REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Echahid Hamma Lakhdar El Oued

Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire en vue de l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Spécialité:Mathématique

SUJET DE LA MEMOIRE:

Mesure de non compacité pour étudier les problèmes d'équations différentielles où intégrales d'ordre fractionnaire

---

Préparé par : DOGGA Amor

Soutenu le: 28/06/2021

publiquement devant le jury composé de:

Mr GHENDIR AOUN Abdellatif	MCA	Université d' El Oued	**Président**
Mr. HAMROUNI Ahmed	MCB	Université d' El Oued	**Encadreur**
Mr. Beloul Said	MCA	Université d' El Oued	**Examinateur**

Année universitaire: 2020/2021

الإهـــــــــــداء

إلى من شجعني على المثابرة طوال عمري، إلى الرجل الأبرز في حياتي

(والدي العزيـز)

إلى من بـــــها أعلو، وعليها أرتكز، إلى القـــــلب المعطاء

(والدتي الحـبيـبة)

إلى من بذلوا جهدًا في مساعدتي وكانوا خيرَ سندٍ

(إخــواني وأخواتي)

إلى أساتذتي و أصدقائي وزملائي ....

إلى كل من ساهم ولو بحرف في حياتي الدراسية.....

إلى كل هؤلاء: أهدي هذا العمل، الذي أسال الله تعالى أن يتقبله خالصًا....

Remerciements

Je voudrais dans un premier temps remercier toutes les personnes qui m'ont soutenu et se sont tenues à mes côtés pour accomplir ce travail, en particulier le professeur Hamrouni Ahmed, qui m'a apporté toute l'aide, en particulier les références et les orientations de mon sujet de recherche, pour avoir relu et corrigé mon mémoire étape par étape.

Je remercie également le jury qui discutera de cette mémoire

Je remercie également tout le personnel administratif du la Faculté des sciences exactes pour toute l'aide qu'ils m'ont apportée pour réaliser cette mémoire.

Je remercie également ma famille d'avoir fourni toutes les conditions nécessaires pour compléter ce mémoire.

Table des matières

Les notations principales utilisées

Ω : ensemble non vide.
$\overline{\Omega}$: la fermeture de Ω.
$\partial\Omega$: la frontière de Ω
$\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{N}$: l'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes.
$[\alpha]$: désigne la partie entière de α
$C([a,b],\mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
$B(x_0,r)$: la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.
$\overline{B(x_0,r)}$: la boule fermée de centre x_0 et de rayon r.
$conv\Omega$: l'enveloppe convexe d'un ensemble Ω.
$\overline{conv}\Omega$: l'enveloppe convexe fermé d'un ensemble Ω.
$|\ .\ |$: valeur absolue ou module.
$\alpha(.), \mu(.), \gamma(.)$: la mesure de non-compacité de Kuratowski ou Hausdorf.
$diam(A)$: diamètre de l'ensemble A.
$\|.\|_\infty$: $= \sup\{\|x(t)\| : t \in I\}$
$AC([a,b])$: l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$
$AC^n([a,b])$: $\left\{f : \Omega \to \mathbb{C} : f^{(k)} \in C([a,b]), k = 0 \ldots n-1, f^{(n-1)} \in AC([a,b])\right\}$
MNC : mesure non-compacité.

Introduction générale

La théorie des mesures du non-compacité constitue une branche très importante d'analyse fonctionnelle non linéaire.
Il trouve beaucoup d'applications dans la théorie des opérateurs. Les mesures de non-compacité jouent un rôle important dans la théorie du point fixe et ont de nombreuses applications dans diverses branches d'analyse non linéaire, y compris les équations différentielles, intégrales.
En gros, une mesure du non-compacité est un fonction définie sur une famille de sous-ensembles non vide et bornés d'un certain espace métrique tel qu'il soit égal à zéro sur toute la famille des ensembles relativement compacts. Le concept de mesure de non-compacité a été introduit pour la première fois par Kuratowski [10] en 1930. En 1955, le mathématicien italien Darbo [4] a utilisé la mesure de Kuratowski pour étudier une classe d'opérateurs condensants (opérateurs à condensation) dont les propriétés peuvent être caractérisé comme étant intermédiaire entre ceux de la contraction et compact cartographies. D'autres mesures de non-compacité ont été définies depuis lors. Le plus important ceux-ci est la mesure de non-compacité de Hausdorff introduite par Goldenstein et al. [5] en 1957 (et plus tard étudié par Goldenstein et Markus [6]), la partie interne Mesure de non-compacité de Hausdorff introduite par 'Istrătescu [8] en 1972.
Le but de ce travail est d'appliquer la technique de mesure de non-compacité pour obtenir l'existence des solutions à certaines équations différentielles,intégrales.
Cette mémoire réparti en quatre chapitres.

Le premièr chapitre intitulé "Préliminaires", contient un ensemble de définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite de cette étude.

Dans **le deuxième chapitre**, intitulé "Problème aux limites pour des équations fractionnaires",on traitera l'existence des solutions pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Caputo suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}u(t) = f(t, u(t)),\ t \in J = [0, T],\ 1 < \alpha \leq 2 \\ \\ u(0) = \lambda_1 u(T) + \mu_1, u'(0) = \lambda_2 u'(T) + \mu_2, \\ \end{cases}$$

où $1 < \alpha \leq 2$ et ${}^cD^{\alpha}$, est la dérivée fractionnaire de Caputo, $f : J \times E \to \mathcal{P}(E)$ est une fonction, E est un espace de Banach de norme $\|.\|$, et $\mathcal{E}$ est la famille de tous des sous-ensembles non vides de E.

Dans **Le troisième chapitre**, nous étudions une problème de Cauchy d'équations différentielles d' ordre fractionnaire :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)) \quad ,0 \leq t \leq 1, \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \\ \quad x(0) + g(x) = x_0, \end{cases}$$

Dans **Le quatrième chapitre** nous étudions un problème d'équation intégral d' ordre fractionnaire :

$$\begin{aligned} y(t) =& f(t, y(M(t))) \\ &+ g(t, y(N(t))) \int_a^t \frac{h'(\tau) u\left(t, \tau, y\left(c_1(\tau)\right), y\left(c_2(\tau)\right), \ldots, y\left(c_n(\tau)\right)\right)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d\tau \end{aligned}$$

ou $\alpha \in (0, 1), 0 \leq a < T, f, g : [a, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, M, N, c_i : [a, T] \to [a, T]$ $i = 1, \ldots, n, u : [a, T] \times [a, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et $h : [a, T] \to \mathbb{R}$.

Finalement, on donnera des exemples pour voir l'utilité du notre résultat.
Puis on donne une conclusion du travail effectué. On termine cette mémoire par une bibliographie riche.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons des notations, définitions, résultats, lemmes et théorémes nécessaires qui sont utiles pour la suite de cette étude.
La plupart de ces définitions se trouvent dans [15] et [11].

1.1 Espaces de Banach

1.1.1 Espaces métriques

On dispose sur $\mathbb{R}$ de la distance usuelle

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = |x - y|. \end{aligned}$$

On l'utilise pour définir la convergence des suites et la continuité des fonctions. Le but ici est de généraliser cette notion.

Définition 1.1. *Une distance sur un ensemble E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ telle que :*

1. $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$ *(séparation).*
2. $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x),$ *(symétrie).*
3. $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$ *(inégalité triangulaire).*

Le couple (E, d) est appelé un espace métrique.

Seconde inégalité triangulaire :

$$\forall x, y, z \in E, \mid d(x, y) - d(y, z) \mid \leq d(x, z).$$

Définition 1.2. *Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E. On dit que A est bornée si et seulement si*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \ \ \textit{tel que} \ \ \forall (x, y) \in A^2, \ \ \textit{on a} \ \ d(x, y) \leq M.$$

Définition 1.3. *Dans un espace métrique (E, d), on appelle boule ouverte (resp. boule fermé) de centre $a \in X$ et de rayon $r > 0$, le sous-ensemble*

$$B(a, r) = \{x \in E, d(a, x) < r\} \quad (resp. B_f(a, r) = \{x \in E, d(a, x) \leq r\}).$$

Définition 1.4. *Soit A une partie non vide et bornée de E.*
On appelle diamèÌtre de A le nombre $\delta(A)$ tel que

$$\delta(A) = \sup_{(x,y)\in A^2} d(x, y).$$

Remarque 1.1.

$$\delta(\emptyset) = 0.$$

Pour $A \neq B$, $\delta(A, B) = \sup\{d(a, b)a \in A, b \in B\}$.

Définition 1.5. *Soit (E, d) un espace métrique, A et B deux parties de E et $x \in E$.*
On définie la distance entre x et A par :

$$d_A(x) = \inf_{y\in A} d(x, y).$$

On définie la distance entre A et B par :

$$d(A, B) = \inf_{x\in A, y\in B} d(x, y).$$

1.1.1.1 Suites dans les espaces métriques

Définition 1.6 (Convergence).
Soit (E, d) un espace métrique et soit $(x_n)_n \in E$ une suite de points de E.
Soit $x \in E$. On dit que $(x_n)_n \in E$ converge vers x si l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in E, \forall n \in E : n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Définition 1.7 (Suite de Cauchy).
Une suite $(x_n)_n \in E$ est de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} \quad telque \quad n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.1.

1. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Définition 1.8 (Espace métrique complet). *On dit que l'espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy converge.*

1.1.1.2 Continuité dans l'espace métrique

Définition 1.9. *Soient* (E, d) *et* (E', d') *deux espaces métriques et* $f : E \longrightarrow E'$ *est une application,on dit que* f *est continue en* $a \in E$ *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E, d(x, a) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Remarque 1.2. *L'application* f *est continue sur* E *si et seulement si elle est continue en tout point* a *de* E*.*

Définition 1.10 (Applications lipschitziennes).
Une application $f : (E, d_E) \longrightarrow (E', d_{E'})$ *est dite lipschitzienne s'il existe une constante* $k \geq 0$ *telle que*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ d_{E'}(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y).$$

Remarque 1.3. *Si la constante* $k < 1$*, on dit que* f *est une contraction.*

1.1.2 Espaces de Banach

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ représente le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.11 (Norme)**.**
Soit X *un espace vectoriel. Une norme sur* E *est une application de* E *dans* $\mathbb{R}_+$ *habituellement notée* $\|.\|$ *vérifiant pour tous* x, y *dans* E *et tout* α *dans* $\mathbb{K}$ *:*
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|$ *(homogénéité),*
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.12 (Espace vectoriel normé)**.**
Un espace vectoriel E *muni d'une norme* $\|.\|$*, noté* $(E, \|.\|)$ *sera appelé un espace vectoriel normé.*

Remarque 1.4. *Tout espace vectoriel normé complet est dit espace de Banach.*

Proposition 1.2. *Soit* A *une partie de* E *et* x *un élément de* E*. Alors* x *est un élément de* A *si et seulement si* x *est un limite d'une suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *des éléments de* A*.*

Définition 1.13. *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(E', \|.\|_{E'})$ *deux espaces vectoriels normés et* $f : E \longrightarrow E'$ *est une application, on dit que* f *est continue en* $a \in E$ *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \|x - a\|_E < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_{E'} < \varepsilon.$$

1.1.3 Compacité et convexité

Définition 1.14 (**Compacité**). *Un ensemble A de E est compact si de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite converge vers un élément de A.*

Définition 1.15 (**Autre definition d'ensemble compact**). *Soit A un ensemble d'un espace norme E, A est dit compact si de tout recouvrement de A par des ouverts de A on peut extaire un sous-recouvrement fini, i.e.,*

$$\forall V_j, j \in J \text{ (ouverts)}\,;\, U \subset \bigcup_{j \in J} V_j, \exists V_{j(k)}, j(k) = 1, 2, ..., n \text{ telque } U \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{j(k)}.$$

Proposition 1.3.

1. *Si A est compact, alors A est fermé et borné.*
2. *Si V est de dimension finie, alors A est compact si et seulement si A est fermé et borné.*

On peut en fait énoncer un résultat bien plus général qui souligne la différence entre la dimension finie et la dimension infinie.

