



**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la**  
**Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED**  
**FACULTÉ DESSCIENCES EXACTES**

**Mémoire de fin d'étude**

**MASTER ACADEMIQUE**

Domaine: Mathématiques et Informatique  
Filière: Mathématiques  
Spécialité: Mathématique fondamentale et appliquée

**Thème**

**Les ondelettes et leurs applications aux  
intégrations numériques**

Présenté par : Azizi Atika,  
Charrahi Sara

Soutenu le 22 Juin 2019 devant le jury composé de

Dc. Azeb Ahmed Abdelaziz  
Dc. Dehda Bachir  
Dc. Ben Ali Brahim

Président  
Rapporteur  
Eaminateur

MCA.Univ. d'ElOued  
MCB.Univ. d'ElOued  
MCA. Univ. d'El Oued

# *Dédicaces*

*Nous dédions ce travail à :*

*Nos chers parents*

*Nos frères et nos soeurs*

*Nos amies*

*Et à tous notre familles*

*Nous dédions ce travail au Dieu*

*tout-puissant pour trouver l'acceptation et le succès.*

# Remerciements

*Avant toute chose, nous tenons à remercier "**Allah**" le tout puissant, pour nous avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail.*

*Comme nous tenons à remercier vivement, encadreur de mémoire **Dr. Dehda Bachir** Maître de Conférence à l'université Echahid Hamma Lakhder d'El Oued, pour sa patience, son encouragement et sa disponibilité ainsi le soutien très précieux tout au long de ce travail.*

*Nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.*

*Nous remercions vivement nos parents pour l'aide et le soutien moral qu'ils nous ont prodigués.*

*Nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux vont également à nos camarades de la promotion 2019 de Mathématiques et nos amis surtout **Amina, Maroua, Zineb** pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal .*

*Enfin que tous ceux qui n'ont pas été mentionnés et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail vous nos remerciements.*

---

## Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude d'effet pratique des méthodes numériques pour calculer des intégrations numériques. On commence par un rappel sur les fonctions réelles, où on cite quelques théorèmes et notions principales comme le théorème des accroissements finis, les formules de Taylor et développements limités et le polynôme d'interpolation. Ensuite, les méthodes classiques d'intégration numérique comme (rectangle, Trapèze et Simpson). Enfin on termine avec un rappel d'ondelette de Haar avec des exemples illustratifs qui montrent l'efficacité de cette méthode à partir d'une comparaison des résultats d'erreur absolue de chaque méthode.

**Mots-clés :** l'intégration numérique, méthode quadrature, ondelettes, analyse multi-résolution.

---

## Abstract

This work is devoted to the study of practical effect of numerical methods to solve numerical integration. We start with a reminder about the real functions, where we quote some main theorems and notions for example the theorem of finite increments, the Taylor formulas and limited developments and the interpolation polynomial. Then the classical methods of numerical integration for example (rectangle, Trapèze and Simpson). Finally we conclude with Haar wavelet theory with illustrative examples that show the efficiency of this method from a comparison of the absolute error results of each method.

**Keywords :** numerical integration, quadrature method, wavelets, multiresolution analysis .

# Table des matières

Introduction générale	1
<b>1 Rappel sur les fonctions réelles</b>	<b>4</b>
1.1 Notions et quelques exemples . . . . .	4
1.2 Limite d'une fonction . . . . .	5
1.2.1 Limite finie et infinie en point $x_0$ . . . . .	5
1.2.2 Limite finie et infinie en $+\infty$ . . . . .	5
1.2.3 Limite à gauche et limite à droite . . . . .	6
1.3 Continuité d'une fonction . . . . .	7
1.3.1 Cas d'un intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ . . . . .	7
1.3.2 Cas d'un intervalle fermé $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ . . . . .	8
1.3.3 Résultats généraux sur la continuité . . . . .	9
1.3.4 Théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	9
1.4 Dérivation d'une fonction . . . . .	9
1.4.1 Définitions . . . . .	9
1.4.2 Propriétés générales . . . . .	10
1.4.3 Dérivées successives . . . . .	11
1.4.4 Conséquences de la dérivation . . . . .	11
1.5 Formules de Taylor et développements limités . . . . .	12
1.6 Intégrale de fonction . . . . .	14
1.6.1 Sommes de Darboux et l'intégrale . . . . .	14
1.6.2 Intégrale d'une fonction continue . . . . .	15
1.6.3 Propriétés générales . . . . .	16
1.6.4 Primitive d'une fonction . . . . .	16
1.7 Le polynôme d'interpolation d'une fonction . . . . .	17

<b>2</b>	<b>Les méthodes classiques d'intégration numérique</b>	<b>19</b>
2.1	Formules de quadrature . . . . .	20
2.2	Lois de Newton-Cotes simples . . . . .	22
2.2.1	Principe . . . . .	22
2.2.2	Méthode du rectangle ( $p = 0$ ) . . . . .	22
2.2.3	Méthode du point milieu ( $p = 0$ ) . . . . .	24
2.2.4	Méthode du Trapèze ( $p = 1$ ) . . . . .	25
2.2.5	Méthode de Simpson ( $p = 2$ ) . . . . .	26
2.2.6	Méthodes d'ordres plus élevés . . . . .	28
2.3	Lois de Newton-Cotes composites . . . . .	29
2.3.1	Principe . . . . .	29
2.3.2	Méthode des rectangles ( $p = 0, n = m$ ) . . . . .	29
2.3.3	Méthode des Trapèzes ( $p = 1, n = m$ ) . . . . .	31
2.3.4	Méthode de Simpson ( $p = 2, n = 2m$ ) . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Méthodes d'intégration numérique basées sur les ondelettes</b>	<b>34</b>
3.1	Définitions et quelques exemples . . . . .	34
3.1.1	Qu'est ce qu'une ondelette . . . . .	34
3.1.2	Propriétés des ondelettes . . . . .	35
3.2	Analyse multirésolution (AMR) . . . . .	36
3.2.1	Définitions et quelques exemples . . . . .	36
3.2.2	La fonction d'échelle . . . . .	37
3.2.3	Construction des ondelettes . . . . .	37
3.3	La base d'ondelette de Haar sur $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	38
3.4	La base d'ondelette de Haar sur $L^2([a, b])$ . . . . .	41
3.4.1	Formule numérique d'intégrales simples par La base d'ondelette de Haar . . . . .	42
3.4.2	L'erreur d'intégrales simples utilisant les ondelettes de Haar . . . . .	44
3.4.3	Généralisation . . . . .	45
3.5	Application pour les intégrales simples . . . . .	46
	<b>Conclusion générales</b>	<b>50</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>51</b>

# Table des figures

2.1	Méthode simple du rectangle ( $p = 0$ ). . . . .	23
2.2	Méthode simple du point milieu ( $p = 0$ ). . . . .	24
2.3	Méthode simple du Trapèze ( $p = 1$ ). . . . .	26
2.4	Méthode simple de Simpson ( $p = 2$ ). . . . .	27
2.5	Méthode composite des rectangles ( $p = 0$ ) pour $m = 6$ intervalles (c'est à dire $n = 6$ sous intervalles et $n + 1 = 7$ points au total). . . . .	30
2.6	Méthode composite des Trapèzes ( $p = 1$ ) pour $m = 6$ intervalles (c'est à dire $n = 6$ sous intervalles et $n + 1 = 7$ points au total). . . . .	31
2.7	Méthode composite de Simpson ( $p = 2$ ) pour $m = 3$ intervalles (c'est à dire $n = 6$ sous intervalles et $n + 1 = 7$ points au total). . . . .	32
3.1	approximation de Haar de la fonction $f(x) = \sin(\pi x)$ pour $M = 4$ : - - - courbe exacte, - courbe Haar. . . . .	42
3.2	approximation de Haar de la fonction $f(x) = \sin(\pi x)$ pour $M = 8$ : - - - courbe exacte, - courbe Haar. . . . .	42

# Introduction générale

L'intégration numérique joue un rôle très important dans beaucoup des branches des mathématiques, on trouve l'intégration en les équations intégrales, en des équations différentielles et à certaines types des fonctions spéciales comme la fonction de la distribution normale et la fonction Gamma. Comme la plupart des intégrales ne peuvent pas être déterminées via des méthodes analytiques ou le résultat d'intégrale est une fonction très compliquée ou elle-même longue à évaluer, les méthodes numériques d'intégration ont pris un intérêt croissant de nombreux chercheurs pour rapprocher cette dernière.

Beaucoup de travail ont été fait dans ce domaine en termes de règle d'intégration numérique en quadrature. La règle de quadrature est basée sur une interpolation polynomiale. Les polynômes d'interpolation sont utilisés pour trouver les poids correspondant aux noeuds. La quadrature numérique présente certains inconvénients notamment :

-L'utilisation d'un grand nombre de noeuds équidistants dans le cas de la règle de quadrature de Newton-Cotes [1] peut provoquer un comportement erratique avec une interpolation polynomiale avec un degré élevé.

-La règle de quadrature de Gauss[1, 4] est également basée sur une interpolation polynomiale mais les noeuds ainsi que les poids sont choisis pour maximiser le degré de précision de la règle résultante.

-La règle de quadrature gaussienne[1, 4] peut être dérivée par la méthode des coefficients indéterminés, mais les équations résultantes pour les  $2n$  noeuds inconnus et les poids ne sont pas linéaires.

-Cette procédure est assez lourde pour les calculs manuels et les noeuds et les poids sont totalisés à l'avance avant l'évaluation numérique des intégrales.

Afin de surmonter certaines des difficultés énumérées ci-dessus, nous proposons une nouvelle méthode basée sur les ondelettes pour trouver des solutions calcule les intégrales numériques .

En effet les ondelettes ont été utilisées avec succès dans le domaine des approximations numériques. Certaines des applications d'ondelettes concernent la recherche de solutions numériques d'équations intégrales et d'intégration numérique, d'équations différentielles ordinaires, d'équations différentielles partielles et d'équations différentielles partielles fractionnaires. Différents types d'ondelettes ont été utilisés dans telles applications, par exemple Haar [8, 9], CAS ondelette[10], Daubechies [17], Battle-Lemarie [18], B-spline [19]. Cette approche présente les avantages suivants :

- Fournit une solution précise par rapport à la méthode existante.
- Les poids optimaux sont calculés à l'aide d'une procédure intégrée en termes de coefficients d'ondelettes ou de fonction hybride.
- Dans la nouvelle approche, il n'est pas nécessaire de consulter diverses tables pour obtenir des poids optimaux.
- Aucun noeud en quadrature n'est nécessaire et les points de localisation sont utilisés comme points noeuds.
- La nouvelle méthode calcule les intégrales de manière simple et n'a pas besoin de résoudre un système non linéaire résultant des noeuds inconnus et poids.
- Une applicabilité simple et directe sans recourir à d'autres techniques intermédiaires est requise.

Notre mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres :

Dans le premier chapitre : Nous sommes intéressés à donner quelques notions préliminaires des fonctions réelles et quelques propriétés.

Dans le second chapitre : Nous présentons les méthodes les plus couramment utilisées pour le calcul général de l'intégrale numérique d'une fonction, tel que nous nous limitons essentiellement ici aux intégrales sur un domaine fini (limité par des bornes finies  $a$  et  $b$ ).

Dans le troisième chapitre : Nous étudions une nouvelle méthode pour l'intégration numérique basée sur la base d'ondelette de Haar, tel que on étudie le concept théorique de l'analyse multirésolution et les propriétés principales de sa fonction d'échelle, aussi on fait une application de la méthode des ondelettes de Haar à la résolution des intégrales.

Finalement, nous complétons ce mémoire par une conclusion générale et des références principales.

# Notations

$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$c^{te}$	Constante réelle strictement positive.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire.
$\oplus$	Somme directe.
$\Sigma$	Somme.
$\Pi$	Produit.
$\cup$	Union.
$\cap$	Intersection.
$ \cdot $	La valeur absolue.
$\ \cdot\ _\infty$	la norme de l'infini.
$L^2(\mathbb{R})$	Espace des fonctions réels $f$ telles que $\int_{\mathbb{R}}  f ^2 dx < +\infty$ .
$\hat{\varphi}$	Transformée de Fourier de $\varphi$ .

# Chapitre 1

## Rappel sur les fonctions réelles

Ce chapitre est consacré essentiellement à l'introduction de quelques notions fondamentales des fonctions réelles et certains des propriétés que nous utiliserons dans le chapitre 2 et 3.

