



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université de Chahid Hama Lakhdar El Oued

Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Thèse en vue de l'obtention du diplôme de doctorat Sciences en mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Thème:

Analyse Mathématiques de quelques problèmes de contact avec Adhésion entre deux corps
piézoélectriques

Présentée Par: Said Ameer Meziane

Soutenue le: 21/ 01/2021

devant le jury composé de:

M. Abdelouaheb Mansour	Professeur	Université d'El Oued	Président
M. Hadj Ammar Tedjani	MCA	Université d'El Oued	Promoteur
M. Tidjani Menacer	MCA	Université de Biskra	Examineur
M. Khaled Saoudi	MCA	Université de Khenchla	Examineur
M. Abdella Bensayah	MCA	Université de Ouargla	Examineur
M. Azeb Ahmed Abdelaziz	MCA	Université d'El Oued	Examineur

Année universitaire: 2020/2021

Dédicaces

Je dédie ce travail à . . .

Ma Femme .

Mon fils Saleh.

Ma fille Wissal.

*À toute la famille Said-Ameur ,à la famille Derkaoui Miloud, à la famille Hadj
Ammar Tedjani et à la famille Azeb Ahmed Abdeaziz .*

Remerciements et Gratitude

*je remerciez **Dieu** Tout-Puissant qui ma permis de terminer ce travail.*

*J'adresse mes remerciements les plus chaleureuses et sincères à mon encadreur **Dr. Hadj Ammar Tedjani** de m'avoir beaucoup appris lors de son encadrement de ma thèse de doctorat. Son enthousiasme et sa compétence m'ont encouragé à mes travaux de recherche sous sa direction.*

*Je suis très honorée que Monsieur le **Professeur Abdelouaheb Monsour** a accepté de présider le jury de ma soutenance de ma thèse.*

*Je voudrais adresser tous mes remerciements sincèrement et apprécions aux membres du jury Messieurs le **Dr. Saoudi khaled** ,le **Dr. Tidjani Menacer** , **Dr Abdallah Bensayah** et **Dr. Azeb Ahmed Abdelaziz**.*

À tous ceux qui ont contribué à l'achèvement de ces travaux, de près ou de loin, nous remercions et apprécions beaucoup.

Table des matières

Introduction	v
Notations générales	ix
I Modélisation et Outils Mathématiques	xi
1 Modélisation	1
1.1 Cadre physique	1
1.1.1 Modèle mathématique	4
1.2 Lois de comportements	6
1.3 Conditions aux limites	8
1.3.1 La condition aux limites de déplacement	8
1.3.2 La condition aux limites de traction.	9
1.3.3 Les conditions aux limites électriques.	9
1.3.4 Conditions aux limites de contact.	9
1.3.5 Loi de frottement de type Coulomb.	12
1.3.6 Lois de contact avec frottement et adhésion	13
2 Outils Mathématiques	17
2.1 Contraction	17
2.2 Espaces de Hilbert	18
2.3 Les espaces $L^p(\Omega)$	19
2.4 Espaces de Sobolev	20
2.5 Espaces fonctionnels	22

2.5.1	Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert . . .	25
2.5.2	Lemme de Gronwall	30
II Problème de Contact Entre Deux Corps Électro-élastiques avec Adhésion		32
3	Problème de Contact Entre Deux Corps Électro-élastiques avec Adhésion	33
3.1	Formulation du problème	34
3.2	Formulation variationnelle	38
3.3	Existence et unicité de la solution	45
III Problème de Contact entre deux corps thermo-électro-Viscoélastiques avec adhésion et endommagement		57
4	Problème de Contact entre deux corps thermo-électro- Viscoélastiques avec adhésion et endommagement	58
4.1	Formulation du problème	59
4.2	Formulation Variationnelle	62
4.3	Résultats principaux	77
Conclusion générale		88
Bibliographie		89
Conclusion générale		95

Introduction générale

Dans la nature et dans l'industrie, plusieurs phénomènes fréquents font appel à des processus de contact entre deux corps déformables qui se déplacent l'un vers l'autre. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment les forces sont appliquées sur une structure et comment réagissent ces structures lorsqu'elles subissent ces forces. Les problèmes de contact avec ou sans frottement impliquant des corps déformables ou non interviennent de multiples façons aussi bien dans le domaine industriel que dans la vie de tous les jours.