Théorème 1.1. *[11] La boule unité fermée de V est compacte si et seulement si V est de dimension finie.*

Définition 1.16. *Un ensemble A de E est faiblement compact si de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite converge faiblement vers un élément de A.*

Définition 1.17. *On dit que partie A de E relativement compact (faiblement relativement compact) si et seulement si $\overline{A}$ est compact (faiblement compact).*

Soient E, F deux espaces de Banach et Ω une partie non vide de E.

Définition 1.18 (**L'application compacte**). *Une application $f : \Omega \subseteq E \longrightarrow F$ est dite compacte si et seulement si l'image de tout ensemble borné X de Ω est un ensemble relativement compact de F, c'est-a-dire, $\overline{f(X)}$ est compact.*

Définition 1.19. *Une sous-ensemble X d'un espace vectoriel normé E est dit convexe si et seulement si :*

$$\forall (x, y) \in X, \forall \lambda \in [0, 1]\,, \quad (1 - \lambda)x + \lambda y \in X.$$

Autrement dit, un ensemble est convexe s'il contient tout segment passant par deux de ses points.

Lemme 1.1 (d'Ascoli-Arzela). *[18] Soit (E, d) un espace métrique compact, (F, d') un espace métrique complet. Une partie A de $C(E, F)$ est relativement compacte si et seulement si*

1. *l'ensemble A est borné, i.e. il existe une constante $K > 0$, tel que*
$$\|f(x)\| \leqslant K \text{ pour tout } x \in E \text{ et tout } f \in A.$$
2. *A est équicontinue,i.e., pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*
$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \varepsilon \quad \forall x_1, x_2 \in E \quad et \quad \forall f \in A.$$
3. *Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x) = \{f(x); f \in A\}$ est relativement compact.*

1.2 Mesures de non-compacité

Dans cette section, nous définissons les mesures les plus connues de non-compacité et de rappel brièvement certaines de leurs propriétés de base.

Considérons E est un espace de Banach avec la norme $\|.\|$. On noté par M_E la famille de tous les sous-ensembles bornés non vides de E et par N_E sa sous-famille constituée de tous les ensembles relativement compacts.

Définition 1.20. *[1, 2] On dit que application $\mu : M_E \to \mathbb{R}_+$ est une mesure de non-compacité dans E s'il satisfait aux conditions suivantes :*

1. *La famille $\ker \mu = \{X \in M_E : \mu(X) = 0\}$ est non vide et $\ker \mu \subset N_E$.*
2. *$X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$.*
3. *$\mu(\overline{X}) = \mu(X)$.*
4. *$\mu(ConvX) = \mu(X)$.*
5. *$\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y)$ pour $\lambda \in [0, 1]$.*
6. *Si $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est une suite imbriquée. d'ensembles fermés de M_E tel que $\lim_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$, alors l'ensemble d'intersection $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ est non vide.*

La famille $\ker \mu$ décrit dans 1 est appelée le noyau de la mesure de non-compacité μ.
En remarquant l'ensemble d'intersection X_∞ est un membre du noyau $\ker \mu$.
En effet, puisque $\mu(X_\infty) \leq \mu(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mu(X_\infty) = 0$.
Cela donne $X_\infty \in \ker \mu$.

Dans la suite, nous allons utiliser des mesures de non-compacité ayant des propriétés supplémentaires.
Une mesure est dite sous linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

7. $\mu(\lambda X) = |\lambda|\mu(X), \quad \lambda \in \mathbb{R}$.
8. $\mu(X+Y) \leq \mu(X) + \mu(Y)$.

On dit qu'une mesure de non-compacité μ a la propriété maximale si

9.$\mu(X \cup Y) = \max\{\mu(X), \mu(Y)\}$.

Une mesure de non-compacité sous-linéaire μ qui a le maximum et est telle que $ker\mu = N_E$ est appelé une mesure régulière.

Proposition 1.4. *[3] Invariance sous traduction : Soit X ensemble borné*

$$\mu\left(X + x_0\right) = \mu(X), \ \textit{pour tout } x_0 \in E.$$

Dans cette section, nous définissons les mesures de non-compacité les plus connues et rappelons brièvement certaines de leurs propriétés de base. On commence par définir les mesures de non compacité de Kuratowski et nous allons donner leurs propriétés fondamentales.
Soit E un espace métrique et Ω un sous ensemble non vide, borné de

1.2.1 Mesure de Kuratowski

Définition 1.21. *[3]*

La mesure de non compacité de Kuratowski, de l'ensemble Ω, notée $\alpha(\Omega)$ est l'inf des nombres $d > 0$, tel que Ω admet un recouvrement fini par des ensembles de diamètre inférieur à d, i.e.,

$$\alpha(\Omega) = \inf\left\{ d > 0, \Omega = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i \quad \textit{tel que} \quad \delta(\Omega_i) \leq d \right\}.$$

La fonction α définie sur l'ensemble des sous-ensembles non vide et borné de (X, d) est appelé mesure de non-compacte de Kuratowski.

Proposition 1.5. *[3] Soit Ω, Ω_1 et Ω_2 des sous-ensembles non vides et bornés d'un ensemble espace métrique (X, d). alors*

1. *$\alpha(\Omega) = 0 \Leftrightarrow \overline{\Omega}$ est compact, où $\overline{\Omega}$ désigne la fermeture de Ω.*

2. $\alpha(\Omega) = \overline{\Omega}$.
3. $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \alpha(\Omega_1) \leq \alpha(\Omega_2)$.
4. $\alpha(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \max\{\Omega_1, \Omega_2\}$.
5. $\alpha(\Omega_1 \cap \Omega_2) = \min\{\Omega_1, \Omega_2\}$.

Proposition 1.6. *[3] Soit Ω, Ω_1 et Ω_2 des sous-ensembles non vides et bornés d'un espace de Banach $(X, \|.\|)$ sur $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors*

1. $\alpha(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \alpha(\Omega_1) + \alpha(\Omega_2)$.
2. $\alpha(\Omega + x) = \alpha(\Omega), \forall x \in X$.
3. $\alpha(\lambda\Omega) = |\lambda|\alpha(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{F}$.
4. $\alpha(conv\Omega) = \alpha(\Omega)$ *où* $conv(\Omega)$ *désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble* Ω.

1.2.2 Mesure de Hausdorff

En général, le calcul de la valeur exacte de $\alpha(\Omega)$ est difficile. Une autre mesure de la non-compacité, qui semble être plus applicable, est dite la mesure de non-compacité de Hausdorff . Il est défini comme suit.

Définition 1.22. *Soit (X, d) un espace métrique complet. La mesure Hausdorff de la non-compacité d'un sous-ensemble non vide et borné Ω de X, notée $\chi(\Omega)$, est l'inf de tous les nombres $\epsilon > 0$ tel que Ω puisse être couvert par un nombre fini de balles avec des rayons $< \epsilon$, c'est-à-dire*

$$\chi(\Omega) = inf\{\epsilon > 0 : \Omega \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i), x_i \in X, r_i < \epsilon, i = 1, 2, ..., n, n \in \mathbb{N}.\}$$

Le résultat suivant montre l'équivalence entre la mesure de non-compacité de Kuratowski et la mesure de non-compacité de Hausdorff .
Pour la preuve de ces résultats, nous nous référons à [3].

Remarque 1.5. *Dans le cas où Ω est un sous-ensemble non vide et non borné, alors*

$$\alpha(\Omega) = \chi(\Omega) = \infty.$$

Les deux mesures de non-compacité de Kuratowski et de Hausdorff sont liées entre elles par les inégalités suivantes :

Théorème 1.2. *Soient α et χ les mesures de non-compacité de Kuratowski et de Hausdorff et Ω un sous ensemble d'un espace de Banach E. Alors*

$$\chi(\Omega) \leq \alpha(\Omega) \leq 2\chi(\Omega).$$

Théorème 1.3. *[14] Soit E un espace de Banach, $B \subset C([a;b];E)$ un sous-ensemble équicontinu et borné, où $a;b \in \mathbb{R}$. Alors,*

$$\mu(B) = \max_{t\in[a;b]} \mu\{(x(t) : x(.) \in B)\}.$$

Remarque 1.6. *Il est facile d'observer que la non-singularité découle directement de la régularité et la monotonie de la semi-additivité et la continuité de la lipschitzianité.*

La mesure de non compacité de Kuratowski ou de Hausdorff sont invariantes par le passage à la fermeture et l'enveloppe convexe, ce qu'affirme le théorème suivant :

Théorème 1.4. *Soient γ une mesure de non compacité* (Kuratowski ou de Hausdorff)*et Ω un sous ensemble d'un espace de Banach E. Alors,*

$$\gamma(\Omega) = \gamma(\overline{\Omega}) = \gamma(Conv\Omega),$$

où $\overline{\Omega}$ est la fermeture de Ω.

1.2.3 k-contraction d'ensemble

Définition 1.23.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue et bornée (i.e., f transforme les bornés de E en des bornés de F).

1. *On dit que f est une k-contraction d'ensembles s'il existe $k \geq 0$, tel que,*

$$\mu(f(\Omega)) < k\mu(\Omega), \forall\Omega \in M_E.$$

2. *f est appelée k-contraction stricte d'ensembles (ou contraction stricte d'ensembles) si :*

$$0 \leq k < 1.$$

3. *f est dite condensante si :*

$$\mu(f(\Omega)) < \mu(\Omega),$$

pout tout Ω borné et non relativement compact ($\mu(\Omega) > 0$).

Remarque 1.7. *Il est évident que toute application f complètement continue, est une $k-$contraction stricte d'ensembles et toute $k-$contraction stricte d'ensembles est condensante. De plus on a :*

- *f est condensante $\Rightarrow$ f est une $1-$contraction d'ensembles ;*

- *f est complètement continue $\Leftrightarrow$ f est une $0-$contraction d'ensembles.*

Lemme 1.2. *[7] Soit D un sous-ensemble borné d'un espace de Banach X. Si $f : X \to X$ est une application de la forme $L+T$, où L est une application linéaire et T est complètement continue.*
Alors,

$$\alpha(f(D)) = \alpha[f(\overline{conv}(D[D \cup \{\theta\})].$$

Lemme 1.3. *[2] Soit C un sous-ensemble borné, fermé et convexe dans espace du Banach $C(J, E)$, pour tout V de C borné et équicontinu, on a $\alpha(V(x))$ est continu et que*

$$\alpha\left(\int_J V(x)dx\right) \leq \int_J \alpha(V(x))dx.$$

Lemme 1.4. *[14] Si $V \subset C(J, E)$ est un ensemble borné et équicontinu, alors*
i. la fonction $v : t \longmapsto \alpha(V(t))$ est continue sur J, et $\|v\| = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} ((V(t))$
ii.

$$\alpha\left(\int_0^T x(s)ds : x \in V\right) \leq \int_0^T \alpha(V(s))ds, où\ V(s) = \{x(s) : x \in V\}, s \in J.$$

Lemme 1.5. *[16] Soit D un sous-ensemble borné, fermé et convexe de l'espace de Banach $C(J, X)$, G une fonction continue sur $J \times J$ et f une fonction de $J \times X \to X$ qui satisfait les conditions de Carathéodory, et supposons qu'il existe $p \in L^1(J, R_+)$ tel que, pour chaque $t \in J$ et chaque ensemble bornée $B \subset X$, on a*

$$\lim_{h \to 0^+} \mu\big(f\big(J_{t,h} \times B\big)\big) \leq p(t)\mu(B);\ ici\ J_{t,h} = [t-h, t] \cap J.$$

Si V est un sous-ensemble équicontinu de D, alors

$$\mu\big(\{\int_J K(s,t)f(s,y(s))ds : y \in V\}\big) \leq \int_J \parallel K(t,s) \parallel p(s)\mu(V(s))ds.$$

1.3 Théorèmes de point fixe

Dans cette section, Nous allons juste nous concentrer sur plusieurs théorèmes du point fixe que nous appliquerons dans l'étude de l'existence des solutions aux problèmes proposés. Dans ce section on présente la théorème de Darbo et quelques ses généralisations qui étude l'existance du point fixe des applications continues sur un sous-ensembles non vides, bornes, fermes et convexes des espaces de Banach. Maintenant nous rappelons le théorème de point fixe suivant qui est une version du point fixe classique théorème pour les applications lipschitziennes dans le contexte des mesures de non-compacité.

