions on metric spaces with a graph*, J. Adv. Math. Stud.39 7(2014), 65-79.

[71] T. Suzuki, *A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol 136 (5) (2008), 1861-1869.

[72] T. Suzuki, *A new type of fixed point theorem in metric spaces*, Nolinear Anal, 71(2009), 5313-5317.

[73] A. Tomar, S. Beloul, R. Sharma and S. Upadhyay, *Common fixed point theorems via generalized condition (B) in quasi-partial metric space and applications*, Demonstr. Math, 50.1 (2017), 278-298.

[74] D. Wardowski, *Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces*, Fixed Point Theory and Appl, 2012(1), 1-6.

[75] T. Zamfirescu, *Fixed point theorems in metric spaces.* Arch. Math, 23(1)(1972), 292-298.

[76] D. W. Zheng, Z. Y. Cai and P. Wang, *New fixed point theorems for $\theta - \phi$-contraction in complete metric spaces*, J. Nonlinear Sci. Appl. 10(2017), 2662-2670.