### 1.1 Notions et quelques exemples

**Définition 1.1.1** [3] *Soit  $I$  un intervalle ou une réunion des d'intervalles de  $\mathbb{R}$ , on appelle une fonction réelle sur  $I$  toute application :*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R},$$

*dans ce cas  $I$  est appelée le domaine de définition de la fonction  $f$ .*

$$\begin{aligned} f & : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x), \end{aligned} \tag{1.1}$$

**Exemple 1.1.1** *La fonction inverse est définie par :*

$$\begin{aligned} f & : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

**Exemple 1.1.2** *Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :*

$$\begin{aligned} f & : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto e^{\sin x}. \end{aligned}$$

**Remarque 1.1.1** *toute fonction définie de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ , est appelée suite numérique.*

## 1.2 Limite d'une fonction

### 1.2.1 Limite finie et infinie en point $x_0$

Soit  $x_0$  un point de  $\mathbb{R}$  et  $I = ]a, b[$  un intervalle ouvert contenant  $x_0$ . On se donne une fonction  $f$  définie en tout point de  $I$  sauf peut-être en  $x_0$ . On dit que :  $f(x)$  tend vers une limite finie  $l$  pour  $x \rightarrow x_0$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On écrira

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l. \quad (1.2)$$

De même, on dira que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \quad (1.3)$$

si et seulement si pour tout  $A > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$|x - x_0| < \delta \implies f(x) > A.$$

D'une manière similaire

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \quad (1.4)$$

si et seulement si, pour tout  $A > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$|x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A.$$

### 1.2.2 Limite finie et infinie en $+\infty$

Lorsque la fonction  $f$  est définie sur un intervalle  $]a, +\infty[$ , on dit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l, \quad (1.5)$$

si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $B > 0$  tel que :

$$x \geq B \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

D'une manière similaire, on définit les autres cas de limites.

**Exemple 1.2.1** pour la fonction  $f$  définie sur  $]2, +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{3x + 4}{x - 2}$$

On cherche de la limite de  $f(x)$  en  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3.$$

Montrons-le. Fixons  $\varepsilon > 0$  L'inégalité

$$\left| \frac{3x + 4}{x - 2} - 3 \right| < \varepsilon,$$

est équivalente à

$$\left| \frac{10}{x - 2} \right| < \varepsilon,$$

ou encore à

$$\left| \frac{x - 2}{10} \right| > \frac{1}{\varepsilon},$$

qui est vérifiée dès que

$$x > A = \frac{10}{\varepsilon} + 2.$$

### 1.2.3 Limite à gauche et limite à droite

On dira que  $f$  admet  $l$  pour limite à gauche en  $x_0$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On notera

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = l. \tag{1.6}$$

On définit de même la limite à droite de  $x_0$  comme suit, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On notera

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = l, \tag{1.7}$$

$f$  admet  $l$  pour limite en  $x_0$  si et seulement si  $f$  admet  $l$  pour limite à gauche et à droite de  $x_0$ .

**Exemple 1.2.2** la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in [0, 1[ \\ x^2 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} e^x = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1.$$

Par conséquent,  $f$  n'admet pas une limite en 1.

**Proposition 1.2.1** [3] *Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.*

Les règles sur les limites de fonctions sont similaires à celles sur les suites numériques.

**Théorème 1.2.1** [3] *Une fonction  $f$  admet une limite  $l$  pour  $x \rightarrow x_0$  si et seulement si, pour toute suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $x_0$ , la suite  $(f(x_n))_{n \geq 0}$  converge vers  $l$ .*

## 1.3 Continuité d'une fonction

### 1.3.1 Cas d'un intervalle ouvert ]a,b[ de $\mathbb{R}$

**Définition 1.3.1** [3] *Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $]a, b[ = I$  de  $\mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$  un point donné. La fonction  $f$  est dite continue au point  $x_0$  si et seulement si :*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (1.8)$$

Cela traduit le fait que lorsque la variable  $x$  est proche de  $x_0$ , la valeur  $f(x)$  est proche de  $f(x_0)$ . Autrement dit, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

En posant  $x = x_0 + h$  on a la définition équivalente

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0). \quad (1.9)$$

On définit aussi la continuité à gauche en  $x_0$  (resp. à droite en  $x_0$ ). Par exemple,  $f$  est continue à gauche en  $x_0$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On notera

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (1.10)$$

$f$  est continue à droite en  $x_0$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On notera

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (1.11)$$

$f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si elle est continue à gauche et à droite de  $x_0$ .

### 1.3.2 Cas d'un intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle fermé  $[a, b]$  (avec  $a < b$ ), On peut définir comme ci-dessus la continuité en  $x_0$  pour  $x_0 \in [a, b]$ , ainsi que la continuité à droite en  $a$ , et la continuité à gauche en  $b$ .

La fonction  $f$  est continue sur l'intervalle fermé  $[a, b]$  si :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur l'intervalle ouvert } ]a, b[, \\ f \text{ est continue à droite en } a, \\ f \text{ est continue à gauche en } b. \end{array} \right.$$

**Exemple 1.3.1** *Considérons la fonction suivante :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 - x^2}{2} & \text{si } x \in ]-\infty, 1[ \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [1, +\infty[ \end{cases}$$

On calcule les limites à gauche et à droite, au point 1 de  $f(x)$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{3 - x^2}{2} = 1,$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{1}{x} = 1.$$

Les deux limites sont égaux à  $f(1)$ , la fonction  $f$  est continue en 1.

**Définition 1.3.2** [3] *La fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$  lorsqu'elle est continue en tout point de  $I$ .*

### 1.3.3 Résultats généraux sur la continuité

La continuité se comporte bien avec les opérations élémentaires. Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates des propriétés analogues sur les limites.

- 1- Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues en un point  $x_0 \in I$  et un réel quelconque  $\lambda$ . Alors on a :

$$\left\| \begin{array}{l} \bullet \lambda f \text{ sont continues en } x_0. \\ \bullet f \pm g \text{ sont continues en } x_0. \\ \bullet f * g \text{ sont continues en } x_0. \\ \bullet \text{ si } g(x_0) \neq 0, \text{ alors } \frac{f}{g} \text{ sont continues en } x_0. \end{array} \right.$$

- 2- Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions telles que  $f(I) \subset J$ . Si  $f$  est continue en un point  $x_0 \in I$  et si  $g$  est continue en  $f(x_0)$ , alors

$$g \circ f = g(f(x)),$$

est continue en  $x_0$ .

- 3- Les fonctions usuelles : polynomiales, trigonométriques, logarithme, exponentielle, ... sont continues sur leur domaine de définition.

### 1.3.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème important en analyse. Ce théorème donne dans certains cas l'existence de solutions d'équations non linéaires.

**Théorème 1.3.1** [3] *Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ .*

*Si  $f(a)f(b) < 0$ , alors il existe au moins un réel  $c$  de l'intervalle  $]a, b[$  tel que :  $f(c) = 0$ .*

## 1.4 Dérivation d'une fonction

### 1.4.1 Définitions

**Définition 1.4.1** [3] *Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I$  intervalle ouvert) est dérivable en un point  $x_0 \in I$  si le rapport*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{1.12}$$

*défini sur  $I \setminus \{x_0\}$ , admet une limite finie lorsque  $x \rightarrow x_0$ . Ainsi, cette limite est dite la dérivée de  $f$  au  $x_0$  et notée  $f'(x_0)$  ou  $\frac{df}{dx}(x_0)$ .*

De même ici, on peut définir une dérivée à gauche et une dérivée à droite au point  $x_0$ , par exemple la dérivée à gauche est, quand elle existe

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (1.13)$$

et la dérivée à droite est, quand elle existe

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (1.14)$$

$f$  est dérivable en  $x_0$  si :

$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0). \quad (1.15)$$

**Définition 1.4.2** [3] Une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $[a, b]$  (avec  $a < b$ ), est dite dérivable sur l'intervalle fermé  $[a, b]$  si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur l'intervalle ouvert } ]a, b[, \\ f \text{ est dérivable à droite en } a, \\ f \text{ est dérivable à gauche en } b. \end{array} \right.$$

**Exemple 1.4.1** La fonction  $x \mapsto f(x) = x^2$  est dérivable en tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  
en effet

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0 = f'(x_0).$$

## 1.4.2 Propriétés générales

1- Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables sur  $I$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  Alors on a

$$\left\| \begin{array}{l} \bullet (f + g)' = f' + g'. \\ \bullet (\lambda f)' = \lambda f'. \\ \bullet (fg)' = f'g + fg'. \\ \bullet \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \text{ si } (g \neq 0). \\ \bullet (f^n)' = n f' f^{n-1}. \\ \bullet (\ln f)' = \frac{f'}{f} \text{ (dérivée logarithmique si, } f > 0). \end{array} \right.$$

2- Lorsqu'on a

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(I) \subset J,$$

ou  $J$  est un autre intervalle de  $\mathbb{R}$ , alors, si  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $g$  est dérivable sur  $J$  on a

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x).$$

3- Si  $f$  est dérivable et est une bijection de  $I$  dans  $J$ , alors  $f^{-1}$  est dérivable en tout point ou  $f'(x_0) \neq 0$ , et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},$$

avec  $y_0 = f(x_0)$ .

### 1.4.3 Dérivées successives

**Définition 1.4.3** [3] Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur  $I$ . Si la fonction  $f'$  est dérivable, on dira que :  $f$  est deux fois dérivable et on note

$$f''(x) = (f')'. \quad (1.16)$$

En réitérant, on définit de même la dérivée à l'ordre  $n$  de  $f$  notée  $f^{(n)}$  par :

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x). \quad (1.17)$$

On peut montrer par récurrence la formule dite de Leibnitz

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}, \quad (1.18)$$

ou  $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ .

### 1.4.4 Conséquences de la dérivation

Les premières propriétés de la dérivation sont :

|| Si  $f$ , définie sur  $I = ]a, b[$ , est dérivable en  $x_0 \in I$  et admet un extremum en  $x_0$  alors  $f'(x_0) = 0$ .

|| Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et est dérivable sur  $]a, b[$  alors il existe ou mois un point  $c$  de  $]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ .

Ce dernier résultat est connu sous le nom du théorème de Rolle et exprime le fait qu'il y a au moins un point où la courbe représentative de  $f$  admet une tangente horizontale.

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et est dérivable sur  $]a, b[$  alors il existe un point  $c$  de  $]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ .

C'est le théorème des accroissements finis (T.A.F). Il exprime le fait qu'il existe au moins une tangente à la courbe de  $f$  parallèle à la sécante joignant les points de coordonnées  $(a, f(a))$  et  $(b, f(b))$ .

## 1.5 Formules de Taylor et développements limités

Nous avons vu précédemment que la dérivation est essentielle dans l'étude des fonctions. On va voir que les développements limités fournissent encore plus de précision dans l'allure et le comportement d'une fonction au voisinage d'un point donné. Une autre application importante de cette notion est le calcul approché de la valeur d'une fonction en un point, en particulier pour celles qui ne sont pas de type polynomial. Dans toute cette section, on se donne une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n$ ) fois dérivable et  $f^n$  est dérivable.

### Formule de Taylor-Lagrange

On considère  $f$  sur un intervalle fini  $[a, b]$  et  $n \in \mathbb{N}$ , Alors il existe un point  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(b-a)^2 f''(a) + \dots + \frac{1}{n!}(b-a)^n f^{(n)}(a) + \frac{1}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c).$$

C'est la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre  $n$  pour  $f$ .

Pour  $n = 0$ , la formule précédente est celle du théorème des accroissements finis. Lorsqu'on sait que la dérivée d'ordre  $(n + 1)$  de  $f$  est majorée par une constante  $M$ , la formule précédente fournit une approximation polynomiale de  $f(a + h)$  pour  $h$  petit, en fonction des dérivées successives de  $f$  en  $a$ . En effet, en posant  $b - a = h$ , on a :

$$\left| f(a+h) - \left( f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2!}h^2 f''(a) + \dots + \frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(a) \right) \right| = \left| \frac{1}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(c) \right| \leq \frac{M |h|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On se place dans le cas où l'intervalle  $[a, b]$  est de la forme  $[0, x]$ ,  $x$  étant une variable positive réelle quelconque. Alors la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre  $n$  devient

$$\left\| \begin{aligned} f(x) - f(0) &= x f'(0) + \frac{1}{2!} x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0) \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} f^{(n+1)}(0), \end{aligned} \right.$$

où  $c \in ]0, x[$ .

### Formule de Taylor-Young

Considérons maintenant le cas où  $f$  est une application d'un intervalle  $I$  vers  $\mathbb{R}$ , et soit  $a$  et  $x$  deux points de  $I$ . Alors il existe une fonction  $\varepsilon$  définie au voisinage de  $a$  telle que :

$$\left\| f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x), \right.$$

avec

$$\varepsilon(x) \rightarrow 0 \quad \text{pour } x \rightarrow a.$$

Le terme  $(x-a)^n \varepsilon(x)$  est appelé reste d'ordre  $n$  pour  $x \rightarrow a$ . Noter qu'à l'opposé des autres formules données précédemment, cette dernière précise le comportement du reste d'ordre  $n$  pour  $x$  tendant vers  $a$ .

Dans le cas particulier où  $a = 0$ , on obtient

$$\left\| \begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + x^n \varepsilon(x) \\ &= f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2!} x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x). \end{aligned} \right.$$

On peut noter, en utilisant les notations de Landau

$$x^n \varepsilon(x) = o(x^n) \quad (x \rightarrow 0),$$

et

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2!} x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0) + o(x). \quad (1.19)$$

On dira que :

$$f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2!} x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0),$$

est le développement limité (en abrégé D.L.) d'ordre  $n$  de  $f$  au voisinage de 0.