1.3.1 Théorème de Brouwer

En 1912, Brouwer a énoncé son célèbre théorème qui est bien connu dans la théorie du point fixe. Ce théorème a beaucoup d'applications dans l'analyse.

Théorème 1.5. *[17] Soit A un sous ensembles non vide, fermé, borné et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $n \geq 1$. Si l'application $F : A \to A$ est est continue, alors, F admet au moins un point fixe dans A.*

1.3.2 Théorème de Schauder

Plus tard en 1930, Schauder a prolongé le théorème de Brouwer au cas de dimension infinie.

Théorème 1.6. *[17] Soit X un espace de Banach réel ; A une partie non vide, convexe, fermée et bornée de X. Si l'application $F : A \to A$ est compacte, alors F admet au moins un point fixe dans A.*

1.3.3 Théorème de Darbo

En 1955, Darbo a formulé la généralisation suivante du théorème de Schauder.

Théorème 1.7. *[13] Soit Ω un sous-ensemble non vide, borne, ferme et convexe d'espace Banach E et $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ une k-contraction stricte d'ensembles, alors T admet au moins un point fixe dans Ω.*

1.3.4 Théorème de Sadovski

En 1967, Sadovski a généralisé le théorème de Darbo pour les application condensante.

Théorème 1.8. *[17] Soit* Ω *un sous-ensemble non vide, borne, ferme et convexe d'espace Banach* E *et* $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ *une application condensante. Alors,* T *admet un point fixe dans* Ω.

1.3.5 Théorème de Mönch

En 1980, Mönch a généralisé les théorèmes du point fixe de Schauder, de Darbo et de Sadowski dans le théorème suivant :

Théorème 1.9. *[12] Soit* D *un sous espace fermé, borné et convexe d'un espace de Banach, tel que* $0 \in D$ *et soit* N *une application continue de* D *dans* D.
Si l'implication :

$$V = \overline{conv} N(V) \text{ ou } V = N(V) \cup 0 \Rightarrow \gamma(V) = 0.$$

est vérifiée pour tout sous ensemble V *de* D, *alors* N *admet un point fixe dans* D.

1.4 Rappel sur le calcul fractionnaire

Le concept de dérivée fractionnaire est apparu pour la première fois dans une célèbre correspondance entre G.A. de L'Hospital et G.W. Leibniz, en 1695.
Beaucoup de mathématiciens ont développé ce domaine.Au cours des soixante dernières années, le calcul fractionnaire avait joué un rôle très important dans divers domaines tels que la physique, la chimie, la mécanique, électricité, biologie, économie, théorie du contrôle, traitement du signal et de l'image, biophysique, phénomènes de flux sanguin, aérodynamique, ajustement de données expérimentales, etc.

Le plus important de ces modèles sont celles décrites par des équations différentielles contenant des dérivés d'ordre fractionnaire.

De nouvelles théories et méthodes sont donc nécessaires à développer spécifiquement, dont l'enquête devient plus difficile. En comparant avec la théorie classique des équations différentielles, les recherches sur la théorie des équations différentielles fractionnaires n'en sont qu'à leur stade initial de développement.

1.4.1 Fonctions utiles

La fonction Gamma

Définition 1.24. *On appelle fonction Gamma eulérienne (où intègrale eulèrienne de seconde espèce) la fonction notée* Γ *définie par :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt,$$

où α *est un nombre complexe quelconque tel que* $Re(\alpha) > 0$.

Proposition 1.7. *Nous avons la relation suivante :*

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

En particulier, nous avons

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.4.2 Intégrale fractionnaire

Définition 1.25. *[9] L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction* $f \in C([a,b])$ *d'ordre* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *est définie par*

$$I_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \ a \leq t \leq s.$$

Proposition 1.8. *Nous avons les propriétés suivantes :*

i) $I^0 f(t) = f(t)$.

ii) $I^{\alpha} I^{\beta} f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t)$.

iii) l'opérateur intégral I^{α} *est linéaire.*

$$I^{\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda I^{\alpha} f(t) + I^{\alpha} g(t), \alpha \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{C}.$$

iiii) $\frac{d}{dt}(I^{\alpha} f)(t) = I^{\alpha-1} f(t)$.

Exemple 1.1. *Soit* $f(t) = (t-a)^m$ *alors :*

$$I_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (t-a)^m ds.$$

A l'aide de changement de variable $s = a + (t-a)x$ *on obtient,*

$$I_a^{\alpha} f(t) = \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-x)^{\alpha-1} x^m dx.$$

$$= \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, m+1)$$

$$= \frac{(t-a)^{m+\alpha} \Gamma(\alpha) \Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha+m+1)}.$$

D'où

$$I_a^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} (t-a)^{m+\alpha}.$$

1.4.3 Dérivèées fractionnaires

Il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire, dans cette partie on va citer celles qui sont les plus utilisées .

1.4.3.1 Dérivées fractionnaires au sens Riemann-Liouville

Définition 1.26. *[9] Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre α (avec $n-1 \leq \alpha < n$) au sens de* ***Riemann-Liouville*** *est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}f(t) &= \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\tfrac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds \\ &= \tfrac{d^n}{dt^n}(I^{n-\alpha}f(t)) = D^n I^{n-\alpha}f(t). \end{aligned}$$

ici $n = [\alpha]+1$ et $[\alpha]$ désignant la partie entière de α.

Propriétés

1. **Composition avec l'intégrale fractionnaire**

i) L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche L'opérateur de dérivation fractionnaire

$${}^{RL}D^{\alpha}\left(I^{\alpha}f(t)\right) = f(t),$$

en général on a

$${}^{RL}D^{\alpha_1}\left(I^{\alpha_2}f(t)\right) = {}^{RL}D^{\alpha_1-\alpha_2}f(t)$$

et si $\alpha_1 - \alpha_2 < 0, {}^{RL}D^{\alpha_1-\alpha_2}f(t) = I^{\alpha_2-\alpha_1}f(t)$.

ii) En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas

$${}^{RL}D^{-\alpha_1}\left({}^{RL}_{a}D^{\alpha_2}_{t}f(t)\right) = {}^{RL}D^{\alpha_2-\alpha_1}f(t) - \sum_{k=1}^{m}\left[{}^{RL}D^{\alpha_2-k}_{t}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha_1-k}}{\Gamma(\alpha_1-k+1)},$$

avec $m-1 \leq \alpha_2 < m$

2. **Composition avec les dérivées d'ordre entier**

La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne commutent que

si :$f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

$$\frac{d^n}{dt^n}\left({}^{RL}D^{\alpha}f(t)\right) = {}^{RL}D^{n+\alpha}f(t),$$

mais

$${}^{RL}D^{\alpha}\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right) = {}^{RL}D^{n+\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}.$$

3. Pour l'opérateur différentiel fractionnaire Riemann-Liouville, on a les propriétés suivantes :
$$\lim_{\alpha \to n} {}^{RL}D^{\alpha} f(t) = f^{(n)}(t).$$
$$\lim_{\alpha \to n-1} {}^{RL}D^{\alpha} f(t) = f^{(n-1)}(t).$$
4. **Linéarité.**
La dérivation fractionnaire est une opération linéaire $\alpha \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{C}$
$${}^{RL}D^{\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda {}^{RL}D^{\alpha} f(t) +^{RL} D^{r} g(t).$$
5. **Non-commutativité**
l'opérateur de Riemann-Liouville est aussi non-commutative i.e :
$$D^{\alpha} D^{m} f(t) = D^{\alpha+m} f(t) \neq D^{m} D^{\alpha} f(t).$$

1.4.3.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.27. *[9] Pour une fonction donnée f sur l'intervalle $[a, b]$ la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de* ***Caputo*** *de f, d'ordre $\alpha > 0$ est définie par :*
$${}^{c}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds,$$
ici $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désignant la partie entière de α.

Propriétés

Nous donnes les propriétés suivant :

1. **La relation avec la dérivée de Riemann-Liouville**
On suppose que $n-1 < \alpha < n, m, n \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f(t)$ telle que ${}^{c}D^{\alpha} f(t)$ et ${}^{RL}D^{\alpha} f(t)$ existe, alors
$${}^{c}D^{\alpha} f(t) =^{RL} D^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^(k)(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}.$$
On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, ...; n-1$; on aura :
$${}^{c}D^{\alpha} f(t) =^{RL} D^{\alpha} f(t).$$
2. **Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire**
Si f est une fonction continue on a :
$${}^{c}D^{\alpha} I^{\alpha} f = f \;\; et \;\; I_a^{\alpha c} D^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^(k)(a)(t-a)^{k}}{k!}.$$

Donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

3. **Non-commutativité**
On suppose que $n-1<\alpha<n, m, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f(t)$ telle que ${}^cD^\alpha f(t)$ existe, alors :
$$^cD^\alpha D^m f(t) = ^c D^{\alpha+m} f(t) \neq D^m \ ^cD^\alpha f(t).$$
4. Soit $n-1<\alpha<n$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f(t)$ telle que ${}^cD^\alpha f(t)$ existe alors :
$$\lim_{\alpha \to n} {}^cD^\alpha f(t) = f^{(n)}(t).$$
$$\lim_{\alpha \to n-1} {}^cD^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0).$$
5. **Linéarité.**
La dérivation fractinnaire de Caputo est un opérateur lineaire.
Soit $n-1<\alpha<n, n \in \mathbb{N}, \alpha, \lambda \in \mathbb{C}.$:
$$^cD^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda ^cD^\alpha f(t) + ^c D^\alpha g(t).$$

Exemple 1.2. *La différentiation de la fonction constante pour l'opérateur de Caputo est*
$$^cD^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{n-\alpha-1} c^{(n)} dx = 0.$$
Alors ${}^cD^\alpha c = 0, \quad c = const.$

Et pour Riemann-Liouville :
$$^{RL}D^\alpha c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \neq 0, \quad c = const.$$

Lemme 1.6. *Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielles*
$$^cD^\alpha f(t) = 0,$$
admet le solution
$$f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1},$$
telque : $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \cdots, n-1, n = [\alpha] + 1.$

ou
$$f(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + ... + c_N t^{\alpha-N},$$
pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \cdots, N, \ N = [\alpha] + 1.$

Lemme 1.7. *Soit $\alpha > 0$, alors*

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}f(t) = f(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1}t^{n-1},$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n = [\alpha] + 1$,

ou

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}f(t) = f(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \cdots + c_N t^{N},$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, N$ et $N = [\alpha] + 1$.

Chapitre 2

Problème aux limites pour des équations fractionnaires

Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier l'existence de solutions pour problème aux limites pour des équations fractionnaires, et cela en utilisant les techniques de mesure de non-compacité et le théorème du point fixe de Mönch.

2.1 Position du problème

Considérons le problème de cauchy d'ordre fractionnaire.

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u(t) = F(t, u(t)), \ t \in J = [0, T], \ 1 < \alpha \leq 2 \\ \\ u(0) = \lambda_1 u(T) + \mu_1, u'(0) = \lambda_2 u'(T) + \mu_2 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où ${}^cD^\alpha$, est la dérivée fractionnaire de Caputo, $f : J \times E \to \mathcal{P}(E)$.