Un progrès considérable a été réalisé récemment dans la modélisation et l'analyse mathématiques des différents processus impliqués dans le contact entre corps déformables et par conséquent, une Théorie Mathématique générale de la Mécanique du Contact (MTCM) est actuellement émergée. Elle est concernée par les structures mathématiques qui sont à la base des problèmes de contact avec des lois constitutives différentes, c'est à dire, différents matériaux, diverses géométries et des conditions de contact différentes ; voir par exemple [38, 39, 40].

Une littérature technique vaste, principalement dans l'ingénierie mais aussi dans la géophysique, couvre le contact avec ou sans frottement. Dans la géophysique, la littérature se concentre sur le mouvement des plaques tectoniques, particulièrement sur les tremblements de terre. Les publications qui traitent des problèmes de contact avec frottement sont très nombreuses, voir à titre d'exemples [2, 5].

D'autres travaux ont considéré des conditions de contact du type complaisance normale avec frottement, comme dans [3, 43]. Le but est de fournir un contexte clair et rigoureux à la construction des modèles mécaniques de contact, la preuve des résultats d'existence et d'unicité et l'établissement de la régularité de la solution. Une fois l'existence,

l'unicité et la régularité de solutions sont établis, des questions importantes surgissent, comme l'analyse mathématique des solutions et comment construire des algorithmes fiables et efficaces pour leur simulations numériques.

En mécanique et en physique, l'adhésion est l'ensemble des phénomènes physico-chimiques qui se produisent lorsque l'on met en contact intime deux matériaux, dans le but de créer une résistance mécanique à la séparation. Une fois le contact établi, l'énergie nécessaire pour éviter la séparation s'appelle énergie d'adhésion. Elle ne doit pas être confondue avec l'adhérence, qui est au contraire la force nécessaire pour réaliser cette même séparation. L'adhésion est soit directe elle a lieu uniquement pour des matériaux très lisses et extrêmement propres (mica ou silicium par exemple), soit médiée par un matériau intermédiaire. L'importance accrue des processus d'adhésion dans les montages industriels a attiré l'attention des chercheurs ces derniers temps, ce qui enrichit les études et la littérature mathématique sur ce sujet. Pour modéliser le phénomène d'adhésion, quand l'assemblage n'est pas permanent et les matériaux composites pouvant subir un décollement sous l'effet des tensions, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact. En se basant sur les idées de M. Frémond [10, 11], l'idée est d'introduire une variable interne de surface appelée champ d'adhésion, qui prend ses valeurs entre zéro et un et qui décrit la densité fractionnaire des liens actifs sur la surface de contact.

Les matériaux piézoélectriques ont été découverts au début du siècle par les époux Curie. Ce sont des diélectriques particuliers qui permettent de transformer l'énergie de déformation élastique en énergie électrique, et inversement. Plus précisément, la piézo-électricité est la capacité de certains matériaux à se polariser lorsqu'ils sont contraints mécaniquement, la charge apparaissant à leur surface étant proportionnelle à la déformation engendrée. L'effet piézoélectrique inverse est l'obtention d'une déformation par application d'un champ électrique.

Les matériaux piézoélectriques sont très nombreux. Le plus connu est sans doute le quartz, toujours utilisé dans les montres pour générer des impulsions d'horloge. Mais ce sont des céramiques synthétiques, les PZT (plomb, zirconate, titanate) qui sont le plus largement utilisées aujourd'hui dans l'industrie.

De manière plus générale, l'effet direct peut être mis à profit dans la réalisation de

capteurs (capteur de pression etc.) tandis que l'effet inverse permet de réaliser des actionneurs (injecteurs à commande piézoélectrique en automobile, na-no manipulateur). De très nombreux champs d'applications peuvent être trouvés dans la littérature, citons à titre exemples ;

Capteurs : La particularité de l'effet piézoélectriques est la génération de fortes contraintes pour de petits déplacements. Il est donc un candidat idéal pour les applications basées sur la détection de :

- Capteurs de pression (pression des pneus d'automobile, pression dans les tuyères aéronautiques).
- Capteurs sonores.
- Microbalance piézoélectrique.