Les D.L. sont très utiles pour l'étude locale des fonctions puisqu'ils permettent

- une expression plus simple de  $f$ , (au voisinage du point).
- une recherche facile de limites.
- un tracé plus précis de la courbe (recherche d'asymptotes, position de la courbe par rapport à celles - ci, ...).

**Exemple 1.5.1** On va donner le D.L. à l'ordre 2 et au voisinage de 0 de la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto xe^x, \end{aligned}$$

Le D.L. de  $xe^x$  à l'ordre 2 est donc

$$x + x^2,$$

on écrira aussi que

$$xe^x = x + x^2 + x^2\varepsilon(x),$$

avec

$$\varepsilon(x) \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad x \rightarrow 0.$$

## 1.6 Intégrale de fonction

### 1.6.1 Sommes de Darboux et l'intégrale

On donne une fonction numérique  $f$  continue, monotone et positive sur un intervalle  $[a, b]$ . On considère une subdivision de cet intervalle à pas équidistants

$$a, a + h, a + 2h, \dots, a + nh,$$

où  $n \in \mathbb{N}^*$  et

$$h = \frac{b - a}{n}.$$

On appelle sommes de Darboux les quantités :

$$\left\{ \begin{aligned} S_n &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f(a + kh) \\ s_n &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f(a + (k-1)h). \end{aligned} \right. \quad (1.20)$$

tel que :  $S_n$  la somme de Darboux supérieure et  $s_n$  la somme de Darboux inférieure.

On montre que pour une telle fonction  $f$ , les suites  $(s_n)_{n \geq 1}$  et  $(S_n)_{n \geq 1}$ , forment deux suites adjacentes (l'une croissante, l'autre décroissante) convergeant vers une même

limite qui est égale à l'aire  $A$  de la surface délimitée par la courbe représentative de  $f$  (dans un repère orthonormé), l'axe des  $x$  et les droites d'équations

$$x = a, x = b.$$

On a l'inégalité (dans le cas où  $f$  est croissante)

$$s_n < A < S_n.$$

Graphiquement,  $\frac{(b-a)}{n} \cdot f(a+kh)$  représente l'aire d'un rectangle de largeur  $h$  et de hauteur  $f(a+kh)$ . On posera par définition

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = A, \quad (1.21)$$

et on dira que la fonction  $f$  est intégrable entre  $a$  et  $b$ .

## 1.6.2 Intégrale d'une fonction continue

On admet qu'on peut aussi construire l'intégrale dans le cas où  $f$  est seulement continue sur  $[a, b]$ .

**Théorème 1.6.1** [3] *Toute fonction continue est intégrable sur  $[a, b]$ .*

**Exemple 1.6.1** *La fonction  $f(x) = x^n$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .*

et

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \forall n \in \mathbb{N} - \{1\}.$$

**Exemple 1.6.2** *La fonction  $f(x) = \sin x$  est intégrable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .*

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) - \cos(0) = 1 - 0 = 1.$$

**Notation :**[3]

Si  $a < b$  on pose par définition

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx, \quad (1.22)$$

et si  $a = b$ ,

$$\int_a^b f(x)dx = 0. \quad (1.23)$$

### 1.6.3 Propriétés générales

Les propriétés essentielles pour l'intégrale sont :

- Linéarité : soient  $f, g$  deux fonctions continues sur un  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $\lambda$  et  $\mu$  deux nombres réels. Alors

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx. \quad (1.24)$$

- Positivité, croissance : si  $f$  est une fonction continue et positive sur  $[a, b]$  (ou encore à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ ), Alors

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0. \quad (1.25)$$

- Relation de Chasles : Pour tout réel  $c$  de  $]a, b[$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (1.26)$$

- Pour toute fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (1.27)$$

### 1.6.4 Primitive d'une fonction

#### Cas d'une fonction continue

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  posons, pour  $t \in [a, b]$

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx.$$

On montre grâce à la formule de la moyenne ci-dessus que  $F$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ . Autrement dit :

$$F'(t) = f(t) \text{ et } F(a) = 0.$$

Si  $G$  est une primitive quelconque de  $f$  alors

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

Par exemple, on a :

$$\int_0^2 (2x + 1)e^{-x} dx = [-(2x + 3)e^{-x}]_0^2 = 3 - 7e^{-2}.$$

### Cas d'une fonction intégrable quelconque

Lorsque  $f$  est seulement intégrable, on montre que la fonction  $F$  est encore continue, mais non nécessairement dérivable.

**Exemple 1.6.3** Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, 3]$  par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \\ \frac{2}{x} & \text{si } x \in ]1, 3]. \end{cases}$$

Calculons

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx,$$

-  $0 \leq t \leq 1$ , on a

$$F(t) = \int_0^t x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^t = \frac{t^2}{2},$$

- Pour  $1 < t \leq 3$ , la relation de Chasles donne

$$\int_0^1 x dx + \int_1^t \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} + [2 \ln x]_1^t = \frac{1}{2} + 2 \ln t.$$

## 1.7 Le polynôme d'interpolation d'une fonction

On se propose alors d'approcher  $f$  par une fonction simple de type polynomial  $P_n$  de degré inférieur ou égal à  $n$  et telle que :

$$P_n(x_i) = f(x_i) = f_i, \quad i = 0, 2 \dots n.$$

On l'appelle le polynôme d'interpolation de  $f$  aux points  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

$$P_n = \sum_{i=0}^n f_i L_i. \tag{1.28}$$

**Théorème 1.7.1** [3] Il existe un unique polynôme  $P_n$  de degré inférieur ou égal à  $n$  tel que :

$$P_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, 2 \dots n.$$

par exemple Polynôme de Lagrange

**Définition 1.7.1** [3] On appelle polynôme de Lagrange d'indice  $k = 0, 1, \dots, n$  associé aux points  $x_0, x_1, \dots, x_n$  le polynôme définie par :

$$L_k = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}. \tag{1.29}$$

On retiendra que dans le polynôme de Lagrange d'indice  $k$

- le numérateur est le produit de tous les facteurs  $(x - x_i)$  exception faite du facteur  $(x - x_k)$ .
- le dénominateur est le produit de tous les facteurs  $(x_k - x_i)$  pour  $k \neq i$ .

Le polynôme de Lagrange est donnée par :

$$P(x) = L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 + \dots + L_n(x)y_n,$$

est un polynôme de degré  $n$  qui vérifie bien  $P(x_i) = y_i$ .

**Exemple 1.7.1** On suppose que  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  et que  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ,  $(x_1, y_1) = (1, 1)$  et  $(x_2, y_2) = (8, 2)$ .

On a à déterminer le polynôme d'interpolation qui passe par les 3 points  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  et  $(8, 2)$ .

D'après la méthode de Lagrange

$$\begin{aligned} P(x) &= L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 + L_3(x)y_3 \\ &= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= 0 \frac{(x - 1)(x - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)} + 1 \frac{(x - 0)(x - 8)}{(1 - 0)(1 - 8)} + 2 \frac{(x - 0)(x - 1)}{(8 - 0)(8 - 1)} \\ &= -\frac{3}{28}x^2 + \frac{31}{28}x \end{aligned}$$

On a bien  $P_2(0) = 0$ ,  $P_2(1) = 1$  et  $P_2(8) = -\frac{3}{28}(8)^2 + \frac{31}{28}8 = 2$ .

# Chapitre 2

## Les méthodes classiques d'intégration numérique

Nous présentons dans ce chapitre les méthodes les plus couramment utilisées pour le calcul général de l'intégrale numérique d'une fonction. tel que nous nous limitons essentiellement ici aux intégrales sur un domaine fini (limité par des bornes finies  $a$  et  $b$ ).

$$I = \int_a^b f(x)dx. \quad (2.1)$$

Dans certains cas très limités, une telle intégrale peut être calculée analytiquement (à la main). Cependant, ce n'est que très rarement possible, et le plus souvent un des cas suivants se présente :

- Le calcul analytique est long, compliqué et rébarbatif.
- Le résultat de l'intégrale est une fonction compliquée qui fait appel à d'autres fonctions elles-même longues à évaluer.
- Cette intégrale n'a pas d'expression analytique (par exemple la fonction erreur  $Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$ ).

Dans tous ces cas, on préférera calculer numériquement la valeur de l'intégrale  $I$ .

L'idée principale est de trouver des méthodes qui permettent de calculer rapidement une valeur approchée  $\tilde{I}$  de l'intégrale à calculer

$$\tilde{I} \simeq I. \quad (2.2)$$

Comme toujours, un programme numérique n'invente rien, et ne fait que procéder très rapidement à un calcul que l'on pourrait en principe faire à la main. Une méthode

bien connue consiste par exemple à diviser l'aire sous la courbe en un grand nombre de petits rectangles d'aire  $\tilde{I}_k$  et de les sommer. Le résultat  $\tilde{I} = \sum_k \tilde{I}_k$  est alors une approximation de l'intégrale  $I$ . Cette approximation est d'autant meilleure que la largeur  $h$  des rectangles tend vers 0, c'est à dire :  $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{I} = I$ . Cette méthode dite des rectangles est un exemple parmi d'autres. Nous le reverrons, mais nous verrons aussi d'autres méthodes, plus générales et plus performantes.

Pour presque toutes les méthodes l'intégrale numérique est calculée à partir de l'évaluation de la fonction  $f$  en un nombre de point  $(n + 1)$  distincts  $f_k = f(x_k)$ ,  $k \in [0, n]$ . Elle s'écrit alors

$$\tilde{I} = \sum_{k=0}^n \omega_k f_k. \quad (2.3)$$

où  $\omega_k$  sont les coefficients sont indépendants de  $f$ .

Dans ce cas, on parle de méthodes de quadrature.

## 2.1 Formules de quadrature

Soit  $f$  une fonction réelle intégrable sur l'intervalle  $[a, b]$ . Le calcul explicite de l'intégrale définie  $I(f) = \int_a^b f(x)dx$  peut être difficile, voire impossible. On appelle formule de quadrature ou formule d'intégration numérique toute formule permettant de calculer une approximation de  $I(f)$  comme(2.3).

Une possibilité consiste à remplacer  $f$  par une approximation  $P_n$ , ou  $n$  est un entier positif, et calculer  $I(P_n)$  au lieu de  $I(f)$ . En posant  $\tilde{I}(f) = I(P_n)$ , on a

$$\tilde{I}(f) = \int_a^b P_n(x)dx, \quad n \geq 0. \quad (2.4)$$

La dépendance par rapport aux extrémités  $a, b$  sera toujours sous-entendue. On écrira donc  $\tilde{I}(f)$  au lieu de  $\tilde{I}(f, a, b)$ . Si  $f \in C^0([a, b])$ , l'erreur de quadrature

$$\epsilon_n(f) = I(f) - \tilde{I}(f),$$

satisfait

$$|\epsilon_n(f)| \leq \int_a^b |f(x) - P_n(x)|dx \leq (b - a)\|f - P_n\|_\infty.$$

Donc, si pour un certain  $n$ ,  $\|f - P_n\|_\infty < \varepsilon$ , alors  $|\epsilon_n(f)| \leq \varepsilon(b - a)$ . L'approximation  $P_n$  doit être facilement intégrable, ce qui est le cas si, par exemple. Une approche naturelle consiste à prendre  $P_n = \prod_n P$ , le polynôme d'interpolation de Lagrange de  $f$  sur un

ensemble de  $n + 1$  noeuds distincts  $\{x_k, k = 0, \dots, n\}$ . Ainsi, on déduit de (2.4) que

$$\tilde{I}(f) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b L_k(x) dx, \quad (2.5)$$

ou  $L_k$  est le polynôme caractéristique de Lagrange de degré  $n$  associé au noeud  $x_k$ . (voir chapitre (1) Section (1.7)), On notera que (2.5) est un cas particulier de la formule de quadrature suivante

$$\tilde{I}(f) = \sum_{k=0}^n \omega_k f(x_k), \quad (2.6)$$

ou les coefficients  $\omega_k$  de la combinaison linéaire sont donnés par  $\int_a^b L_k(x) dx$ . La formule (2.6) est une somme pondérée des valeurs de  $f$  aux points  $x_k$ , pour  $\{k = 0, \dots, n\}$ . On dit que ces points sont les noeuds de la formule de quadrature, et que les nombres  $\omega_k \in \mathbb{R}$  sont ses coefficients ou encore ses poids. Les poids et les noeuds dépendent en général de  $n$ , à nouveau pour simplifier l'écriture cette dépendance sera sous-entendue. La formule (2.5), appelée formule de quadrature de Lagrange, peut être généralisée au cas où on connaît les valeurs de la dérivée de  $f$  [1].

La performance d'une méthode se juge en comparant

- la précision du résultat Celle-ci se caractérise en estimant l'erreur  $\epsilon_n$  entre l'approximation et la valeur réelle de l'intégrale

$$\epsilon_n(f) = I(f) - \tilde{I}(f). \quad (2.7)$$

La valeur de l'erreur ne peut pas être calculée exactement puisqu'en général, on ne connaît pas l'intégrale  $I$  que l'on cherche à calculer. Cependant, une majoration peut souvent être estimée en étudiant le développement en série de Taylor de la fonction  $f$ .