Lemme 2.1. *Soit $\rho \in C(J, E)$ une fonction donnée, alors le problème aux limites*

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u(t) = \rho(t), \ t \in J = [0, T], \ 1 < \alpha \leq 2 \\ \\ u(0) = \lambda_1 u(T) + \mu_1, u'(0) = \lambda_2 u'(T) + \mu_2, \lambda_1 \neq 1, \lambda_2 \neq 1, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

a une solution unique

$$u(t) = \int_0^T G(t, s)\rho(s)ds + \frac{\lambda_1[\lambda_1 T + (1 - \lambda_1)t]}{(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)} - \frac{\mu_1}{(\lambda_1 - 1)}, \tag{2.1.3}$$

où $G(t, s)$ est fonctio de Green défini par la formule

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\lambda_1 (T-s)^{\alpha-1}}{(\lambda_1 - 1)\Gamma(\alpha)} + \frac{\lambda_2[\lambda_1 T + (1-\lambda_1)t](T-s)^{\alpha-2}}{(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)\Gamma(\alpha-1)}, & si \ 0 \leq s \leq t \leq T \\ \\ -\frac{\lambda_1 (T-s)^{\alpha-1}}{(\lambda_1 - 1)\Gamma(\alpha)} + \frac{\lambda_2[\lambda_1 T + (1-\lambda_1)t](T-s)^{\alpha-2}}{(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)\Gamma(\alpha-1)}, & si \ 0 \leq t \leq s \leq T \end{cases}$$

Démonstration.
Par lemme 1.7 on réduit (2.1.1) à une équation intégrale équivalente

$$u(t) = I^{\alpha}\rho(t) - c_1 - c_2t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\rho(s)ds - c_1 - c_2t, \tag{2.1.4}$$

pour certaines constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
D'autre part, par les relations $D^{\alpha}_{0^+}I^{\alpha}_{0^+}u(t) = u(t)$ et $I^{m}_{0^+}I^{n}_{0^+}u(t) = I^{m+n}_{0^+}u(t)$, pour $m, n > 0, u \in L(0,1)$ on a

$$u'(t) = -c_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}\rho(s)ds - c_2 + I^{\alpha-1}_{0^+}\rho(t). \tag{2.1.5}$$

En appliquant les conditions aux limites (2.1.1), on a

$$c_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1}\Big[\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\rho(s)ds - \frac{T\lambda_2}{\lambda_2-1}\Big(\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\rho(s)ds + \frac{\mu_2}{\lambda_2}\Big) + \frac{\mu_1}{\lambda_1}\Big],$$

$$c_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1}\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\rho(s)ds + \frac{\mu_2}{(\lambda_2-1)}.$$

Par conséquent, la solution du problème (2.1.1) est

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\rho(s)ds - c_1 - c_2t \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\rho(s)ds \\ &\quad -\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1}\Big[\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\rho(s)ds - \frac{T\lambda_2}{\lambda_2-1}\Big(\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\rho(s)ds + \frac{\mu_2}{\lambda_2}\Big) + \frac{\mu_1}{\lambda_1}\Big] \\ &\quad -\Big[\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1}\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\rho(s)ds + \frac{\mu_2}{(\lambda_2-1)}\Big]t \\ &= \int_0^T G(t,s)\rho(s)ds + \frac{\lambda_1[\lambda_1 T + (1-\lambda_1)t]}{(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)} - \frac{\mu_1}{(\lambda_1-1)}, \end{aligned}$$

qui complètent la preuve. □

Remarque 2.1. *D'après l'expression de $G(t,s)$, il est évident que $G(t,s)$ est continue sur $J \times J$.*
dénotant

$$G^* = \sup\{\int_0^T |G(t,s)|ds\}.$$

Et soit

$$g(t) = \frac{\lambda_1[\lambda_1 T + (1-\lambda_1)t]}{(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)} - \frac{\mu_1}{(\lambda_1 - 1)},$$

il est évident que $g(t)$ *est continue dans* J*, dénotant*

$$g^* = \sup\{|g(t)|, t \in J\}.$$

Pour tout $y \in C(J,E)$ *, soit* S *l'ensemble des sélections de* f *défini par*

$$s = \{v \in L^1C(J,E) : v(t) \in f(t, y(t)), a.e.t \in J\}.$$

Pour établir notre résultat principal concernant l'existence de solutions de (2.1.1),nous imposer des conditions appropriées aux fonctions impliquées dans ce problème.

Nous considérons les hypothèses suivantes :

- (H1) : $f : J \times E \to \mathcal{P}(E)$ a un graphique faiblement fermé ;
- (H2) :Pour chaque continu $x \in C(J,E)$, il existe une fonction mesurable scalairement $v : J \to E$ avec $v(t) \in f(t, x(t))$ a.e. au J et v est-il intégrable sur J ;
- (H3) : Il existe $p \in L^\infty(J, \mathbb{R}^+)$ et une fonction continue non décroissante $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tel que :

$$\|f(t,u)\| = \sup\{|v| : v \in f(t,u)\} \le p(t)\psi(\|u\|); \tag{2.1.6}$$

- (H4) : pour chaque ensemble borné $D \subset E$, et chacun $t \in I$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\beta(f(t,D)) \le p(t) \cdot \beta(D) \tag{2.1.7}$$

- (H5) : il existe une constante $R > 0$ tel que :

$$\frac{R}{g^* + \|p\|_{L^\infty} \psi(R) G^*} > 1 \tag{2.1.8}$$

  où g^* et G^* sont définis précédemment.

Théorème 2.1. *Soit* E *un espace de Banach, supposons que les hypothèses (H1)-(H5) soient satisfaites. Si*

$$\|p\|_{L^\infty} G^* < 1 \tag{2.1.9}$$

alors le problème (2.1.1) a au moins une solution sur J*.*

Démonstration.
Nous transformons le problème (2.1.1) en problème de point fixe en considérant l'opérateur $N : C(J,E) \to P(C(J,E))$ défini par

$$N(x) = \left\{ h \in C(J,E) : h(t) = g(t) + \int_0^T G(t,s)v(s)ds, v \in S \right\}, \tag{2.1.10}$$

Clairement, les points fixes de N sont des solutions de problème (2.1.1).Nous montrons d'abord que (2.1.10) a du sens. Pour voir ça, soit $x \in C(J,E)$; par (H2) il existe un fonction intégrable $v : J \to E$ tel que $v(t) \in f(t, x(t))$ pour a.e. $t \in J$. Depuis $G(t,\cdot) \in L^\infty(J)$, ensuite $G(t,\cdot)v(\cdot)$ est-il intégrable et donc N est bien défini.
Soit $R > 0$, et considérer l'ensemble

$$\begin{aligned} D = \{x \in C(J,E) : \|x\|_\infty \leq R, \|x(t_1) - x(t_2)\| \leq \|g(t_1) - g(t_2)\| \\ + \|p\|_{L^\infty} \psi(R) \int_0^T \|G(t_2,s) - G(t_1,s)\| ds \text{ pour } t_1, t_2 \in J \bigg\}. \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Nous montrerons que N satisfait les hypothèses du théorème de Mönch.

La preuve sera donné en quatre étapes.

Etape 1 : Nous allons montrer que l'opérateur $N(x)$ est convexe pour tout $x \in D$.
En effet, si h_1 et h_2 appartiennent à $N(x)$, alors il existe des fonctions intégrables $v_1(t), v_2(t) \in F(t, x(t))$ tel que, pour tout $t \in J$, on a

$$u(t) = g(t) + \int_0^T G(t,s)v_i(s)ds, \ i = 1, 2. \tag{2.1.12}$$

Soit $0 \leq d \leq 1$. Alors, pour chaque $t \in J$, on a

$$[dh_1 - (1 - dh_2)](t) = g(t) + \int_0^T G(t,s)[dv_1(s) - (1-d)v_2(s)]ds. \tag{2.1.13}$$

Puisque F a des valeurs convexes, $(dv_1 + (1 - dv_2)(t) \in F(t,y)$ et nous avons $(dh_1 + (1-d)h_2) \in N(x)$.

Etape 2 : Dans cette étape on va montrer que D_r est invariante par N donc on va monter que $N(D_r) \subset D_r$.
Pour voir ça, prendre $u \in N(D)$. Alors il existe $x \in D$ avec $u \in N(x)$ et il existe une fonction intégrable $v : J \to E$ avec $v(t) \in f(t, x(t))$ pour a.e. $t \in J$. On

suppose $u(s) \neq 0$ pour tous $s \in J$. Puis, il existe $\varphi_s \in E^*$ avec $\|\varphi_s\| = 1$ et $\varphi_s(u(s)) = \|u(s)\|$. D'où pour chaque fixe $t \in J$,on a

$$\begin{aligned} \|u(t)\| = \varphi_t(u(t)) &= \varphi_t\left(g(t) + \int_0^T G(t,s)v(s)ds\right) \\ &\leq \varphi_t(g(t)) + \varphi_t\left(\int_0^T G(t,s)v(s)ds\right) \\ &\leq \|g(t)\| + \int_0^T \|G(t,s)\|\varphi_t(v(s))ds \\ &\leq g^* + G^*\psi\left(\|x\|_\infty\right)\|p\|_{L^\infty} \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

Par conséquent,par (H5), on a

$$\|u\|_\infty \leq g^* + \|p\|_{L^\infty} G^*\psi\left(\|R\|_\infty\right) \leq R. \tag{2.1.15}$$

Supposons ensuite $u \in N(D)$ et $\tau_1, \tau_2 \in J$,avec $\tau_1 < \tau_2$ de sorte que $u(\tau_2) - u(\tau_1) \neq 0$. Puis, il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\|u(\tau_2) - u(\tau_1)\| = \varphi\left(u(\tau_2) - u(\tau_1)\right)$. D'où,

$$\begin{aligned} \|u(\tau_2) - u(\tau_1)\| &= \varphi\left(g(t_2) - g(t_1) + \int_0^T \left[G(\tau_2,s) - G(\tau_1,s)\right]\cdot v(s)ds\right) \\ &\leq \varphi\left(g(t_2) - g(t_1)\right) + \varphi\left(\int_0^T \left[G(\tau_2,s) - G(\tau_1,s)\right]\cdot v(s)ds\right) \\ &\leq \|g(t_2) - g(t_1)\| + \int_0^T \|G(\tau_2,s) - G(\tau_1,s)\|\cdot\|v(s)\|ds \\ &\leq \|g(t_2) - g(t_1)\| + \psi(R)\|p_f\|_{L^\infty}\int_0^T \|G(\tau_2,s) - G(\tau_1,s)\|\,ds; \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

cela signifie que $u \in D$.

Etape 3 : Nous allons montrer que l'opérateur N a un graphe faiblement fermé .

Soit$(x_n, y_n)_1^\infty$ une suite dans $D \times D$ avec $x_n(t) \longleftarrow\!\!\longleftarrow x(t)$ dans (E, ω), pour tout $t \in J$, $y_n(t) \to y(t)$ dans (E, ω) pour chaque $t \in J$, et $y_n \in N(x_n)$ pour $n \in \{1, 2, ...\}$. Nous allons montrer que $y \in N(x)$.

Par la relation $y_n \in N(x_n)$, on entend qu'il existe $v_n \in Sx_n$ tel que

$$y_n(t) = g(t) + \int_0^T G(t,s)v_n(s)ds \tag{2.1.17}$$

Il faut montrer qu'il existe $v \in S$ telle que, pour chaque $t \in J$,

$$y(t) = g(t) + \int_0^T G(t,s)v(s)ds \tag{2.1.18}$$

Depuis $f(\cdot,\cdot)$ a des valeurs compactes, il existe une sous-suite v_{n_m} tel que

$$v_{n_m}(\cdot) \longrightarrow v(\cdot) \textit{ dans } (E,\omega) \textit{ comme } m \longrightarrow \infty, \quad v_{n_m}(t) \in f\left(t, x_n(t)\right) \;\; t \in J \tag{2.1.19}$$

Depuis $f(t,\cdot)$ a un graphe faiblement fermé séquentiellement, $v \in f(t,x)$. alors que pour chaque $\varphi \in E^*$,

$$\varphi\left(y_n(t)\right) = \varphi\left(g(t) + \int_0^T G(t,s)v_n(s)ds\right) \to \varphi\left(g(t) + \int_0^T G(t,s)v(s)ds\right). \tag{2.1.20}$$

C'est, $y_n(t) \to Nx(t)$ dans (E,w). Répéter ceci pour chaque $t \in J$ spectacles $y(t) \in Nx(t)$.

Etape 4 : En utilisant le lemme 1.5 et (H4) et les propriétés de la mesure β, nous avons, pour chaque $t \in J$.

Maintenant, soit V un sous-ensemble de D tel que $V \subset \overline{\text{conv}}(N(V) \cup \{0\})$.