Actionneurs : Les déplacements très faibles produits par les cristaux piézoélectriques en font des micro-manipulateurs idéaux mis à profit dans différentes applications :

- Hauts-parleurs.
- Optique adaptative en astronomie.
- Microscope à balayage.
- Moteurs piézoélectriques(systèmes autofocus d'appareils photographiques, mécanismes de vitres électriques de voiture).

L'utilisation de la piézoélectricité a explosé ces dernières années et est en pleine expansion. La capacité de ces matériaux à convertir l'énergie mécanique en énergie électrique et vice versa est une valeur inestimable pour les transducteurs acoustique, l'échographie médicale, et pour la haute précision des pompes et des moteurs. Des performances piézoélectriques élevées ont également ouvert de nouvelles possibilités de "récupération d'énergie", en utilisant le mouvement ambiant et les vibrations pour produire de l'électricité où les piles ou autres sources d'énergie sont impraticables ou indispensables [13, 16].

Cette thèse reprise une contribution à l'analyse de quelque problèmes de contact entre deux corps déformable, en tenant compte l'effet piézoélectrique du matériaux. Sous l'hypothèse des petites transformations, nous étudions des processus quasi statiques pour des matériaux électro-elastiques et termo-électro-viscoélastiques [35]. Notre

étude des phénomènes de contact comprend les étapes suivantes ; la modélisation mathématique, l'analyse variationnelle incluant des résultats d'existence et d'unicité de solution.

Cette thèse est composée de trois parties (quatre chapitre) et structurés de la manière suivante :

Dans la première partie, nous introduisons les outils nécessaires pour une bonne compréhension de l'ouvrage, cette partie et contient deux chapitres.

Dans le premier chapitre, on commence par définir les cadres physiques, les lois de comportement des différents matériaux, les conditions aux limites ainsi que la formulation mécanique des problèmes à étudier. Dans le deuxième chapitre de cette thèse, est dédiée aux définitions élémentaires des notions d'analyses. Nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle concernant les espaces fonctionnels, les opérateurs fortement monotones et Lipschitz, les équations et les 'inéquations variationnelles d'évolution paraboliques, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations et qu'ils sont illustrent de façon intéressante certaines manipulations que l'on peut faire sur notre formulation qui caractérise ce qui nous décrivons dans notre thèse.

Dans la deuxième partie (troisième chapitre), nous étudions un problème de contact électro-élastique avec adhésion et frottement. Nous présentons une formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution en utilisant des techniques de point fixe.

Dans la troisième partie (quatrième chapitre), nous étudions le problème de contact entre deux corps thermo-électro-viscoélastiques avec adhésion et endommagement pour les matériaux piezoélectriques viscoélastiques, nous présentons une formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution, le contenu de cette partie est l'issue pour publication [37].

Notations générales

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels,
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels,
c	Constante réelle strictement positive,
i.e	identiquement égale,
$\partial_i \psi$	dérivée partielle de ψ par rapport à la i^{eme} composante x : $\partial_i \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$,
$\nabla \psi$	Gradient de l'application ψ : $\nabla \psi = (\partial_1 \psi, \dots, \partial_d \psi)$,
$\mathbb{S}^d$	Espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$,
$\text{Div} \psi$	Divergence de l'application, ψ : $\text{Div} \psi = \partial_1 \psi + \dots + \partial_d \psi$,
$(\cdot, \cdot)_X$	Produit scalaire de X ,
$\ \cdot \ _X$	Norme de X ,
p.p.	Presque partout,
Ω^ℓ	Ouvert de $\mathbb{R}^d$,
$\bar{\Omega}^\ell$	Adhérence de Ω^ℓ ,
Γ^ℓ	Frontière de Ω^ℓ : $\Gamma^\ell = \partial \Omega^\ell$,
Γ_i^ℓ	Parties de frontière Γ^ℓ , ($i = 1, 2, 3$) ,
$mes \Gamma_i^\ell$	Mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de Γ_i^ℓ ,
$d\Gamma_i^\ell$	Mesure superficielle sur Γ_i^ℓ ,
ν^ℓ	Normale unitaire sortante à Γ^ℓ ,
v_ν^ℓ, v_τ^ℓ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v_ν^ℓ défini sur $\bar{\Omega}^\ell$,
$L^2(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx < +\infty$,
$\ \cdot \ _{L^2(\Omega^\ell)}$	Norme de $L^2(\Omega^\ell)$ définie par $\ u^\ell \ _{L^2(\Omega^\ell)} = (\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx)^{\frac{1}{2}}$,
$L^\infty(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que, $\exists c > 0 : u^\ell < c$, p.p., sur Ω^ℓ ,