- La rapidité d'exécution nécessaire pour atteindre ce résultat. De manière générale, toutes les méthodes peuvent atteindre de très grandes précisions. Cependant, le temps de calcul augmente avec la précision. Ce temps n'augmente pas de la même manière pour toutes les méthodes si bien que certaines s'avèrent plus efficaces que d'autres. En particulier, le temps de calcul des méthodes de quadrature est proportionnel au nombre de points où la fonction  $f$  est évaluée.

## 2.2 Lois de Newton-Cotes simples

Comme nous allons le voir, les méthodes de Newton-Cotes simples ne permettent pas, à elles-seules, d'atteindre des précisions suffisantes sur des intervalles  $[a, b]$  finis et ne sont donc jamais utilisées dans ce cas. En revanche, elles deviennent précises lorsque  $|b - a| \rightarrow 0$ , et elles constituent alors la base élémentaire des méthodes composites présentées dans la section suivante.

### 2.2.1 Principe

Le principe générale des méthodes de Newton-Cotes simples est d'approximer la fonction  $f$  à intégrer par un polynôme  $P(x) \simeq f(x)$ . Si cette approximation est suffisamment bonne alors, l'intégrale de ce polynôme

$$\tilde{I} = \int_a^b P(x)dx, \quad (2.8)$$

sera une bonne approximation de  $I = \int_a^b f(x)dx$ . L'avantage est que l'on sait calculer analytiquement la valeur exacte de  $\tilde{I}$ . Dans ces méthodes, on choisit des polynômes de degré  $p$  qui coïncident avec  $f(x)$  en  $(p+1)$  points distincts, espacés régulièrement entre les bornes  $a$  et  $b$ . Ces points sont situés aux positions

$$\{x_k = a + kh, k \in [0, p]\} \quad \text{avec} \quad h = \frac{b-a}{p}. \quad (2.9)$$

On a alors  $\forall k \in [0, p] P(x_k) = f_k = f(x_k)$ . Des polynômes de degrés différents définissent des méthodes différentes aux performances différentes. Nous allons voir les plus courantes, c'est à dire les méthodes d'ordres les plus bas.

### 2.2.2 Méthode du rectangle ( $p = 0$ )

La formule des rectangles est une formule dite à un point  $x_0 = a$ . Le polynôme d'interpolation associé est

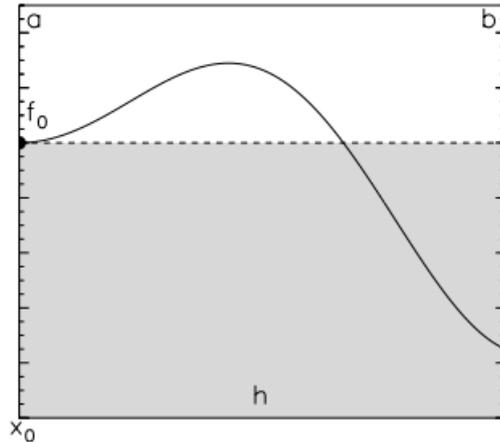
$$P_0(x) = f(a) = f_0. \quad (2.10)$$

L'intégrale approchée  $\tilde{I}_r = \int_a^b P_0(x)dx$  se calcule alors trivialement et donne

$$\tilde{I}_r = (b-a)f_0. \quad (2.11)$$

Il s'agit de l'aire du rectangle.

Cette intégrale numérique nécessite une unique évaluation de la fonction  $f$  en ( $x_0 = a$ ) et représente donc ce qu'on peut faire de plus rapide.


 FIGURE 2.1 – Méthode simple du rectangle ( $p = 0$ ).

**Corollaire 2.2.1** [1] Si  $f$  est de classe  $C^1([a, b])$ . L'erreur peut être estimée en utilisant les développements en série de Taylor ou le théorème des accroissements finis on trouve alors pour  $h = b - a$

$$\left\| \begin{array}{l} \exists \xi \in [a, b] \quad \epsilon_r = \frac{h^2}{2} f'(\xi) \quad \text{c.a.d} \quad |\epsilon_r| \leq \frac{h^2}{2} \sup_{[a,b]}(|f'|) \end{array} \right.$$

**Preuve :**[1]

Pour calculer l'erreur, on peut utiliser le théorème des accroissements finis  $\forall x \in [a, b]$ ,  $\exists \xi \in [a, b]$  tel que :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(\xi)$$

En remplaçant dans l'expression de l'intégrale et de l'erreur, on trouve

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= I - \tilde{I}_r \\ &= \int_a^b f(x) - P_0(x) dx = \int_a^b f(a) dx \\ &= \int_a^b (x - a) f'(\xi) dx = f'(\xi) \int_a^b x dx \\ &= \frac{(b - a)^2}{2} f'(\xi) = \frac{h^2}{2} f'(\xi). \quad \square \end{aligned}$$

L'erreur  $\epsilon_r$  n'est pas connue car la valeur de  $\xi \in [a, b]$  reste indéterminée.

Cependant, on peut la majorer par la plus grande valeur de la dérivée sur le domaine considéré. Quelques remarques sur cette erreur :

- Cette méthode d'intégration est exacte pour toutes les fonctions  $f$  constantes (dans ce cas  $\epsilon_r = 0$  puisque qu'elles vérifient  $f' = 0$ ). Dans le cas plus général cette méthode est d'autant plus précise que les variations de  $f$  sont faibles ( $f'$  petit).

- Plus le domaine  $[a, b]$  est petit, plus l'erreur est faible. Cette erreur décroît en  $h^2$ .

### 2.2.3 Méthode du point milieu ( $p = 0$ )

Cette méthode utilise également le polynôme constant pour approximer la fonction  $f$ . Cependant, elle exploite mieux les symétries du problème en choisissant la valeur milieu

$$P_0(x) = f\left(\frac{b+a}{2}\right) = f_0. \quad (2.12)$$

L'intégrale approchée  $\tilde{I}_m = \int_a^b P_0(x)dx$  se calcule alors trivialement et donne :

$$\tilde{I}_m = (b-a)f_0. \quad (2.13)$$

Il s'agit de l'aire du rectangle.

Cette méthode nécessite une unique évaluation de la fonction  $f$  en  $(x_0 = (\frac{a+b}{2}))$  et correspond donc aussi à ce qu'on peut faire de plus rapide.

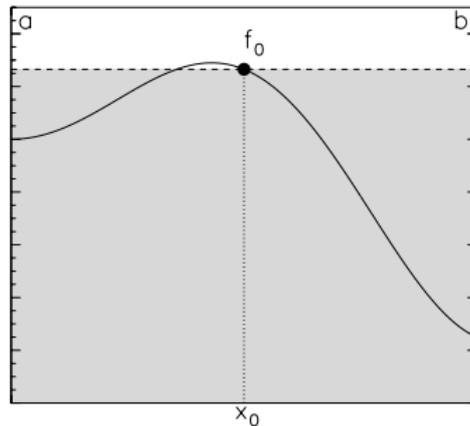


FIGURE 2.2 – Méthode simple du point milieu ( $p = 0$ ).

**Corollaire 2.2.2** [1] Si  $f$  est de classe  $C^2([a, b])$ . L'erreur peut être estimée en utilisant les développements en série de Taylor, ou le théorème des accroissements finis.

On trouve alors pour  $h = b - a$

$$\left\| \exists \xi \in [a, b] \epsilon_m = \frac{h^3}{24} f''(\xi) \quad c.a.d \quad |\epsilon_m| \leq \frac{h^3}{24} \sup_{[a,b]}(|f''|) \right\|$$

**Preuve** :[1]

Pour calculer l'erreur, on peut utiliser le théorème des accroissements finis  $\forall x \in [a, b]$ ,

$\exists \xi \in [a, b]$  tel que :

$$f(x) = f\left(\frac{b+a}{2}\right) + \left(x - \frac{b+a}{2}\right) f'\left(\frac{b+a}{2}\right) + \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \frac{f''(\xi)}{2}.$$

En remplaçant dans l'expression de l'intégrale et de l'erreur, on trouve :

$$\begin{aligned} \epsilon_m &= I - \tilde{I}_m \\ &= \int_a^b f(x) - P_V(x) dx = \int_a^b \left( f(x) - f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right) dx \\ &= \int_a^b \left[ \left(x - \frac{b+a}{2}\right) f'\left(\frac{b+a}{2}\right) + \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \frac{f''(\xi)}{2} \right] dx \\ &= f'\left(\frac{b+a}{2}\right) \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} x dx + \frac{f''(\xi)}{2} \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} x^2 dx \\ &= 0 + \frac{f''(\xi)}{3} \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \\ &= \frac{h^3}{24} f''(\xi). \quad \square \end{aligned}$$

L'erreur  $\epsilon_m$  n'est pas connue car la valeur de  $\xi \in [a, b]$  reste indéterminée. Cependant, on peut la majorer par la plus grande valeur de la dérivée seconde sur le domaine considéré. Quelques remarques sur cette erreur

- Du fait des symétries, cette méthode d'intégration est exacte pour les fonctions  $f$  constante, mais aussi pour les fonctions affines (dans ce cas  $\epsilon_m$  puisqu'elles vérifient  $f'' = 0$ ).
- Dans le cas plus général, cette méthode est d'autant plus précise que les variations de  $f$  sont faibles ( $f''$  petit).
- Plus le domaine  $[a, b]$  est petit, plus l'erreur est faible. Cette erreur décroît en  $h^3$ , c'est à dire plus vite que l'erreur de la méthode précédente. Ainsi, pour des domaines  $[a, b]$  suffisamment petits, la méthode du point milieu est toujours plus précise que la méthode précédente.

## 2.2.4 Méthode du Trapèze ( $p = 1$ )

Pour approximer la fonction  $f$ , cette méthode utilise le polynôme d'ordre 1 (la droite) qui passe par  $f_0 = f(a)$  et  $f_1 = f(b)$ .

$$P_1(x) = \frac{f_0 + f_1}{2} + \frac{f_0 - f_1}{b-a} f\left(x - \frac{b+a}{2}\right). \quad (2.14)$$

L'intégrale approchée  $\tilde{I}_t = \int_a^b P_1(x) dx$  se calcule alors mathématiquement ou géométriquement et donne

$$\tilde{I}_t = (b-a) \frac{f_0 + f_1}{2}. \quad (2.15)$$

Il s'agit de l'aire du trapèze.

Cette méthode nécessite deux évaluations de la fonction  $f$  en ( $a$  et en  $b$ ). Elle est donc en gros deux fois plus lente que les méthodes précédentes.

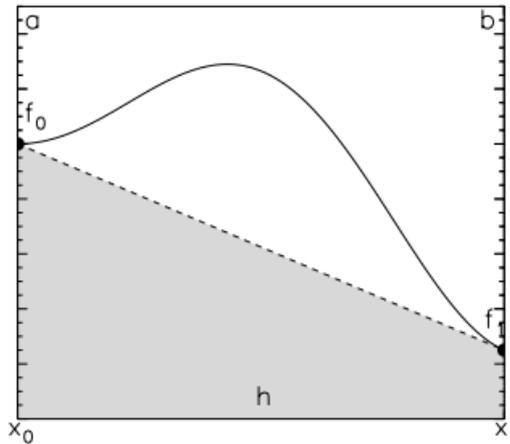


FIGURE 2.3 – Méthode simple du Trapèze ( $p = 1$ ).

**Corollaire 2.2.3** [1] *Si  $f$  est de classe  $C^2([a, b])$ . L'erreur peut être estimée en utilisant les développements en série de Taylor, ou le théorème des accroissements finis. On trouve alors pour  $h = b - a$*

$$\left\| \begin{array}{l} \exists \xi \in [a, b] \quad \epsilon_t = -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \quad \text{c.a.d} \quad | \epsilon_t | \leq \frac{h^3}{12} \sup_{[a,b]} (| f'' |). \end{array} \right.$$

Les remarques sur l'erreur sont les mêmes que pour la méthode du point milieu.

En précision, cette méthode est donc équivalente à celle du point milieu ( $\epsilon_t \approx \epsilon_m$ ), mais elle est deux fois plus lente.

## 2.2.5 Méthode de Simpson ( $p = 2$ )

Cette méthode utilise le polynôme de degré 2 (la parabole) qui passe par les trois points  $f_0 = f(a)$ ,  $f_1 = f(\frac{a+b}{2})$  et  $f_2 = f(b)$ . Le polynôme associé est :

$$P_2(x) = f(a)L_0(x) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)L_1(x) + f(b)L_2(x).$$

Notons que

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - b)}{(a - x_1)(a - b)} \Rightarrow \int_a^b L_0(x) dx = \frac{(b - a)}{6}.$$

$$L_1(x) = \frac{(x - a)(x - b)}{(x_1 - a)(x_1 - b)} \Rightarrow \int_a^b L_1(x) dx = \frac{4(b - a)}{6}.$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - a)}{(b - x_1)(b - a)} \Rightarrow \int_a^b L_2(x) dx = \frac{(b - a)}{6}.$$

L'intégrale approchée  $\tilde{I}_s = \int_a^b P_2(x) dx$  se calcule alors simplement et donne

$$\tilde{I}_s = \frac{(b - a)}{6} [f_0 + 4f_1 + f_2]. \quad (2.16)$$

Cette méthode nécessite trois évaluations de la fonction  $f$  en  $(x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}$  et  $x_2 = b)$ . Elle est donc en gros 3 fois plus lente que les méthodes à 1 point.