Clairement, $V(t) \subset \overline{\text{conv}}(N(V) \cup \{0\})$ pour tous $t \in J$.

D'où, $NV(t) \subset ND(t), t \in J$, est bornée dans $P(E)$.

Depuis la fonction g est continue sur J, l'ensemble $\overline{\{g(t), t \in J\}} \subset E$ est compact, donc $\beta(g(t)) = 0$.

$$\begin{aligned}
\beta(N(V)(t)) &= \beta\left\{g(t) + \int_0^T G(t,s)v(s)ds : v \in S_{F,x}, t \in J\right\} \\
&\leq \beta\{g(t) : t \in J\} + \beta\left\{\int_0^T G(t,s)v(s)ds : v \in S, x \in V, t \in J\right\} \\
&\leq \beta\left\{\int_0^T G(t,s)v(s)ds : v(t) \in f(t,x(t)), x \in V, t \in J\right\} \\
&\leq \int_0^T \|G(t,s)\| \cdot p(s) \cdot \beta(V(s))ds \\
&\leq \|p\|_{L^x} \cdot \int_0^T \|G(t,s)\| \cdot \beta(V(s))ds \\
&\leq \|p\|_{L^x} \cdot G^* \cdot \int_0^T \beta(V(s))ds
\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

qui donne

$$\|v\|_\infty \leq \|p\|_{L^\infty} \cdot \|v\|_\infty \cdot G^*. \tag{2.1.22}$$

Cela signifie que

$$\|v\|_\infty \cdot [1 - \|p\|_{L^\infty} \cdot G^*] \leq 0 \tag{2.1.23}$$

Par (2.1.9) il s'ensuit que $\|v\|_\infty = 0$; c'est, $v = 0$ pour chaque $t \in J$, et alors V est relativement faiblement compact dans E. D'aprés le théorème de Mönch, on en déduit que N a un point fixe qui est évidemment une solution du problème (2.1.1). Ceci termine la preuve.

□

Dans la suite, nous présentons un exemple qui illustre le théorème2.2.

Exemple 2.1. *: On considère l'équation différentielle fractionnelle hyperbolique suivante de la forme*

$$\left({}^cD^a u_n\right)(t) = \frac{1}{7e^{t+13}}\left(1 + |u_n(t)|\right), \quad t \in J := [0,T], 1 < \alpha \leq 2,$$
$$u(0) = \lambda_1 u(T) + \mu_1, \quad u'(0) = \lambda_2 u'(T) + \mu_2,$$

on pose $T = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \mu_1 = \mu_2 = 0$, $g(t) = 0$. *donc* $g^* = 0$.

$$E = l^1 = \left\{ u - (u_1 u_2 \ldots, u_v, \ldots) : \sum_{z=1}^{\infty} |u_n| < \infty \right\},$$

avec la norme

$$\|u\|_E = \sum_{=1}^{\infty} |u_r|.$$

Posons

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_w \ldots\ldots), \quad f = (f_1, f_2 \ldots, f_w \ldots)$$
$$f_n(t, u_n) = \frac{1}{7e^{t+13}}\left(1 + |u_n|\right), \quad t \in J.$$

Pour chaque $\mathrm{u}_n \in \mathbb{R}$ *et* $\mathrm{t} \in \mathrm{J}$,*on a par conséquent, les conditions (H1) , (H2) et (H3) sont vérifiées avec* $p(t) = \frac{1}{7e^{t+13}}, t \in I$, *et* $\varphi(u) = 1 + u, w \in [0, \infty)$. *Pour tout ensemble borné* $D \subset l^2$, *on a*

$$\beta(f(t, D)) \leq \frac{1}{7e^{t+13}}.\beta(D), \quad \forall t \in J.$$

Donc (H4) est satisfait. A partir de fonction de Green, on a

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{a-1}}{\Gamma(a)} - \frac{(1-s)^{e-1}}{2\Gamma(a)} + \frac{(1-2t)(1-s)^{a-2}}{4\Gamma(a-1)}, & si\ 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ -\frac{(1-s)^{a-1}}{2\Gamma(a)} + \frac{(1-2t)(1-s)^{a-2}}{4!(a-1)}, & si\ 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Chapitre 3

Problèmes de Cauchy d'équation fractionnaire

Ce chapitre concerne le problème de Cauchy d'une classe d'équations fractionnaire avec dérivée de Caputo.

les théorèmes d'existence de solutions pour le problème de Cauchy sont établis par calcul fractionnaire, théorie de mesure du non-compacité de Hausdorff et de théorèmes à point fixe de Mönch.

3.1 Position du problème

Considérons le problème de Cauchy d'équation fractionnaire .

$$\begin{cases} {}^cD^q x(t) = f(t, x(t)), t \in J = [0, T], 0 < q \leq 1 \\ \\ x(0) + g(x) = x_0 \in X, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

où ${}^cD^q$ est la dérivée fractionnelle de Caputo d'ordre q, $(X, \|.\|)$ Est un espace de Banach, $f : J \times X \longrightarrow X$. est une fonction continue.

Lemme 3.1. *Supposons que l'opérateur f est continu. le problème de Cauchy non local (3.1.1) est équivalent à l'équation intégrale*

$$x(t) = x_0 - g(x) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds, \ \ pour \ t \geq 0, \tag{3.1.2}$$

à condition que l'intégrale de (3.1.2) existe.

3.2 Existence des Solutions

Pour $r > 0$, soit $B_r(J)$ la boule fermée de l'espace $C(J, X)$ de rayon r et de centre à 0, c'est-à-dire

$$B_r(J) = \{x \in C(J, X) : \|x\| \leq r\}, \ \ \|x\| = \sup_{t\in[0,a]} |x(t)|$$

Pour établir notre principal résultat concernant l'existence de solutions de (3.1.1), nous imposer des conditions appropriées aux fonctions impliquées dans ce problème.

Nous considérons les hypothèses suivantes.

(H1) : Pour chaque $t \in J$, la fonction $f(t, .) : X \to X$ est continue et pour chaque $x \in X$, la fonction $f(., x) : J \to X$ est fortement mesurable.

(H2) : Pour les fonctions $x, y \in C(J, X)$ il existe une constante $K \in [0, 1)$ telle que :

$$|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|.$$

(H3) : Il existe une fonction m telle que

$${}_0D_t^{-q}m \in C(J, \mathbb{R}+), \quad \lim_{t\to 0^+} {}_0D_t^{-q}m(t) = 0,$$

et

$$|f(t, x)| \leq m(t) \text{ pour tout } x \in B_r(J) \text{ et presque tout } t \in [0, T].$$

(H4) : Il existe une constante $r > 0$ telle que

$$\frac{1}{1-K}\left(|x_0| + |g(0)| + \sup_{t\in[0,T]} \left\{\frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} m(s) ds\right\}\right) \leq r,$$

et pour toute $r > 0$ il existe une constante $\beta_r > 0$ telle que

$$\mu(f(s, A)) \leq \beta_r \mu(A),$$

où μ a dénote la mesure de non-compacité de Kuratowski.

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses (H1) - (H4), le problème de Cauchy (3.1.1) a une solution dans X, si*

$$\frac{m^* T^q \beta_r}{\Gamma(q+1)} < 1, \tag{3.2.1}$$

$m^* = \sup_{t\in[0,T]} \{m(t)\}$

Démonstration.
Transformez le problème (3.1.1) en un problème de point fixe.
Pour tout $x \in B_r(J)$, nous définissons un opérateur T comme suit :

$$(Tx)(t) = (x_0 - g(x)) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds, \;\; pour\ t \in [0, T].$$

De toute évidence, x est une solution de (3.1.1) dans $B_r(J)$ si et seulement si l'équation $x = Tx$ a une solution $x \in B_r(J)$.
Clairement, les points fixes de l'opérateur T sont des solutions du problème (3.1.1).
Le sous-ensemble $B_r(J)$ est fermé, borné et convexe.
Nous montrerons que T satisfait les hypothèses du théorème 3.1.

La preuve sera donnée en trois étapes.

Etape 1 :T est continu dans $B_r(J)$.
Pour ce faire, nous fixsons $x \in B_r(J)$ et soit (x_n) est une suite dans $B_r(J)$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n - x\| = 0$. Alors, pour $t \in J$,

$$|(Tx_n)(t) - (Tx)(t)| = \left| g(x_n) - g(x) + \int_0^t (t-s)^{q-1} [f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))] ds \right|$$

on a

$$|(Tx_n)(t) - (Tx)(t)| \leq |g(x_n) - g(x)| + \frac{1}{\Gamma(q)} \left| \int_0^t (t-s)^{q-1} |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| ds \right|$$

$$\leq K|x_n - x| + \frac{1}{\Gamma(q)} \left| \int_0^t (t-s)^{q-1} |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| ds \right|$$

par le condition (H2), nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} f(s, x_n(s)) = f(s, x(s)).$$

D'une part, en utilisant (H3), on obtient

$$t \in J, (t-s)^{q-1} |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| \leq (t-s)^{q-1} 2m(s).$$

D'un autre part,

la fonction $s \to (t-s)^{q-1}2m(s)$ est intégrable pour $s \in [0,t]$ et $t \in J$.
Par le théorème de convergence dominé par Lebesgue, on a

$$\int_0^t (t-s)^{q-1}|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))|ds \to 0, \ \ comme \ \ n \to +\infty.$$

Alors, pour $t \in J$,

$$|(Tx_n)(t) - (Tx)(t)| \to 0, \ \ comme \ \ n \to +\infty.$$

Par conséquent,

$$Tx_n \to Tx \ \ ponctuellement \ sur \ J \ comme \ \ n \to +\infty,$$

donc T est continu

Etape 2 : Dans cette étape on va montrer que $B_r(J)$ est invariante par T donc nous allons monter que $T(B_r(J)) \subset B_r(J)$.

Pour tout $x \in B_r(J)$ et $t \in J$, en utilisant (H2) - (H4), nous avons

$$|(Tx)(t)| = |(x_0 - g(x)) + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,x(s))]ds|$$

$$\leq |(x_0 - g(x))| + |\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,x(s))ds|$$

$$\leq |x_0| + K|x-0| + |g(0)| + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}|f(s,x(s))|ds$$

$$\leq |x_0| + Kr + |g(0)| + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}|m(s))|ds$$

$$\leq \left(|x_0| + Kr + |g(0)| + \sup_{t\in[0,T]}\left\{\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}m(s)ds\right\}\right)$$

$$\leq r.$$

Par conséquent, $\|Tx\| \leq r$ pour tout $x \in B_r(J)$.

Ce qui implique $T(B_r(J)) \subset B_r(J)$.

Etap 3 : $T(B_r(J))$ est borné et équicontinu.
Selon l'étape 2, nous avons

$$T(B_r(J)) = \{T(x) : x \in D_{r_0}\} \subset B_r(J).$$

Donc, pour chaque $x \in B_r(J)$ nous avons

$$\|T(x)\|_\infty \leq r$$

ce qui signifie que $T(B_r(J))$ est borné.

Soit $t_1, t_2 \in J, t_1 < t_2 \leq T$ et soit $x \in T(B_r(J))$ alors :

$$|T(x)(t_2) - T(x)(t_1)| \leq \frac{1}{\Gamma(q)}\Big|\int_0^{t_2}(t_2 - s)^{q-1}f(s, x(s))ds - \int_0^{t_1}(t_1 - s)^{q-1}f(s, x(s))ds\Big|$$

comme $t_1 \to t_2$ donc

$$|T(x)(t_2) - T(x)(t_1)| \leq \frac{1}{\Gamma(q)}\Big|\int_0^{t_2}(t_2 - s)^{q-1}f(s, x(s))ds - \int_0^{t_1}(t_1 - s)^{q-1}f(s, x(s))ds\Big|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\Big|\int_{t_1}^{t_2}(t_2 - s)^{q-1}f(s, x(s))ds\Big|$$

$$+\frac{1}{\Gamma(q)}\Big|\int_0^{t_1}(t_2 - s)^{q-1}f(s, x(s))ds - \int_0^{t_1}(t_1 - s)^{q-1}f(s, x(s))ds\Big|$$

$$+\frac{1}{\Gamma(q)}\Big|\int_0^{t_1}(t_1 - s)^{q-1}f(s, x(s))ds - \int_0^{t_1}(t_1 - s)^{q-1}f(s, x(s))ds\Big|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\Big|\int_{t_1}^{t_2}(t_2 - s)^{q-1}m(s)ds + \leq \frac{1}{\Gamma(q)}\Big|\int_0^{t_1}((t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1})m(s)ds$$

Puisque ${}_0D_t^{-q}m \in C(J, \mathbb{R}+)$, Ainsi

$$\frac{2}{\Gamma(q)}\int_0^{t_1}[(t_1-s)^{q-1}-(t_2-s)^{q-1})]m(s)ds \to 0, \;\; comme\ t_1 \to t_2$$

Par conséquent,

$$|(Tx)(t_2)-(Tx)(t_1)| \to 0 \ indpendamment\ de\ x \in B_r(J)\ comme\ t_1 \to t_2,$$

ce qui signifie que $\{Tx : x \in B_r(J)\}$ est équicontinu.