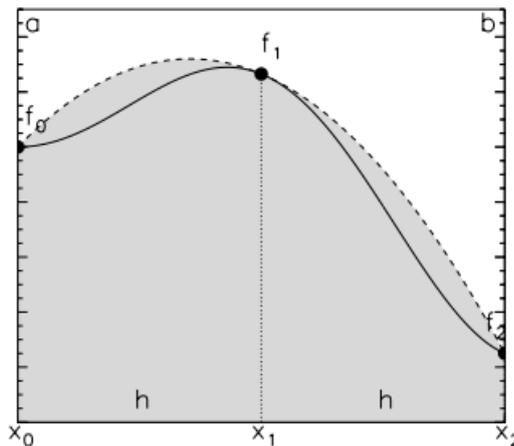


FIGURE 2.4 – Méthode simple de Simpson ( $p = 2$ ).

**Corollaire 2.2.4** [1] *Si  $f$  est de classe  $C^4([a, b])$ . L'erreur peut être estimée en utilisant les développements en série de Taylor, ou le théorème des accroissements finis. On trouve alors pour  $h = \frac{a+b}{2}$*

$$\left\| \begin{array}{l} \exists \xi \in [a, b] \quad \epsilon_s = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad \text{c.a.d} \quad |\epsilon_s| \leq \frac{h^5}{90} \text{Sup}_{[a,b]} (|f^{(4)}|) . \end{array} \right.$$

L'erreur  $\epsilon_s$  n'est pas connue car la valeur de  $\xi \in [a, b]$  reste indéterminée. Cependant, on peut la majorer par la plus grande valeur de la dérivée quatrième sur l'intervalle considéré. Quelques remarques sur cette erreur :

- Cette méthode d'intégration est exacte pour les fonctions  $f$  polynomiales d'ordre 3 (car elles vérifient  $f^{(4)} = 0$ ), ce qui inclut en particulier les fonctions constantes, les fonctions affines, et les paraboles par exemple. Plus généralement elle est d'autant plus précise que les variations de  $f$  sont faibles ( $f^{(4)}$  petit).

- Plus l'intervalle  $[a, b]$  est petit, plus l'erreur est faible. Cette erreur décroît en  $h^5$  lorsque  $h$  diminue, c'est à dire beaucoup plus rapidement que les méthodes précédentes. Ainsi, pour des intervalles  $[a, b]$  suffisamment petits, la méthode de Simpson est toujours plus précise que les méthodes précédentes.

**Exemple 2.2.1** On a la fonction  $f(x) = e^{-x^2}$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ ,  $a = 0$ ,  $\frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1$  et les image de cette points est  $f(0) = 1$ ,  $f(\frac{1}{2}) = 0.7788$ ,  $f(1) = 0.36788$ .

L'intégrale de fonctions  $f$ ,

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx,$$

La valeur de  $I$  à 5 décimales est 0.74718.

$$\begin{aligned} \tilde{I}_r &= (b-a)f_0 = f(0) = 1 & \implies |\epsilon_r| = |I - \tilde{I}_r| = 0.25282. \\ \tilde{I}_t &= (b-a)\frac{f_0 + f_1}{2} = 0.68393 & \implies |\epsilon_t| = |I - \tilde{I}_t| = 0.06325. \\ \tilde{I}_s &= \frac{(b-a)}{6} [f_0 + 4f_1 + f_2] = 0.74718 & \implies |\epsilon_s| = |I - \tilde{I}_s| = 0. \end{aligned}$$

## 2.2.6 Méthodes d'ordres plus élevés

Plus généralement, on peut construire des approximations en utilisant des polynômes d'ordre quelconque. Le polynôme d'ordre  $p$  passant par  $(p+1)$  points régulièrement espacés entre  $a$  et  $b$  s'exprime en fonction des polynômes de Lagrange  $L_k(x)$ ,  $k \in [0, p]$

$$P_p(x) = \sum_{k=0}^p f_k L_k(x) \quad \text{avec} \quad L_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^p \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \quad (2.17)$$

L'intégrale approchée  $\tilde{I} = \int_a^b P_p(x)dx$  peut alors se calculer et donne :

$$\tilde{I} = (b-a) \sum_{k=0}^p f_k w_k(x) \quad \text{avec} \quad w_k(x) = \frac{\int_a^b L_k(x)dx}{b-a}. \quad (2.18)$$

Un telle méthode nécessite  $(p+1)$  évaluations de la fonction  $f$  en  $(x_k, k \in [0, p])$ . Ainsi, plus le degré est élevé, plus la méthode est lente.

L'erreur peut aussi se calculer (mais ça devient franchement compliqué), et on peut montrer que

$$\left\| \begin{array}{l} \text{si } p \text{ est impair : } \exists \xi \in [a, b] \quad \epsilon_p = \frac{h^{p+2}}{C_p} f^{(p+1)}(\xi) \quad \text{c.a.d} \quad |\epsilon_p| \leq \frac{h^{p+2}}{C_p} \text{Sup}_{[a,b]} (|f^{(p+1)}|) . \\ \text{si } p \text{ est pair : } \exists \xi \in [a, b] \quad \epsilon_p = \frac{h^{p+3}}{C_p} f^{(p+2)}(\xi) \quad \text{c.a.d} \quad |\epsilon_p| \leq \frac{h^{p+3}}{C_p} \text{Sup}_{[a,b]} (|f^{(p+2)}|) . \end{array} \right.$$

où  $C_p$  est un coefficient qui dépend de l'ordre du polynôme. [1]

## 2.3 Lois de Newton-Cotes composites

### 2.3.1 Principe

L'idée est donc de découper le domaine total d'intégration  $[a, b]$  en  $m$  intervalles. On approxime alors l'aire  $\tilde{I}_k, k \in [0, m - 1]$  de chaque intervalle par des méthodes de Newton-Cotes simples, et on en déduit une approximation de l'aire totale par une simple somme

$$\tilde{I} = \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{I}_k. \quad (2.19)$$

Lorsque  $m$  est suffisamment grand, la largeur  $(b - a)/m$  des intervalles devient aussi petite que l'on veut, si bien que ces méthodes peuvent atteindre des précisions aussi grandes que nécessaire, sans pour autant se heurter au problème des polynômes de grand degré.

En utilisant sur chaque intervalle des méthodes de Newton-Cotes simples de degrés différents, on obtient des méthodes composites aux propriétés et aux performances différentes. Sur chaque intervalle, une méthode de degré  $(p + 1)$  évalue la fonction à intégrer en  $(p + 1)$  points, ce qui revient à le subdiviser en  $p$  sous-intervalles. Si on applique ce principe à  $m$  intervalles contigus, la méthode de Newton-Cotes composite définit  $n = m * p$  sous-intervalles au total 3 et nécessite l'évaluation de  $(n + 1)$  points. Plus ce nombre est élevé, plus la méthode est lente mais, en général, plus elle est précise.

Les comparaisons de méthodes de différents degrés se feront donc à nombre total de points  $n$  commun, c'est à dire à rapidité équivalente. Les méthodes les plus précises seront les plus performantes.

Dans certains cas, ces  $m$  intervalles peuvent être espacés de manière non régulière pour mieux représenter une zone où la fonction  $f(x)$  varie beaucoup, mais dans cette partie, nous nous limiterons au cas d'intervalles réguliers.

### 2.3.2 Méthode des rectangles ( $p = 0, n = m$ )

La méthode des rectangles composite applique la méthode des rectangles simple ( $p = 0$ ) sur chacun des  $m$  intervalles. Le nombre total de sous-intervalles est donc  $n = m$ . L'aire de chaque intervalle vaut

$$\tilde{I}_{0,k} = (x_{k+1} - x_k)f_k = hf_k. \quad (2.20)$$

Si bien que l'intégrale totale vaut :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\simeq h(f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1} + 0 \times f_n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f_k \\ &= h \sum_{k=0}^{n-1} f_k. \end{aligned}$$

Dans cette formule, tous les points ont le même coefficient 1, sauf le dernier point  $f_n$  qui n'est pas utilisé coefficient 0.

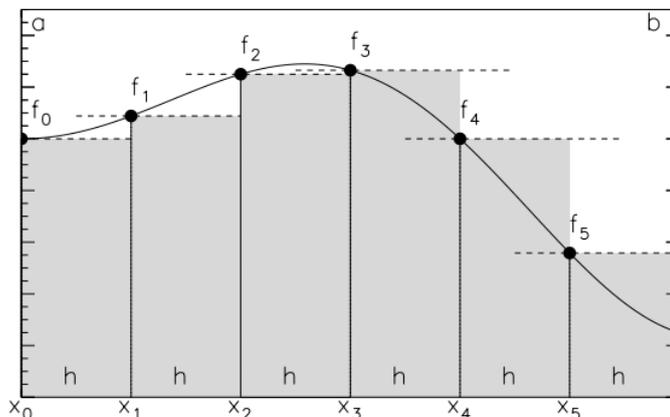


FIGURE 2.5 – Méthode composite des rectangles ( $p = 0$ ) pour  $m = 6$  intervalles (c'est à dire  $n = 6$  sous intervalles et  $n + 1 = 7$  points au total).

**Corollaire 2.3.1** [2] Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^1([a, b])$ , pour  $n \geq 1$  la majoration d'erreur est simplement la somme de toutes les erreurs

$$\left\| \begin{aligned} \epsilon_r &= \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon_{r,k} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f'(\xi_k) \\ &= \frac{h^2}{2} n f'(\xi) \\ |\epsilon_r| &\leq \frac{(b-a)^2}{2n} \text{Sup}_{[a,b]} (|f'|) \end{aligned} \right.$$

où l'on a utilisé le fait que  $h = (b - a)/n$  pour la dernière inégalité. A nouveau, cette méthode est exacte pour les fonctions constantes. Plus généralement, elle est d'autant plus précise que le nombre de points est grand

$$\epsilon_r = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) = \mathcal{O}(h) \quad (2.21)$$

L'erreur décroît comme  $1/n$ . La méthode des rectangles est une méthode d'ordre 1.

### 2.3.3 Méthode des Trapèzes ( $p = 1, n = m$ )

La méthode des Trapèzes composite applique la méthode des Trapèzes simple ( $p = 1$ ) sur chacun des  $m$  intervalles. Le nombre total de sous-intervalles est donc à nouveau  $n = m$ . Chaque intégrale vaut :

$$\tilde{I}_{1,k} = (x_{k+1} - x_k) \frac{f_k + f_{k+1}}{2}. \quad (2.22)$$

Si bien que l'intégrale totale vaut :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_t &= h \frac{f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n}{2} \\ &= h \left( \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f_k + \frac{f_n}{2} \right). \end{aligned}$$

Dans cette formule, les points du bord du domaine ont des coefficients différents (1/2) de tous le points intérieurs.

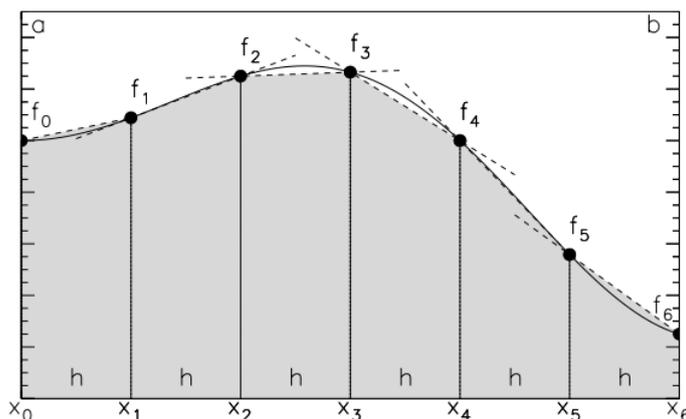


FIGURE 2.6 – Méthode composite des Trapèzes ( $p = 1$ ) pour  $m = 6$  intervalles (c'est à dire  $n = 6$  sous intervalles et  $n + 1 = 7$  points au total).

**Corollaire 2.3.2** [2] Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^2([a, b])$ , L'erreur est simplement la somme de toutes les erreurs

$$\left\| \begin{aligned} \epsilon_t &= \epsilon_{t,0}/2 + \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon_{t,k} + \epsilon_{t,n}/2 = -\frac{h^3}{12} \left( f''(\xi_0)/2 + \sum_{k=1}^{n-1} f''(\xi_k) + f''(\xi_n/2) \right) \\ &= -\frac{h^3}{12} n f''(\xi) \\ |\epsilon_t| &\leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \text{Sup}_{[a,b]} (|f''|), \end{aligned} \right.$$

où l'on a utilisé le fait que  $h = (b - a)/n$ . A nouveau, cette méthode est exacte pour les fonctions constantes et affines (et même les paraboles en fait). Plus généralement, elle est d'autant plus précise que le nombre de points est grand

$$\epsilon_t = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}(h^2). \quad (2.23)$$

L'erreur décroît comme  $1/n^2$ . La méthode des Trapèzes est une méthode d'ordre 2.