Soit $V \subset T(B_r(J))$, tel que : $V = \{Tx, x \in B_r(J)\}$ où $V \subset \overline{\text{conv}}(T(V) \cup \{0\})$

le sous-ensemble V est borné et équicontinu, d'où la fonction $v :\longmapsto \mu(v(t)) \in \mathbb{R}$

est continu sur $[0, T]$. En utilisant lemme1.5 et les propriétés de la mesure μ, nous avons, pour chaque $t \in [0, T]$.

$$v(t) = \mu(V(t)) \leqslant \mu(T(V)(t) \cup \{0\})$$

$$\leqslant \mu(T(V)(t))$$

parce que

$$\mu(T(V) \cup \{0\}) = \max\{\mu(T(V)), \mu(\{0\})\}).$$

D'autre part nous avons

$$T(v)(t) = x_0 - g(x) + \left\{\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}P_q(t-s)f(s,x(s))ds, x \in V\right\}.$$

Alors

$$v(t) < \mu(T(V)(t)) = \mu(x_0 - g(x) + \{\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}|f(s,x(s))|ds, x \in V\})$$

$$= \mu(\{\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}|f(s,x(s))|ds, x \in V\})$$

$$\leq \mu(\{\int_0^t |(t-s)^{q-1}f(s,x(s))|ds, x \in V\})$$

$$\leq \frac{2}{\Gamma(q)}\mu(\{\int_0^t (t-s)^{q-1}|f(s,x(s))|ds, x \in V\})$$

par (H3)on a :

$$v(t) \leq \frac{2\beta_r}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} m(s)\mu(V(s))ds$$

$$\leq \frac{m^* M}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} v(s)ds.$$

Ce qui implique

$$\|v\|_\infty \leq \frac{m^* T^q \beta_r}{\Gamma(q+1)} \|v\|_\infty.$$

Par (3.2.1), nous obtenons $\|v\|_\infty = 0$, c'est-à-dire $v(t) = 0$, pour chaque $t \in [0,T]$, puis $V(t)$ est relativement compact dans X. Vu le lemme d'Ascoli - Arzela, V est relativement compact en $B_r(J)$.
Appliquant maintenant le théorème1.9 de Mönch, nous concluons que T a un point fixe qui est une solution du problème (3.1.1).

Ceci complète la preuve. □

Chapitre 4

Problème d'équation intégral d' ordre fractionnaire

Ce chapitre concerne le problème d'équation intégral des ordres fractionnaires avec dérivée de Caputo.

les théorèmes d'existence de solutions pour ce problème sont établis par calcul fractionnaire, théorie de mesure du non-compacité de Hausdorff et de théorèmes à point fixe de Darbo.

4.1 Position du problème

Considérons le problème d'équation intégral d'ordres fractionnaire.

$$\begin{aligned} y(t) =& f(t, y(M(t))) \\ &+ g(t, y(N(t))) \int_a^t \frac{h'(\tau) u\left(t, \tau, y\left(c_1(\tau)\right), y\left(c_2(\tau)\right), \ldots, y\left(c_n(\tau)\right)\right)}{(h(t)-h(\tau))^{1-\alpha}} d\tau, \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

ou $\alpha \in (0,1), 0 \leq a < T, f, g : [a,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, M, N, c_i : [a,T] \to [a,T]$,
$i = 1, \ldots, n, u : [a,T] \times [a,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et $h : [a,T] \to \mathbb{R}$.
Equation (4.1.1) peut écrier comme

$$y(t) = f(t, y(M(t))) + \Gamma(\alpha) g(t, y(N(t))) I^{\alpha}_{a^+,h}\left(u\left(t, \cdot, y\left(c_1(\cdot)\right), \ldots, y\left(c_n(\cdot)\right)\right)\right)(t), t \in [a,T], \tag{4.1.2}$$

ou

$I^{\alpha}_{a^+,h}$ est integrale fractionelle d'ordre α , telle que h est définie par :

$$I^{\alpha}_{a^+,h}\psi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{h'(\tau)}{(h(t)-h(\tau))^{1-\alpha}} \psi(\tau) d\tau, \quad t \in [a,T] \tag{4.1.3}$$

dans le cas $h(\tau)=\tau$, Eq. (4.1.1) modélie qulque problèmes en relation avec théorie des files d'attent et biologie . En utilisant un argument de mesure de non-compactité, nous fournissons des conditions suffisantes pour l'existence d'au moins une solution à l'équation. (4.1.1). Nous étudierons l'équation. (4.1.1) sous les hypothèses suivantes :

(H1) Les fonctions

$$M, N, c_i : [a,T] \to [a,T], \quad i=1,\ldots,n,$$

sont continus.

(H2) Il existe des constantes non négatives L et p telque

$$|M(t)-M(s)| \leq L|t-s|^p, \quad (t,s) \in [a,T]\times[a,T].$$

(H3) Il existe des constantes non négatives D et q telque

$$|N(t)-N(s)| \leq D|t-s|^q, \quad (t,s) \in [a,T]\times[a,T].$$

(H4) La fonction $f : [a,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et satisfait

$$|f(t,u)-f(t,v)| \leq \lambda|u-v|,$$

pour tous $(t,u,v) \in [a,T]\times\mathbb{R}^2$, ou λ est une constante non négative.

(H5) La fonction $g : [a,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et satisfait

$$|g(t,u)-g(t,v)| \leq \theta|u-v|,$$

pour tous $(t,u,v) \in [a,T]\times\mathbb{R}^2$,ou θ est une constante non négative.

(H6) La fonction $u : [a,T]\times[a,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue et satisfait

$$|u(t,\tau,x_1,x_2,\ldots,x_n)| \leq \varphi\left(\max_{i=1,\ldots,n}|x_i|\right),$$

pour tous $(t,\tau,x_1,x_2,\ldots,x_n) \in [a,T]\times[a,T]\times\mathbb{R}^n$, ou $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ est non décroissant.

(H7)La fonction $h : [a,T] \to \mathbb{R}$ est C^1 et non décroissant.

(H8) Il existe $r_0 > 0$ tellque

$$\lambda r_0 + A + (\theta r_0 + B)\frac{\varphi(r_0)}{\alpha}(h(T)-h(a))^\alpha < r_0,$$

ou

$$A = \max\{|f(t,0)| : t \in [a,T]\},$$

et

$$B = \max\{|g(t,0)| : t \in [a,T]\},$$

Maintenant, nous sommes en mesure de formuler notre résultat d'existence.

Théorème 4.1. *Sous hypothèses (* H1) – (H8)*, Eq.* (4.1.1) *a au moins une solution* $y^* \in C([a,T];\mathbb{R})$.
De plus, une telle solution satisfait

$$\|y^*\| \leq r_0$$

Démonstration.
Pour tout $y \in C([a,T];\mathbb{R})$, soit

$$\begin{aligned}(Ty)(t) =& f(t, y(M(t))) \\ &+ g(t, y(N(t))) \int_a^t \frac{h'(\tau)u\left(t,\tau, y\left(c_1(\tau)\right), y\left(c_2(\tau)\right), \ldots, y\left(c_n(\tau)\right)\right)}{(h(t)-h(\tau))^{1-\alpha}} d\tau,\end{aligned}$$

pour tout $t \in [a,T]$. Nous prétendons que

$$TC([a,T];\mathbb{R}) \subseteq C([a,T];\mathbb{R}) \tag{4.1.4}$$

Il suffit de justifier que la fonction

$$\gamma : t \in [a,T] \mapsto \gamma(t) = \int_a^t \frac{h'(\tau)u\left(t,\tau, y\left(c_1(\tau)\right), y\left(c_2(\tau)\right), \ldots, y\left(c_n(\tau)\right)\right)}{(h(t)-h(\tau))^{1-\alpha}} d\tau$$

est continue dans $[a,T]$. soit $\{t_n\}$ est une suite dans $[a,T]$ tellque $\{t_n\}$ converge vers un certain $t \in [a,T]$.
Sans restriction de généralité, on peut supposer que $t_n \geq t$ pour n assez large. On a

$$|\gamma(t_n) - \gamma(t)| = \left| \int_a^{t_n} \frac{h'(\tau)U(t_n,\tau)}{\left(h(t_n) - h(\tau)\right)^{1-\alpha}} d\tau - \int_a^t \frac{h'(\tau)U(t,\tau)}{(h(t)-h(\tau))^{1-\alpha}} d\tau \right|,$$

ou

$$\begin{aligned}U(t_n,\tau) &= u\left(t_n,\tau, y\left(c_1(\tau)\right), y\left(c_2(\tau)\right), \ldots, y\left(c_n(\tau)\right)\right) \\ U(t,\tau) &= u\left(t,\tau, y\left(c_1(\tau)\right), y\left(c_2(\tau)\right), \ldots, y\left(c_n(\tau)\right)\right),\end{aligned}$$

donc

$$
\begin{aligned}
|\gamma(t_n)-\gamma(t)| \leq & \left|\int_a^t \left(\frac{h'(\tau)U(t_n,\tau)}{(h(t_n)-h(\tau))^{1-\alpha}}-\frac{h'(\tau)U(t,\tau)}{(h(t)-h(\tau))^{1-\alpha}}\right)d\tau\right| \\
& +\left|\int_t^{t_n}\frac{h'(\tau)U(t_n,\tau)}{(h(t_n)-h(\tau))^{1-\alpha}}d\tau\right| \\
\leq & \left|\int_a^t \frac{h'(\tau)}{(h(t)-h(\tau))^{1-\alpha}}\left(U(t_n,\tau)-U(t,\tau)\right)d\tau\right| \\
& +\left|\int_a^t \left(\frac{h'(\tau)U(t_n,\tau)}{(h(t_n)-h(\tau))^{1-\alpha}}-\frac{h'(\tau)U(t_n,\tau)}{(h(t)-h(\tau))^{1-\alpha}}\right)d\tau\right| \\
& +\int_t^{t_n}\frac{h'(\tau)\,|U(t_n,\tau)|}{(h(t_n)-h(\tau))^{1-\alpha}}d\tau \\
:= & A_n+B_n+C_n
\end{aligned}
$$

A application simple du théorème de convergence dominée, donne

$$\lim_{n\to\infty} A_n=0.$$

D'autre part, nous avons

$$
\begin{aligned}
B_n &\leq \varphi(\|y\|)\int_a^t\left(\frac{h'(\tau)}{(h(t)-h(\tau))^{1-\alpha}}-\frac{h'(\tau)}{(h(t_n)-h(\tau))^{1-\alpha}}\right)d\tau \\
&=\frac{\varphi(\|y\|)}{\alpha}\left((h(t)-h(a))^\alpha+(h(t_n)-h(t))^\alpha-(h(t_n)-h(a))^\alpha\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_n &\leq \varphi(\|y\|)\int_t^{*}\frac{h(\tau)}{(h(t_n)-h(\tau))^{1-\alpha}}d\tau \\
&=\frac{\varphi(\|y\|)}{\alpha}(h(t_n)-h(t))^\alpha.
\end{aligned}
$$

Passer à la limite comme $n\to\infty$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} C_n=0.$$

En conséquence, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty}|\gamma(t_n)-\gamma(t)|=0,$$

ce qui prouve (4.1.2). Puis

$$T: C([a,T];\mathbb{R})\to C([a,T];\mathbb{R}),$$

est bien difénie.
Pour $r > 0$, soit B_r être la boule fermée du centre 0 et rayon r, i.e.

$$B_r = \{y \in C([a,T];\mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq r\}.$$

Soit $y \in B_r$, pour tout $r > 0$,et pour tout $t \in [a,T]$,on a

$$\begin{aligned}&|(Ty)(t)| \leq |f(t,y(M(t))) - f(t,0)| + |f(t,0)|\\&+ (|g(t,y(N(t))) - g(t,0)| + |g(t,0)|)\\&\times \int_a^t \frac{h'(\tau)\left|u\left(t,\tau,y\left(c_1(\tau)\right),y\left(c_2(\tau)\right),\ldots,y\left(c_n(\tau)\right)\right)\right|}{(h(t)-h(\tau))^{1-\alpha}}d\tau.\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses considérées, on obtient

$$\begin{aligned}&|(Ty)(t)| \leq \lambda|y(M(t))| + |f(t,0)|\\&+ (\theta|y(N(t))| + |g(t,0)|)\int_a^t \frac{h'(\tau)\varphi\left(\max_{i=1,\ldots,n}|y\left(c_i(\tau)\right)|\right)}{(h(t)-h(\tau))^{1-\alpha}}d\tau\\&\leq \lambda\|y\| + A + (\theta\|y\| + B)\frac{\varphi(\|y\|)}{\alpha}(h(t)-h(a))^\alpha\\&\leq \lambda r + A + (\theta r + B)\frac{\varphi(r)}{\alpha}(h(T)-h(a))^\alpha.\end{aligned}$$

On prend $r = r_0$, fromelle (H8), on obtient $\|Ty\|_\infty \leq r_0$.
Comme conséquence,

$$TB_{r_0} \subseteq B_{r_0}$$

et

$$T : B_{r_0} \to B_{r_0}$$

est bien défini.
Maintenant, nous prétendons que T est un opérateur continu dans B_{r_0}.
Afin de prouver notre affirmation, prenons $y, z \in B_{r_0}$ et $\varepsilon > 0$ de sorte que

$$\|y - z\|_\infty \leq \varepsilon,$$

pour tout $t \in [a,T]$, on a

$$\begin{aligned}&|(Ty)(t) - (Tz)(t)| \leq |f(t,y(M(t))) - f(t,z(M(t)))| + |g(t,y(N(t))) - g(t,z(N(t)))|\\&\times \int_a^t \frac{h'(\tau)\left|u\left(t,\tau,y\left(c_1(\tau)\right),\ldots,y\left(c_n(\tau)\right)\right)\right|}{(h(t)-h(\tau))^{1-\alpha}}d\tau\\&+ (|g(t,z(N(t))) - g(t,0)| + |g(t,0)|)\int_a^t \frac{h'(\tau)(|V(t,\tau) - W(t,\tau)|)}{(h(t)-h(\tau))^{1-\alpha}}d\tau,\end{aligned}$$

où

$$V(t,\tau)=u\left(t,\tau,y\left(c_1(\tau)\right),\ldots,y\left(c_n(\tau)\right)\right)$$
$$W(t,\tau)=u\left(t,\tau,z\left(c_1(\tau)\right),\ldots,z\left(c_n(\tau)\right)\right).$$

De plus, définissons la quantité

$$\begin{gathered}\gamma_\varepsilon=\sup\left\{\left|u\left(t,\tau,u_1,\ldots,u_n\right)-u\left(t,\tau,v_1,\ldots,v_n\right)\right|:\right.\\ \left.t,\tau\in[a,T],u_i,v_i\in\left[-r_0,r_0\right],\left|u_i-v_i\right|\leq\varepsilon,i=1,\ldots,n\right\}.\end{gathered}$$

En utilisant les hypothèses considérées, pour tous $t\in[a,T]$,on obtient

$$\begin{aligned}&|(Ty)(t)-(Tz)(t)|\leq\lambda|y(M(t))-z(M(t))|+\theta|y(N(t))-z(N(t))|\\&\times\varphi\left(\max_{i=1,\ldots,n}\left|y\left(c_i(\tau)\right)\right|\right)\int_a^t\frac{h'(\tau)}{(h(t)-h(\tau))^{1-\alpha}}d\tau\\&+(\theta|z(N(t))|+B)\gamma_\varepsilon\int_a^t\frac{h'(\tau)}{(h(t)-h(\tau))^{1-\alpha}}d\tau\\&\leq\lambda\|y-z\|_\infty+\frac{\theta\|y-z\|_\infty\varphi\left(\|y\|_\infty\right)}{\alpha}(h(t)-h(a))^\alpha\\&+\frac{\left(\theta\|z\|_\infty+B\right)\gamma_\varepsilon}{\alpha}(h(t)-h(a))^\alpha\\&\leq\lambda\varepsilon+(h(T)-h(a))^\alpha\left(\frac{\theta\varepsilon\varphi\left(r_0\right)+\left(\theta r_0+B\right)\gamma_\varepsilon}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

Notons qu'à partir de la continuité uniforme de la fonction
$u\in[a,T]\times[a,T]\times\left[-r_0,r_0\right]^n$,on constate facilement que $\lim_{\varepsilon\to0^+}\gamma_\varepsilon=0$.
Par conséquent,

$$\|Ty-Tz\|_\infty\leq\lambda\varepsilon+(h(T)-h(a))^\alpha\left(\frac{\theta\varepsilon\varphi\left(r_0\right)+\left(\theta r_0+B\right)\gamma_\varepsilon}{\alpha}\right).$$

Passer à la limite un $\varepsilon\to0^+$, on en déduit la continuité de l'opérateur $T\in B_{r_0}$.
De plus, prenez un sous-ensemble non vide X de B_{r_0}.
Ensuite, corrigez arbitraire $\varepsilon>0$. Choisissez une fonction $z\in X$ et des nombres $t_1,t_2\in[a,T]$ tel que $\left|t_1-t_2\right|\leq\varepsilon$.
Sans restriction de généralité, on peut supposer que $t_1\geq t_2$.On obtient

$$\begin{aligned}&\left|(Tz)\left(t_1\right)-(Tz)\left(t_2\right)\right|\\&\quad\leq\left|f\left(t_1,z\left(M\left(t_1\right)\right)\right)-f\left(t_1,z\left(M\left(t_2\right)\right)\right)\right|+\left|f\left(t_1,z\left(M\left(t_2\right)\right)\right)-f\left(t_2,z\left(M\left(t_2\right)\right)\right)\right|\\&\quad+\left(\left|g\left(t_1,z\left(N\left(t_1\right)\right)\right)-g\left(t_1,z\left(N\left(t_2\right)\right)\right)\right|+\left|g\left(t_1,z\left(N\left(t_2\right)\right)\right)-g\left(t_2,z\left(N\left(t_2\right)\right)\right)\right|\right)\\&\qquad\qquad\times\int_a^{t_1}\frac{h'(\tau)\left|u\left(t_1,\tau,z\left(c_1(\tau)\right),\ldots,z\left(c_n(\tau)\right)\right)\right|}{\left(h\left(t_1\right)-h(\tau)\right)^{1-\alpha}}d\tau\end{aligned}$$

$$+\left(\left|g\left(t_2, z\left(N\left(t_2\right)\right)\right)-g\left(t_2, 0\right)\right|+\left|g\left(t_2, 0\right)\right|\right)$$
$$\times\left(\int_a^{t_1} \frac{h'(\tau) u\left(t_1, \tau, z\left(c_1(\tau)\right), \ldots\right)}{\left(h\left(t_1\right)-h(\tau)\right)^{1-\alpha}} d \tau-\int_a^{t_2} \frac{h'(\tau) u\left(t_2, \tau, z\left(c_1(\tau)\right), \ldots\right)}{\left(h\left(t_2\right)-h(\tau)\right)^{1-\alpha}} d \tau\right).$$

Définissons les quantités

$$\begin{aligned}
\omega_1(\varepsilon) &= \sup\{|z(M(t))-z(M(s))| : t, s \in [a, T], |t-s| \leq \varepsilon\}, \\
\omega_2(\varepsilon) &= \sup\{|z(N(t))-z(N(s))| : t, s \in [a, T], |t-s| \leq \varepsilon\}, \\
\omega_f(\varepsilon) &= \sup\left\{|f(t, u)-f(s, u)| : t, s \in [a, T], |t-s| \leq \varepsilon, u \in\left[-r_0, r_0\right]\right\}, \\
\omega_g(\varepsilon) &= \sup\left\{|g(t, u)-g(s, u)| : t, s \in [a, T], |t-s| \leq \varepsilon, u \in\left[-r_0, r_0\right]\right\}, \\
\omega_3(\varepsilon) &= \sup\left\{\left|u\left(t_1, s, u_1, \ldots, u_n\right)-u\left(t_2, s, u_1, \ldots, u_n\right)\right| : t_1, t_2, s \in [0, T]\right. \\
&\qquad \left.\left|t_1-t_2\right| \leq \varepsilon, u_i \in\left[-r_0, r_0\right], i=1, \ldots, n\right\}.
\end{aligned}$$

Ensuite, en gardant à l'esprit les hypothèses considérées, on obtient
$\left|(T z)\left(t_1\right)-(T z)\left(t_2\right)\right|$

$$\begin{aligned}
&\leq \lambda\left|z\left(M\left(t_1\right)\right)-z\left(M\left(t_2\right)\right)\right|+\omega_f(\varepsilon)+\left(\theta\left|z\left(N\left(t_1\right)\right)-z\left(N\left(t_2\right)\right)\right|+\omega_g(\varepsilon)\right) \\
&\times \frac{\varphi\left(\max_{i=1, \ldots, n}\left|z\left(c_i(\tau)\right)\right|\right)}{\alpha}(h(T)-h(a))^\alpha+\left(\theta\left|z\left(v\left(t_2\right)\right)\right|+B\right) \\
&\times\left(\int_a^{t_1} \frac{h'(\tau) u\left(t_1, \tau, z\left(c_1(\tau)\right), \ldots\right)}{\left(h\left(t_1\right)-h(\tau)\right)^{l-\alpha}} d \tau-\int_a^{t_1} \frac{h'(\tau) u\left(t_1, \tau, z\left(c_1(\tau)\right), \ldots\right)}{\left(h\left(t_1\right)-h(\tau)\right)^{1-\alpha}} d \tau\right. \\
&+\int_a^{t_2}\left|\frac{h'(\tau) u\left(t_1, \tau, z\left(c_1(\tau)\right), \ldots\right)}{\left(h\left(t_1\right)-h(\tau)\right)^{1-\alpha}}-\frac{h'(\tau) u\left(t_1, \tau, z\left(c_1(\tau)\right), \ldots\right)}{\left(h\left(t_2\right)-h(\tau)\right)^{1-\alpha}}\right| d \tau \\
&\left.+\int_a^{t_2} \frac{h'(\tau)}{\left(h\left(t_2\right)-h(\tau)\right)^{1-\alpha}}\left|u\left(t_1, \tau, z\left(c_1(\tau)\right), \cdots\right)-u\left(t_2, \tau, z\left(c_1(\tau)\right), \cdots\right)\right| d \tau\right) \\
&\leq \lambda \omega_1(\varepsilon)+\omega_f(\varepsilon)+\left(\theta \omega_2(\varepsilon)+\omega_g(\varepsilon)\right) \frac{\varphi\left(r_0\right)}{\alpha}(h(T)-h(a))^\alpha+\left(\theta r_0+B\right) \\
&\times\left(\frac{\varphi\left(r_0\right)}{\alpha}\left(h\left(t_1\right)-h\left(t_2\right)\right)^\alpha+\frac{\omega_3(\varepsilon)}{\alpha}\left(h\left(t_2\right)-h(a)\right)^\alpha\right. \\
&\left.+\frac{\varphi\left(r_0\right)}{\alpha}\left(\left(h\left(t_2\right)-h(a)\right)^\alpha+\left(h\left(t_1\right)-h\left(t_2\right)\right)^\alpha-\left(h\left(t_1\right)-h(a)\right)^\alpha\right)\right) \\
&\leq \lambda \omega_1(\varepsilon)+\omega_f(\varepsilon)+\left(\theta \omega_2(\varepsilon)+\omega_g(\varepsilon)\right) \frac{\varphi\left(r_0\right)}{\alpha}(h(T)-h(a))^\alpha+\left(\theta r_0+B\right) \\
&\times\left(\frac{2 \varphi\left(r_0\right)}{\alpha} \omega(h, \varepsilon)+\frac{\omega_3(\varepsilon)}{\alpha}(h(T)-h(a))^\alpha\right).
\end{aligned}$$