### 2.3.4 Méthode de Simpson ( $p = 2, n = 2m$ )

La méthode de Simpson composite applique la méthode de Simpson simple ( $p = 2$ ) sur chacun des  $m$  intervalles. Le nombre total de sous-intervalles est donc cette fois-ci  $n = 2m$  (il est forcément pair et le nombre de points ( $n + 1$ ) est forcément impair). Chaque intégrale vaut

$$\tilde{I}_{2,k} = (x_{k+2} - x_k) \frac{f_k + 4f_{k+1} + f_{k+2}}{6}. \quad (2.24)$$

Si bien que (pour un nombre d'intervalles  $n$  pair) l'intégrale totale vaut

$$\begin{aligned} \tilde{I}_s &= h \frac{f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n}{3} \\ &= \frac{h}{3} \left( f_0 + 4 \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} f_{2k+1} + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f_{2k} + f_n \right). \end{aligned}$$

Dans ces formules, il y a 3 coefficients différents  $1/3$  pour les points du bord,  $4/3$  pour les points internes impairs, et  $2/3$  pour les points internes pairs.

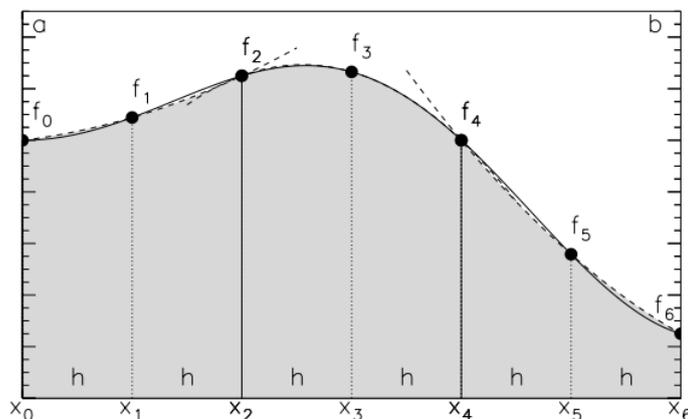


FIGURE 2.7 – Méthode composite de Simpson ( $p = 2$ ) pour  $m = 3$  intervalles (c'est à dire  $n = 6$  sous intervalles et  $n + 1 = 7$  points au total).

**Corollaire 2.3.3** [2] Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^4([a, b])$ , à nouveau, l'erreur est simplement la somme de toutes les erreurs

$$\left\| \begin{array}{l} \epsilon_s = -\frac{h^5}{9} m f^{(4)}(\epsilon) \\ |\epsilon_s| = \frac{(b-a)^5}{180n^4} \text{Sup}_{[a,b]}(|f^{(4)}|) \end{array} \right\|,$$

où l'on a utilisé le fait que  $h = (b-a)/n$  et  $n = 2m$ . Plus le nombre de points est grand, plus la méthode est précise

$$\epsilon_s = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right) = \mathcal{O}(h^4).$$

L'erreur décroît comme  $1/n^4$ . La méthode de Simpson est une méthode d'ordre 4.

**Exemple 2.3.1** Utilisons les méthodes composites du point milieu, du Trapèze et de Simpson pour calculer l'intégrale

$$\int_{0.2}^{0.6} f(x)dx = \int_{0.2}^{0.6} \ln(x)dx,$$

tel que :  $n = 4$  et  $h = \frac{0.6 - 0.2}{4} = 0.1$

Nous formons le tableau des valeurs suivant pour la fonction  $f(x)$  :

	x <sub>0</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>
x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
ln(x)	-1.6094379	-1.2039728	-0.9162907	-0.6931472	-0.5108256

On a :

$$I = \int_{0.2}^{0.6} \ln(x)dx = -0.3846078,$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_r &= 0.1 \sum_{k=0}^3 f_k = -0.4422849 && \implies |\epsilon_r| = |0.3846078 - 0.4422849| \\ &= 0.576771. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_t &= 0.1 \left( \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^3 f_k + \frac{f_4}{2} \right) = -0.3873542 && \implies |\epsilon_t| = |0.3846078 - 0.3873542| \\ &= 0.0027464. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_s &= \frac{0.1}{3} f_0 + 4(f_1 + f_3) + 2f_2 + f_4 = -0.3847108 && \implies |\epsilon_s| = |0.3846078 - 0.3847108| \\ &= 0.000103. \end{aligned}$$

# Chapitre 3

## Méthodes d'intégration numérique basées sur les ondelettes

La notion d' "Ondelettes" ou "Wavelets" a été utilisée pour la première fois au début des années 80 par le géophysicien français J.Morlet pour désigner des fonctions mathématiques utilisées dans la représentation des données sismiques.

Les ondelettes sont des fonctions de base de variation multi-échelles, ou multi-résolutions, utilisées dans le but de l'approximation ou de la compression des données.

La théorie des ondelettes n'est pas en fait tout à fait nouvelle, mais le support mathématique, contenu déjà dans les recherches des années 30, a été développé considérablement dans les dernières 20 années, après que ces fonctions ont été utilisés dans le traitement numérique du signal et en particulier dans l'analyse et la compression des images.

### 3.1 Définitions et quelques exemples

#### 3.1.1 Qu'est ce qu'une ondelette

**Définition 3.1.1** *Une ondelette est une fonction de base que l'on peut translater et dilater pour recouvrir le plan temps-fréquences et analyser un signal. L'ondelette doit être une fonction de moyenne nulle, en d'autres termes, doit être une onde. Ce qui s'écrit mathématiquement par :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (3.1)$$

**Définition 3.1.2** Une ondelette  $\psi \in L^2$  vérifiant la condition d'admissibilité ssi :

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty, \quad (3.2)$$

où  $\widehat{\psi}(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $\psi(\omega)$

**Exemple 3.1.1** L'ondelette de Morlet (complexe) :

$$\psi(x) = e^{-\pi x^2} e^{10i\pi x}.$$

On a  $\widehat{\psi}(\omega) = e^{-\pi(\omega-5)^2}$ .

**Exemple 3.1.2** L'ondelette de Haar :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[ \\ -1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

### 3.1.2 Propriétés des ondelettes

Les ondelettes sont des fonctions qui peuvent être caractérisées par certaines propriétés remarquables, ces dernières pouvant être incompatibles entre elles, cela implique des choix à faire suivant l'application souhaitée. Nous donnons des propriétés usuelles ainsi que des exemples d'ondelettes. [7]

- **Décroissance rapide** : une ondelette sera dite à décroissance rapide si

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists C_m > 0 / \forall x \in \mathbb{R}, |\psi(x)| \leq \frac{C_m}{1 + |x|^m}.$$

- **Orthogonalité** : une ondelette  $\psi$  est dite orthogonale si pour tout  $(j, j', n, n') \in \mathbb{Z}^4$

$$\langle \psi_{jn}, \psi_{j'n'} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{nn'} \quad (\delta_{jj'} = 0 \text{ si } j \neq j', \delta_{jj} = 1).$$

- **Nombre de moments nuls** : pour  $n \in \mathbb{N}$ , une ondelette admet  $n$  moments nuls si

$$\forall k = 0, \dots, n-1, \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x) dx = 0.$$

- **Support compact** : Autant l'ondelette a moins de moments nuls autant son support est compact, et une analyse plus exacte des hautes fréquences est possible.

## 3.2 Analyse multirésolution (AMR)

L'analyse multirésolutions a été introduite par Meyer et Mallat [5, 6], est un outil de traitement du signal qui permet de décomposer un signal à plusieurs échelles (résolutions) et de le reconstruire à partir des éléments de cette décomposition. Une analyse multirésolution est un partitionnement de l'espace des fonctions d'énergie finie  $L^2(\mathbb{R})$  par une famille de sous-espaces vectoriels  $V_j$ , emboîtés les uns dans les autres tels que le passage de l'un à l'autre soit le résultat d'un changement d'échelle.

### 3.2.1 Définitions et quelques exemples

**Définition 3.2.1** [5, 6] Une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  est une suite de sous-espaces fermés  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  (espaces d'approximation) vérifiant les propriétés suivantes :

- a)  $\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1}$  donc  $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$ .
- b)  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$  et  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ .
- c)  $\forall j \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$ .
- d)  $\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x - k) \in V_j$ .
- e) Il existe  $\varphi \in V_0$  telle que  $\{\varphi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$  est une base orthonormée de  $V_0$ .

- La condition e) signifie que toute fonction  $f$  de  $V_0$  s'exprime comme :

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(x - k). \quad (3.3)$$

- La condition c) exprime la propriété importante de l'analyse multirésolution, à savoir que les  $V_j$  sont constitués des fonctions de  $V_0$  "dilatées" au facteur  $2^j$  ou c'est la même chose, "comprimées" au facteur  $2^j$ .
- Les  $\varphi_{j,k} := 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$  forment une base orthonormée de  $V_j$ , ils ont même norme que  $\varphi$ . Si  $\varphi_{j,k}$  a un support de longueur  $L$ , celui de  $\varphi_{j+1,k}$  est de longueur  $2L$ .

**Exemple 3.2.1** La fonction  $\theta = 1_{[0,1[}$  et ses translatées entières engendrent l'analyse multirésolution définie par :

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z} f_{|[ \frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} [} = c^{te} \right\}. \quad (3.4)$$

**Exemple 3.2.2** La fonction  $\theta$  définie par :

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si } x \geq 2, \end{cases} \quad (3.5)$$

et ses translatées entières engendrent l'analyse multirésolution définie par :

$$V_j = \left\{ \begin{array}{l} f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z} f_{/[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}[} = P_k \\ \text{où } P_k \text{ est un polynôme de degré 1} \end{array} \right\}.$$

### 3.2.2 La fonction d'échelle

**Définition 3.2.2** [5, 6] On dit qu'une fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est une fonction d'échelle s'il existe une suite de coefficients  $h_k, k \in \mathbb{Z}$ , tels que :

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \varphi(2x - k). \quad (3.6)$$

tel que :

$$h_k = \langle \varphi(x), \sqrt{2} \varphi(2x - k) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \sqrt{2} \varphi(2x - k) dx, k \in \mathbb{Z}.$$

**Exemple 3.2.3** La fonction de Haar  $\chi_{[0,1]}$ , est une fonction d'échelle ( $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ) qui vérifie

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x - 1) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2x - 1) \right).$$

**Exemple 3.2.4** Dans l'exemple (3.2.2) la fonction  $\varphi$  définie par sa transformée de Fourier comme :

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \frac{\widehat{\theta}(\omega)}{\sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\theta}(\omega + 2h\pi)|^2}}$$

est une fonction d'échelle où  $\theta$  c'est la fonction définie dans l'exemple (3.2.2).

### 3.2.3 Construction des ondelettes

Dans cette sous section, nous décrivons la construction d'une base d'ondelette à partir d'une analyse mutirésolution.

**Théorème 3.2.1** [11] Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est une multirésolution caractérisée par sa fonction d'échelle  $\varphi$ , on définit la fonction  $\psi$  comme :

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \sqrt{2} \varphi(2x - k), \quad (3.7)$$

où  $g_k = (-1)^k h_{1-k}$ ,

alors  $\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$  est base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ , cette fonction est une ondelette.

**Exemple 3.2.5** pour l'analyse multirésolution de Haar on a :

$$\varphi(x) = \sum_{k=k_0}^{k=k_1} g_k \sqrt{2} \varphi(2x - k),$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= g_0 \sqrt{2} \varphi(2x) + g_1 \sqrt{2} \varphi(2x - 1) \\ \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \varphi(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \varphi(2x - 1) \\ \varphi(x) &= \varphi(2x) + \varphi(2x - 1), \end{aligned}$$

$$g_0 = g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

### 3.3 La base d'ondelette de Haar sur $L^2(\mathbb{R})$

L'ondelette de Haar est la plus simple des ondelettes et est donc facile à mettre en oeuvre algorithmiquement. De plus, son support est compact : Elle est bien localisée en espace. En contre partie, elle n'a qu'un seul moment nul et est discontinue. On introduit ensuite ses translatées

$$\varphi_{0,k} : x \mapsto \varphi(x - k) = 1_{[k, k+1[}(x), (k \in \mathbb{Z}) \quad (3.8)$$

Par construction, toute fonction  $f \in V_0$  s'écrit sous la forme d'une série convergent dans  $L^2(\mathbb{R})$

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_{0,k} \quad \text{où} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty \quad (3.9)$$

Dans La base de Haar , on peut montrer aisément que  $V_0$  est exactement composé des fonctions  $f$  constantes sur chaque intervalle  $[k, k + 1[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  au sens où la restriction de  $f$  à chaque intervalle  $[k, k + 1[$  coïncide presque partout avec une fonction constante. Ensuite, introduisons aussi les translatées-dilatées

$$\varphi_{j,k} : x \mapsto 2^{j/2} \varphi(2^j x - k) = 2^{j/2} 1_{[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}[}(x), (j, k \in \mathbb{Z}) \quad (3.10)$$

Là encore, pour tout entier  $j$ , les fonctions  $(\varphi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  forment une famille orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ . On note  $V_j$  le sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{R})$  qu'elles engendrent

$$\{\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}, \quad (3.11)$$

qui, dans la base de Haar, est constitué des fonctions  $f$  constantes sur chaque intervalle  $[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}[$ .