Observe ceci

$$\omega_1(\varepsilon) \leq \sup \|z(t)-z(s)| : t,s \in [a,T], |t-s| \leq L\varepsilon^p] = \omega\left(z, L\varepsilon^p\right).$$

De même,

$$\omega_2(\varepsilon) \leq \sup\left(|z(t)-z(s)| : t,s \in [a,T], |t-s| \leq D\varepsilon^q\right\} = \omega\left(z, D\varepsilon^q\right).$$

Notez également que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \omega_f(\varepsilon) = \lim_{s \to 0^+} \omega_g(\varepsilon) = \lim_{s \to 0^+} \omega_3(\varepsilon) = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\omega(TX,\varepsilon) \leq & \lambda\omega\left(X, L\varepsilon^p\right) + \omega_f(\varepsilon) + \left(\theta\omega\left(X, D\varepsilon^q\right) + \omega_g(\varepsilon)\right)\frac{\varphi\left(f_0\right)}{\alpha}(h(T)-h(a))^\alpha \\ & + \left(\theta r_0 + B\right)\left(\frac{2\varphi\left(r_0\right)}{\alpha}\omega(h,\varepsilon) + \frac{\omega_3(\varepsilon)}{\alpha}(h(T)-h(a))^\alpha\right).\end{aligned}$$

Passer à la limite comme $\varepsilon \to 0^+$, on a

$$\omega_0(TX) \leq \left(\lambda + \theta\frac{\varphi\left(r_0\right)}{\alpha}(h(T)-h(a))^\alpha\right)\omega_0(X),$$

où ω_0 est la mesure de la non-compacité. Ensuite, nous avons prouvé que pour tout sous-ensemble non vide X de B_{r_0},on a

$$\omega_0(TX) \leq K\omega_0(X),$$

où

$$K = \lambda + \theta\frac{\varphi\left(f_0\right)}{\alpha}(h(T)-h(a))^\alpha.$$

Notons qu'à partir de (H8), on a $K < 1$. Application du théorème de Darbo , on en déduit que l'opérateur Ta au moins un point fixe $y^* \in B_{r_0}$,qui est une solution de l'équation(4.1.1). □

4.2 Une équation fonctionnelle impliquant l'ntégrale fractionnaire

Posons $h(t) = t$ dans (4.1.1), on obtient l'équation fonctionnelle

$$y(t) = f(t, y(M(t))) + \Gamma(\alpha)g(t, y(N(t)))I_{a^+}^\alpha\left(u\left(t, \cdot, y\left(c_1(\cdot)\right), \ldots, y\left(c_n(\cdot)\right)\right)\right)(t), \tag{4.2.1}$$

où $I_{a^+}^{\alpha}$ est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville définie par On peut réécrire l'équation. (4.2.1) sous la forme

$$y(t) = f(t, y(M(t))) + g(t, y(N(t))) \int_a^t \frac{u\left(t, \tau, y\left(c_1(\tau)\right), \ldots, y\left(c_n(\tau)\right)\right)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau.$$

Ensuite, du théorème de Darbo, on déduit le résultat d'existence suivant.

Corollaire 4.1. *Supposons que les hypothèses* $(H1)-(H6)$ *soient satisfaites. Supposons aussi que il existe un certain* $r_0 > 0$ *tel que*

$$\lambda r_0 + A + (\theta r_0 + B)\frac{\varphi(r_0)}{\alpha}(T-a)^{\alpha} < r_0. \tag{4.2.2}$$

Ensuite, l'Eq. (4.2.1) a au moins une solution $y^* \in C([a, T]; \mathbb{R})$. De plus, une telle solution satisfait

$$\|y^*\|_\infty < r_0.$$

Maintenant, nous présentons un exemple illustrant le corollaire 4.1.

Exemple 4.1. *Considérons l'équation intégrale suivant :*

$$y(t) = \frac{2y(t^2)}{5} + \frac{1+t}{8} + (\frac{y(\cos t)+t^2}{36}) \int_0^t \frac{\ln(1+|y(\tau)|)}{(1+t+\tau)\sqrt{t-\tau}}, t \in [0,1]. \tag{4.2.3}$$

On pose

$$f(t,x) = \frac{1+t}{8} + \frac{2u}{5}, (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R},$$

$$g(t,x) = \frac{u+t^2}{36}, (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R},$$

$$u(t,s,x) = \frac{ln(1+|x|)}{1+t+s}, (t,s,x) \in [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R},$$

et

$$\alpha = \frac{1}{2}, M(t) = t^2, N(t) = cost, c_1(t) = t, t \in [0,1].$$

On peut réécrire l'équation. (4.2.3) sous la forme

$$y(t) = f(t, y(M(t))) + g(t, y(N(t))) \int_0^t \frac{u(t, \tau, y(c_1(\tau)))}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, t \in [0,1].$$

Observez que les fonctions impliquées dans l'équation. (4.1.5) satisfont aux hypothèses du corollaire 4.1. En effet, on a

$$L = 2, p = 1, D = q = 1, \lambda = \frac{2}{5}, \theta = \frac{1}{36}, \varphi(r) = ln(1+r), A = \frac{1}{4} \text{ et } B = \frac{1}{36}.$$

Considérons maintenant l'inégalité (4.2.2) du corollaire 4.1, qui a la forme

$$\frac{2}{5}r + \frac{1}{4} + \frac{1}{18}(r+1)ln(r+1) < r.$$

Nous pouvons vérifier facilement que $r_0 = 1$ *satisfait l'inégalité ci-dessus.*
Par conséquent, du corollaire 4.1, on en déduit que l'Eq. (4.1.5) a au moins une solution $y^* \in C([0,1];\mathbb{R})$ *telle que*

$$y^* < 1.$$

Conclusion générale

Dans ce travail, l'objectif est l'étude d'existence des solutions pour quelques classes des équations différentielles ou intégrales dans des espaces de Banach de dimension fini ou infinie.
Et spécifiquement en utilisant dans cette étude la technique de mesure de non- compacité compacité combiné avec les théorèmes du point fixe et en particulier le point fixe de Darbo et de Mönch.
Cette technique est souvent utilisée dans plusieurs branches de l'analyse non linéaire.
Pour obtenir l'existence des solutions, des conditions suffisantes seront considérées dans l'étude des différentes classes de ces problèmes aux limites.
Et nous allons essayer de présenter les résultats que nous avons obtenus grâce à notre étude de l'existence de solutions à certaines des différents types des problèmes d'équations différentielles ou integrales.
Et nous avons conclu ce travail en donnant des exemples pratiques de chaque problème pour confirmer ce travail.

Bibliographie

[1] J. Banaś, *On measures of noncompactness in Banach spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae 21 (1980) 131-143.

[2] J. Banaś, K. Goebel, *Measures of Noncompactness in Banach spaces*, Lect. Notes Pure Appl. Math., vol. 60, Dekker, New York, 1980.

[3] J.Banaś,M. Mursaleen, Sequence Spaces and Measures of noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations. Springer, New Delhi (2014).

[4] G.Darbo,Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto. Rend. Sem. Mat. Un.Padova. 24, 84-92 (1955).

[5] L.S.Goldenštein,I.T. Gohberg, ,A.S. Markus, Investigation of some properties of bounded linear operators with their q-norms. Učen. Zap. Kishinevsk. Univ. 29, 29-36 (1957).

[6] L.S.Goldenštein,A.S. Markus , On a measure of noncompactness of bounded sets and linear operators. In : Studies in Algebra and Mathematical Analysis, Kishinev, pp. 45-54 (1965).

[7] S. Ishikawa ,H. Fujita, Some Variants of Strict-Set-Contraction. Vol. 11 (1972)pp 83-87.

[8] L.S.Istrătescu , Investigation of some properties of bounded linear operators with their q-norms. Učen. Zap. Kishinevsk. Univ. 29, 29-36 (1957).

[9] A.A. Kilbas,H.M. Srivastava,J.J. Trujillo ,*Theory And Applications Of Fractional Differentail Equations*,2006.

[10] Kuratowski. K, Sur les espaces complets. Fund. Math. 15, 301-309 (1930).

[11] V. Millot , Analyse et calcul différentiel École Normale Supérieure 2015-2016 .

[12] H. Mönch, *Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, vol. 4, no. 5, pp. 985-999, 1980.

[13] D. O'regan,Fixed Point Theorems for Nonlinear Operators, J.Math. Anal. Appl. Vol.202 (1996) pp 413-432.

[14] D. O'Regan, Y. J. Cho , Y. Q. Chen ,Topological Degree Theory and Applications,Copyright 2006 .

[15] L. Schwartz ,*Analyse Topologie générale et analyse fonctionnelle* ,Paris,1993.

[16] S. Szufla, On the application of measure of noncompactness to existence theorems.Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 75 (1986), 1-14.

[17] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Vol. I : Fixed Point Theorems, Springer-Verlag, New York, 1986.

[18] Y. Zhou,X.H. Shen,L. Zhang :, Cauchy problem for fractional evolution equations with Caputo derivative, Eur. Phys. J. Special Topics 222, 1749-1765 (2013).

Résumé

Dans ce travail, nous allons essayer de présenter les résultats que nous avons obtenus grâce à notre étude de l'existence de solutions à certaines des différents types des problèmes d'équations différentielles ou intégrales.
Y compris les équations différentielles ordinaires d'ordre entier avec conditions initiales et conditions aux limites , les équations différentielles d'ordre fractionnaire impliquant des dérivées de Caputo et de Riemann-Liouville avec des conditions aux limites dans des espaces de Banach muni de leurs topologies faibles sur des domaines bornés. Notre principal outil est la technique de la mesure de non compacité combiné avec les théorèmes du point fixe et en particulier le point fixe de Darbo et de Mönch. Cette technique est souvent utile dans l'existence de solutions de plusieurs types d'équations différentielles ou intégrales.

Summary

In this work, we will try to present the results that we obtained thanks to our study of the existence of solutions to some of the different types of the problems of differential equations or integrals equations.
Fractional order differential equations involving Caputo derivatives and Riemann-Liouville derivatives with boundary conditions in Banach spaces provided with their weak topologies on bounded domains.

The main tool used in considerations is the combination of the technique of measure of noncompactness with fixed point theorems of Darbo and Mönch type.

This technique is a very useful tool in the existence of solutions of several types of differential equations.

ملخص

في هذَا العمل ، حَاولنَا تقديم النتَائج التي حصلنَا عليهَا بفضل درَاستنَا لوجود اَلحلول لبعض الأَنوَاع المختلفة من مسَائِل المعَادلَات التفَاضلية و المعَادلَات التكَاملية التي تنطوي علَى الاشتقَاق بمفهوم كَابيتو و مفهوم ريمَان ليوفيل مع الشروط الحدية في فضَاءَات بنَاخ المقدمة مع طبوبولوجيَاتهَا الضعيفة.

أَدَاتنَا الرئِيسية هي تقنية قيَاس عدم الترَاص مع نظريَات النقطة الثَابتة و خَاصة نظرية النقطة الثَابتة لدَاربو و لمونك. و غَالبَا مَا تستخدم هذه التقنية في عدة فروع لّلتحليل غير الخطي .

وأَثبتّ هذه التقنية أَنهَا أَدَاة نَاجعة جدَا في إِثبَات وجود الحلول لِلمعَادلَات التفَاضلية.