Ainsi, on dispose d'une suite croissante  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous-espaces fermés de  $L^2(\mathbb{R})$ , chacun muni d'une base hilbertienne explicite. Avec la caractérisation des  $V_j$  comme ensemble de fonctions constantes sur certains intervalles de longueur  $2^j$ , on voit que l'on va pouvoir approcher des fonctions quelconques à partir de ces sous-espaces. Plus précisément, On a la proposition suivante :

**Proposition 3.3.1** [14] *Le sous-espace vectoriel  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_j$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$*

*Ainsi, le sous-espace vectoriel engendré par les  $\{\varphi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ .*

**Preuve :** [14].

Puisque les fonctions en escalier à support compact sont denses dans  $L^2(\mathbb{R})$ , il suffit de voir que l'on peut approcher l'indicatrice  $1_{[a,b]}$  d'un intervalle fermé borné par des combinaisons linéaires des  $(\varphi_{j,k})_{j, k \in \mathbb{Z}}$  c'est-à-dire par des indicatrices d'intervalles dyadiques. Mais ceci est simple puisque

$$1_{[a_n, b_n]} \xrightarrow{\infty} 1_{[a, b]} \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R})$$

où  $a_n$  (resp.  $b_n$ ) désigne le développement dyadique d'ordre  $n$  de  $a$  (resp.  $b$ ). □

Toutefois, ces fonctions ne forment pas une famille orthonormée et on ne peut donc pas décomposer de façon explicite une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  en une série

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \lambda_{j,k} \varphi_{j,k}, \quad (3.12)$$

avec des coefficients facilement calculables, comme on le faisait avec les séries de Fourier. On est donc amenés à orthonormaliser les  $(\varphi_{j,k})$ .

Pour cela, remarquons qu'on peut considérer  $V_0$  comme un sous-espace fermé  $V_1$ . On peut donc écrire

$$V_1 = V_0 \oplus W_0, \quad (3.13)$$

où  $W_0$  désigne le supplémentaire orthogonal de  $V_0$  dans  $V_1$ . En répétant le procédé, on peut écrire pour tout entier  $N \geq 1$

$$V_N = V_0 \oplus \left( \bigoplus_{j=0}^{N-1} W_j \right), \quad (3.14)$$

où  $W_j$  désigne le supplémentaire orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$ . Puisque le sous espace  $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} V_N$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ , le sous-espace vectoriel engendré par  $V_0$  et les  $(W_j)_{j \in \mathbb{N}}$  aussi, et on en déduit la décomposition en somme hilbertienne

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus \overline{\left( \bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j \right)}. \quad (3.15)$$

Finalement, la question de l'orthonormalisation revient donc à chercher une base hilbertienne de chaque  $W_j$ .

Concentrons-nous pour le moment sur le cas  $j = 0$ . Il nous conduit à introduire la fonction

$$\psi = 1_{[0, \frac{1}{2}[} - 1_{[\frac{1}{2}, 1[}, \quad (3.16)$$

qui est de norme  $L^2$  égale à 1, et qui est orthogonale à  $\varphi$ . On introduit ensuite ses translatées

$$\psi_{0,k} : x \mapsto \psi(x - k) = 1_{[k, k + \frac{1}{2}[}(x) - 1_{[k + \frac{1}{2}, k + 1[}(x). \quad (3.17)$$

La proposition suivante rend légitime l'utilisation de cette fonction  $\psi$  :

**Proposition 3.3.2** [14] *Les fonctions  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  forment une base hilbertienne de  $W_0$ .*

**Preuve.** Pour la preuve voir [14].

Plus généralement, on introduit les translatées-dilatées de la fonction  $\psi$

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad (j, k \in \mathbb{Z}), \quad (3.18)$$

qui dans la base de Haar s'écrivent :

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2} \left( 1_{[\frac{k}{2^j}, \frac{k+0.5}{2^j}[} - 1_{[\frac{k+0.5}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}[} \right). \quad (3.19)$$

On peut voir exactement de la même manière que pour tout entier  $j$ , les fonctions  $(\psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  forment une base hilbertienne de  $W_j$ .

**Théorème 3.3.1** [14] *Les fonctions de Haar  $(\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  forment une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R})$  : toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  peut être représentée sous la forme :*

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{0,k} \varphi_{0,k} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k}, \quad (3.20)$$

avec

$\alpha_{0,k} = \langle f, \varphi_{0,k} \rangle$  et  $\beta_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ , où la convergence de série au sens de  $L^2(\mathbb{R})$ .

### 3.4 La base d'ondelette de Haar sur $L^2([a, b])$

**Définition 3.4.1** [15] La fonction d'échelle des ondelettes de Haar définie sur l'intervalle  $[a, b)$  est :

$$h_1(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in [a, b) \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (3.21)$$

**Définition 3.4.2** [15] L'ondelette de Haar est définie sur l'intervalle  $[a, b)$ , est donné par :

$$h_2(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a, \frac{a+b}{2}) \\ -1 & x \in [\frac{a+b}{2}, b) \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (3.22)$$

Toutes les autres fonctions des ondelettes de Haar sont définies sur des sous-intervalles de  $[a, b)$  et sont générés à partir de  $h_2(x)$  par les opérations de dilatation et de translation. Chaque fonction des ondelettes de Haar définie pour  $x \in [a, b)$  sauf la fonction d'échelle peut être exprimée comme :

$$h_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in [\alpha, \beta) \\ -1 & x \in [\beta, \gamma) \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (3.23)$$

où

$$\alpha = a + (b - a)\frac{k}{m}, \beta = a + (b - a)\frac{k + 0.5}{m}, \gamma = a + (b - a)\frac{k + 1}{m}, i = 3, 4, \dots, 2M.$$

Le entier  $m = 2^j$  où  $j = 0, 1, 2, \dots, J, J = 2^M$  et  $k = 0, 1, 2, \dots, m - 1$ . Le entier  $j$  indique le niveau d'ondelette et  $k$  est le paramètre de translation. Le niveau maximal de résolution est l'entier  $J$ . La relation entre  $i, m$  et  $k$  est donné par :

$$i = m + k + 1.$$

Les fonctions des ondelettes de Haar sont orthogonales les uns aux autres car

$$\int_a^b h_j(x)h_k(x)dx = \begin{cases} (b - a)2^{-j} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \quad (3.24)$$

toute fonction  $f$  qui est un intégrable carré dans l'intervalle  $[a, b]$  peut être exprimée sous la forme d'une somme infinie d'ondelettes de Haar

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i(x). \quad (3.25)$$

La série ci-dessus se termine par des termes finis si  $f$  est constante par morceaux ou peut être approchée comme constante par morceaux pendant chaque sous-intervalle.

### 3.4.1 Formule numérique d'intégrales simples par La base d'ondelette de Haar

Nous considérons l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx, \quad (3.26)$$

sur l'intervalle  $[a, b]$ . La fonction  $f$  peut être approchée en utilisant les ondelettes de Haar comme :

$$f(x) \simeq \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x). \quad (3.27)$$

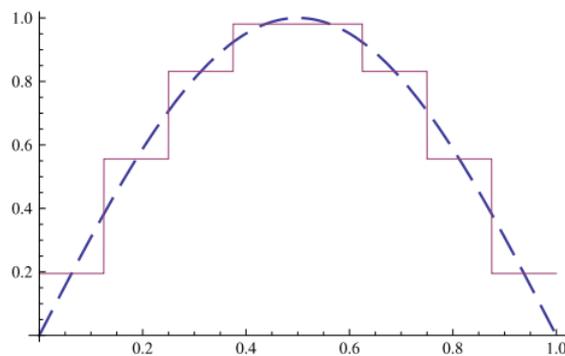


FIGURE 3.1 – approximation de Haar de la fonction  $f(x) = \sin(\pi x)$  pour  $M = 4$  : - - courbe exacte, – courbe Haar.

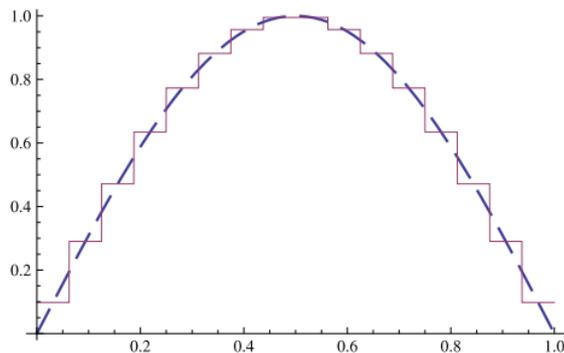


FIGURE 3.2 – approximation de Haar de la fonction  $f(x) = \sin(\pi x)$  pour  $M = 8$  : - - courbe exacte, – courbe Haar.

**Lemme 3.4.1** [15] *La valeur approximative de l'intégrale est*

$$\int_a^b f(x)dx \simeq a_1(b-a).$$

**Preuve :**

Since :

$$\int_a^b h_i(x)dx = 0, \quad i = 2, 3, \dots,$$

et

$$\int_a^b h_1(x)dx = b-a,$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{2M} a_i \int_a^b h_i(x)dx = a_1(b-a). \quad \square \quad (3.28)$$

Pour calculer le coefficient de Haar  $a_1$ , nous considérons les points noeuds

$$x_k = a + (b-a)\frac{k-0.5}{2M}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, 2M.$$

La forme discrétisée de (3.27) peut s'écrire comme suit :

$$f(x_k) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots, 2M. \quad (3.29)$$

Le second avantage de l'approximation en ondelettes de Haar est que nous n'avons pas besoin de résoudre le système ci-dessus, qui est coûteux en calcul pour des valeurs grandes de  $M$ .

**Théorème 3.4.1** [15] *La solution du système (3.29) pour  $a_1$  est*

$$a_1 = \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^{2M} f(x_k). \quad (3.30)$$

**Preuve :**

Nous prouvons le résultat par récurrence sur  $J$ , où  $M = 2^J$ .

Pour  $J = 0$ , nous avons  $M = 1$ , et le système linéaire dans ce cas est :

$$f(x_1) = a_1 + a_2,$$

$$f(x_2) = a_1 - a_2,$$

qui a la solution

$$a_1 = \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)].$$

Donc, le lemme est vrai pour  $J = 0$ .

Supposons ensuite que le lemme est vrai pour  $J = n - 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$  et considérons le système linéaire avec  $J = n$ . Pour  $J = n$ , nous avons  $M = 2^n$  et le système linéaire à  $2^{n+1}$  équations impliquant  $2^{n+1}$  variables.

De ce système nous obtenons un nouveau système en ajoutant des équations consécutives, premier et deuxième, troisième et quatrième, cinquième et sixième, et ainsi de suite.

Ce nouveau système a  $2^n$  équations impliquant  $2^n$  variables.

En remplaçant  $2a_k$  par  $a'_k$  et  $f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})$  par  $g(x_k)$ , dans ce système, on obtient un système semblable au système (3.29), nous pouvons donc appliquer une hypothèse de récurrence à ce système. Ainsi nous avons

$$a'_1 = \frac{1}{2 \cdot 2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2 \cdot 2^{n-1}} g(x_k).$$

En substituant les valeurs de  $a'_1$  et de  $g(x_k)$ , on obtient

$$a_1 = \frac{1}{2 \cdot 2^n} \sum_{k=1}^{2 \cdot 2^n} f(x_k),$$

et donc le lemme est vrai pour  $J = n$ . Donc, par récurrence, la théorème est vrai pour tout  $J = 0, 1, \dots$ .  $\square$

Par conséquent, en utilisant la méthode de quadrature avec les ondelettes de Haar, nous obtenons la formule suivante pour l'intégration numérique :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{2M} \sum_{k=1}^{2M} f(x_k) = \frac{b-a}{2M} \sum_{k=1}^{2M} f\left(a + \frac{(b-a)(k-0.5)}{2M}\right).$$

### 3.4.2 L'erreur d'intégrales simples utilisant les ondelettes de Haar

Supposons que  $f$  est une fonction différentiable avec

$$|f'(x)| \leq K, \quad \forall x \in (a, b), \quad (3.31)$$

où  $K$  est une constante positive.

L'approximation en ondelettes de Haar pour la fonction  $f$  est donnée par :

$$f_M(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x). \quad (3.32)$$

Babolian et Shahsavaran [8] ont montré que la norme carré d'erreur pour l'approximation en ondelettes est donné par :

$$\|f(x) - f_M\|^2 = \frac{K^3}{3} \frac{1}{(2M)^2}. \quad (3.33)$$

Donc,

$$\|f(x) - f_M\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^J}\right). \quad (3.34)$$

De l'équation ci-dessus, il est évident que l'erreur liée est inversement proportionnelle au niveau de résolution d'ondelette de Haar.

Ceci assure la convergence de l'approximation d'ondelettes de Haar lorsque  $M$  est augmenté.

### 3.4.3 Généralisation

#### Cas d'intégrale double

Nous obtenons une formule similaire pour les intégrales doubles et triples. La méthode peut également être étendue aux intégrales supérieures.

Considérons la double intégrale :

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy. \quad (3.35)$$

La fonction  $f(x, y)$  peut être approché en utilisant les ondelettes de Haar comme :

$$f(x, y) \simeq \sum_{j=1}^{2M} \sum_{i=1}^{2M} a_{ij} h_i(x) h_j(y). \quad (3.36)$$

**Lemme 3.4.2** [15] *La valeur approximative de l'intégrale est*

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \approx a_{11} (b - a) (d - c). \quad (3.37)$$

**Preuve :**

La preuve de ce lemme est similaire à la preuve du lemme (3.4.1).  $\square$

Comme dans le cas de l'intégrale simple, nous définissons les points

$$x_k = a + (b - a) \frac{k - 0.5}{2M}, \quad k = 1, 2, \dots, 2M. \quad (3.38)$$

et

$$y_l = c + (d - c) \frac{l - 0.5}{2M}, \quad l = 1, 2, \dots, 2M. \quad (3.39)$$

En substituant ces points en (3.36), on obtient

$$f(x_k, y_l) = \sum_{j=1}^{2M} \sum_{i=1}^{2M} a_{ij} h_i(x_k) h_j(y_l), \quad k = 1, 2, \dots, 2M, l = 1, 2, \dots, 2M. \quad (3.40)$$

**Théorème 3.4.2** [15] *La solution du système (3.40) pour  $a_{11}$  est la suivante :*

$$a_{11} = \frac{1}{4M^2} \sum_{l=1}^{2M} \sum_{k=1}^{2M} f(x_k, y_l). \quad (3.41)$$

**Preuve :**

La preuve de ce lemme est similaire à la preuve du théorème(3.4.2).  $\square$

Par conséquent, la formule permettant d'approcher les intégrales doubles à l'aide des ondelettes de Haar est :

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{4M^2} \sum_{l=1}^{2M} \sum_{k=1}^{2M} f\left(a + (b-a)\frac{k-0.5}{2M}, c + (d-c)\frac{l-0.5}{2M}\right). \quad (3.42)$$

### Cas d'intégrale triple

La formule (3.42) ci-dessus peut être étendue aux intégrales triples, et est donnée par :

$$\int_e^h \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz \simeq \frac{(h-e)(d-c)(b-a)}{8M^3} \sum_{l=1}^{2M} \sum_{k=1}^{2M} \sum_{j=1}^{2M} f(x_j, y_k, z_l), \quad (3.43)$$

où

$$\begin{aligned} x_j &= a + (b-a)\frac{j-0.5}{2M}, \quad j = 1, 2, \dots, 2M, \\ y_k &= c + (d-c)\frac{k-0.5}{2M}, \quad k = 1, 2, \dots, 2M, \\ z_l &= e + (h-e)\frac{l-0.5}{2M}, \quad l = 1, 2, \dots, 2M. \end{aligned} \quad (3.44)$$

## 3.5 Application pour les intégrales simples

Pour vérifier l'efficacité et la performance de la méthode d'ondelette de Haar, on prend des exemples connus, puis on compare leur intégrale par les trois méthodes (Trapèze, Simpson et Haar).

Les résultats d'intégrale sont présentés dans les tableaux ci-dessous en utilisant les codes suivants :

**Code Matlab pour la méthode de Trapèze :**

```
function Tr=Tr(a,b, n)
h=(b-a)./n;
X0=[a,b];
X1=[a+h:h:b-h];
Y0=feval('f1', X0);
Y1=feval('f1',X1);
Tr=0.5*h*(sum(Y0)+2*sum(Y1));
```

**Code Matlab pour la méthode de Simpson :**

```
function Sm=Sm(a,b,n)
h=(b-a)./n;
X0=[a,b];
X1=[a+h:2*h:b-h];
X2=[a+2*h:2*h:b-2*h];
Y0=feval('f0', X0);
Y1=feval('f1',X1);
Y2=feval('f2',X1);
Sm=(h/3)*(sum(Y0)+4*sum(Y1)+2*sum(Y2));
```

**Code Matlab pour la méthode de Haar :**

```
function H=H(a,b,j)
M=2^j;
h=(b-a)./n;
s=0;
for k=1:2*M;
s=s+f(a+h*(k- 0.5));
end
H=h*s;
```

**Exemple 3.5.1** *On exécute les programmes ci-dessus pour l'intégrale suivant :*

$$\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 1.$$

*L'erreur correspond de cette intégrale est donnée dans ce tableau :*

Niveau d'approximation	$\epsilon_r$	$\epsilon_s$	$\epsilon_H$
$n = 16, j = 6$	$6.39292e - 004$	$6.00917e - 006$	$5.00645e - 006$
$n = 20, j = 7$	$4.09507e - 004$	$2.51319e - 006$	$1.25168e - 006$
$n = 22, j = 8$	$3.38528e - 004$	$1.72801e - 006$	$3.12923e - 007$
$n = 24, j = 9$	$2.84517e - 004$	$1.22638e - 006$	$7.82310e - 008$

**Tableau 1 :** Comparaison des valeurs d'erreur absolues à l'aide de différentes méthodes pour Ex (3.5.1).

**Exemple 3.5.2** On exécute les programmes ci-dessus pour l'intégrale suivant :

$$\int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}.$$

L'erreur correspond de cette intégrale est donnée dans ce tableau :

Niveau d'approximation	$\epsilon_r$	$\epsilon_s$	$\epsilon_H$
$n = 14, j = 7$	$2.67366e - 003$	$9.02203e - 006$	$3.99476e - 006$
$n = 16, j = 8$	$2.04662e - 003$	$5.28109e - 006$	$9.98687e - 007$
$n = 20, j = 9$	$1.30953e - 003$	$2.15955e - 006$	$2.49671e - 007$
$n = 24, j = 10$	$9.09285e - 004$	$1.04051e - 006$	$6.24178e - 008$

**Tableau 2 :** Comparaison des valeurs d'erreur absolues à l'aide de différentes méthodes pour Ex (3.5.2).

**Exemple 3.5.3** On exécute les programmes ci-dessus pour l'intégrale suivant :

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = \frac{3}{4}.$$

L'erreur correspond de cette intégrale est donnée dans ce tableau :

Niveau d'approximation	$\epsilon_r$	$\epsilon_s$	$\epsilon_H$
$n = 14, j = 5$	$7.46543e - 003$	$2.43800e - 004$	$1.80104e - 004$
$n = 18, j = 6$	$4.53208e - 003$	$9.39236e - 005$	$4.50523e - 005$
$n = 20, j = 7$	$3.67481e - 003$	$6.26117e - 005$	$1.12647e - 005$
$n = 24, j = 8$	$2.55543e - 003$	$3.08507e - 005$	$2.81629e - 006$

**Tableau 3 :** Comparaison des valeurs d'erreur absolues à l'aide de différentes méthodes Ex (3.5.3).

De toute évidence, les résultats numériques correspondants aux trois exemples montrent que, lorsque les valeurs du niveau d'approximation sont croissantes, la valeur d'erreur absolue correspondante pour chaque méthode diminue rapidement, tel que dans chaque exemple notre méthode proposée présente la valeur d'erreur absolue la plus faible par rapport à règles de Trapèze et Simpson.

En outre, la précision de la méthode proposée atteint  $10^{-8}$ , par contre les autres méthodes ne dépassent pas  $10^{-6}$ . Ainsi, notre méthode proposée fournit le meilleur approximation de la valeur d'intégrale.

# Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons présenté une nouvelle méthode pour l'intégration numérique basée sur la base d'ondelette de Haar. D'après sa méthode d'intégration dont l'erreur absolue décroît d'une manière exponentielle, cette méthode est stable, rapide et précise, donc elle sera préférée par rapport aux autres méthodes. À partir des résultats expérimentaux, cette méthode a justifié sa meilleure performance.

# Bibliographie

- [1] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, Fausto Saleri. Méthodes Numériques Algorithmes, analyse et applications, Springer-Verlag Italia, Milano 2004.
- [2] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco. Numerical Mathematics Springer New York Berlin Heidelberg Barcelona Hong Kong London Milan Paris Singapore Tokyo Fausto Saleri 2000.
- [3] Luc Jolivet, Rabah Labbas. Analyse et analyse numérique rappel de cours et exercices corrigés. LAVOISIER, 2005.
- [4] S. R. K lyengar, R. K jain. Numerical Methods, NEW AGE INTERNATIONAL (P) LIMITED, PUBLISHERS 4835/24, Ansari Road, Daryaganj, New Delhi - 110002 Visit us at [www.newagepublishers.com](http://www.newagepublishers.com).
- [5] F.Keinert. Wavelets and Multiwavelets. Chapman Hall, (2004)
- [6] S.Mallat. Une exploration des signaux en ondelettes. Ecole polytechnique, (2000).
- [7] S. Mallat. A wavelet tour of signal processing. Academic Press, 1998.
- [8] E. Babolian, A. Shamsavaran, Numerical solution of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind using Haar wavelets, J. Comput. Appl.Math. 225 (2009) 87-95.
- [9] K. Maleknejad, F. Mirzaee, Using rationalized Haar wavelet for solving linear integral equations, Appl. Math. Comput. 160 (2005) 579-587.
- [10] S. Rezabeyk, K. Maleknejad Application of CAS wavelet to construct quadrature rules for numerical integration Vol. 7, No. 1, 2015 Article ID IJIM-00610, 6 pages. Research Article.
- [11] Yves Meyer, Wavelets and Operators, Translated by D. H. Salinger University of Leeds 2004.
- [12] Friez Keinert, Wavelets and Multiwavelets, A CRC Press Company Boca Raton London New York Washington, D.C 2003.

- [13] Christophe Damerval. Ondelettes pour la détection de caractéristiques en traitement d'images. Application à la détection de région d'intérêt. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2008. Français. <tel-00287008>.
- [14] Arthur Leclaire, Sary Drappeau. Ondelettes, construction et applications.
- [15] Siraj-ul-Islam, Imran Aziz, Fazal Haq. Computers and Mathematics with Applications, 59 (2010) 2026-2036.
- [16] E. Babolian, A. Shahsavaran Journal of Computational and Applied Mathematics 225 (2009) 87-95.
- [17] Lilliam alvarez diaz and maria. martin and victoria vampa, Daubechies wavelet beam and plate finite elements, Finite Elem. Anal. Des. 45 (2009), 200-209.
- [18] X. Zhu, G. Lei, G. Pan, On application of fast and adaptive battle-lemarie wavelets to modelling of multiple lossy transmission lines, J. Comput. Phys.132 (1997) 299-311.
- [19] Mehdi Dehghan, Mehrdad Lakestani, Numerical solution of nonlinear system of second-order boundary value problems using cubic b-spline scaling functions, Int. J. Comput. Math. 85 (2008) 1455-1461.
- [20] Xufeng Shang, Danfu Han, Numerical solution of fredholm integral equations of the first kind by using linear legendre multi-wavelets, Appl. Math.Comput. 191 (2007) 440-444.

## Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude d'effet pratique des méthodes numériques pour résoudre des intégrations numériques. On commence par un rappel sur les fonctions réelles, où on cite quelques théorèmes et notions principales comme le théorème des accroissements finis, les formules de Taylor et développements limités et le polynôme d'interpolation. Ensuite, les méthodes classiques d'intégration numérique comme (rectangle, Trapèze et Simpson). Enfin on termine avec de théorie d'ondelettes de Haar avec des exemples illustratifs qui montrent l'efficacité de cette méthode à partir d'une comparaison des résultats d'erreur absolue de chaque méthode.

**Mots-clés:** l'intégration numérique, méthode quadrature, ondelettes, analyse multi résolution.

## Abstract

This work is devoted to the study of practical effect of numerical methods to solve numerical integration. We start with a reminder about the real functions, where we quote some main theorems and notions for example the theorem of finite increments, the Taylor formulas and limited developments and the interpolation polynomial. Then the classical methods of numerical integration for example (rectangle, Trapeze and Simpson). Finally we conclude with Haar wavelet theory with illustrative examples that show the efficiency of this method from a comparison of the absolute error results of each method.

**Keywords:** numerical integration, quadrature method, wavelets, multiresolution analysis.

## ملخص

هذه المذكرة، مخصصة لدراسة التأثير التطبيقي لطرق العددية لحل التكامل العددي. نبدأ بتذكير حول الدوال الحقيقية أين سنقدم نظريات ومفاهيم أساسية مثل: التزيدات المنتهية، نشر تايلور، كثير الحدود المستقطب. من بعد النظريات التقليدية للتكامل العددي ك: (شبه المنحرف، تراييز وسيمسون). وأخير نختم بنظرية المويجات لهار مع أمثلة مبينة تقدم مدى فعالية هذه الطريقة من خلال المقارنة بين نتائج القيم للخطأ المطلق.

**الكلمات المفتاحية:** التكامل العددي، الطريقة التربيعية، مويجات، تحليل متعدد الحلول.