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	Espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ^ℓ ,
H_{Γ^ℓ}	Espace $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell))^d$,
H'_{Γ^ℓ}	Espace dual de H_{Γ^ℓ} .
$C([0, T]; H)$	Espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H ,
$C^1([0, T]; H)$	Espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H ,
$L^p([0, T]; H)$	Espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans H ,
$\ \cdot\ _{L^p([0, T]; H)}$	Norme de $L^p([0, T]; H)$,
$W^{k,p}([0, T]; H)$	Espace de Sobolev de paramètres k et p ,
$\ \cdot\ _{W^{k,p}([0, T]; H)}$	Norme de $W^{k,p}([0, T]; H)$,
$\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 = \Gamma_3$	L'interface de contact entre les corps Ω^1, Ω^2 ,
u^ℓ	Vecteurs des déplacements dans le domaine Ω^ℓ , on écrit u_i^ℓ les composantes du vecteur dans la base canonique,
σ^ℓ	Tenseur des contraintes correspondant au déplacement u^ℓ , on écrit σ_i^ℓ Composantes du tenseur dans la base canonique,
σ_ν^ℓ	Normale des contraintes à la frontière du domaine : $\sigma_\nu^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot \nu^\ell$,
σ_τ^ℓ	Composante tangentielle du champ tensoriel σ^ℓ ,
φ^ℓ	Valeurs des potentiels électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
β	Vecteurs d'adhésion sur la surface de contact Γ_3 ,
D^ℓ	Valeurs des déplacements électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
$\dot{u}^\ell, \ddot{u}^\ell$	Dérivées première et seconde de u^ℓ par rapport au temps,
$\varepsilon(u^\ell)$	Tenseur linéarisé des déformations : $\varepsilon(u^\ell)_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j^\ell + \partial_j u_i^\ell)$.

Première partie

Modélisation et Outils Mathématiques

Chapitre 1

Modélisation

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique où nous allons introduire les cadres physiques utilisés dans cette thèse, nous commençons de rappeler l'équation de mouvement de Cauchy, à décrire les lois de comportement électro-élastiques, viscoélastiques et thermo-électro-viscoélastiques. Par ailleurs nous précisons les conditions aux limites de contact avec frottement avec ou sans adhésion. Ensuite, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, et les théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

1.1 Cadre physique

Les phénomènes de contact considérés dans cette thèse sont décrits par deux cadres physiques suivants ;

Cadre physique n°1 (Problème mécanique). Nous considérons deux corps matériels qui occupent des domaines bornés $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$ ($\ell = 1, 2; d = 2, 3$), avec une frontière régulière $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$, partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3^\ell$, tel que $mes\Gamma_1^\ell > 0$. Nous notons que ν la normale unitaire sortante à Γ les corps est encastrées sur $\Gamma_1^\ell, \ell = 1, 2$ dans une structure fixe. Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité $f_2^\ell, \ell = 1, 2$ et dans Ω agissent des forces volumiques de densités $f_0^\ell, \ell = 1, 2$. Nous supposons f_2^ℓ et $f_0^\ell, \ell = 1, 2$. varient très lentement par rapport au temps et par conséquent le processus est quasi-statique. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de

temps en question (voir Fig. 1.1). Les corps en contact avec frottement avec adhésion sur la partie Γ_3^ℓ . Nous prenons en considération les propriétés mécaniques du corps. Notre objectif sera d'étudier l'évolution de ces propriétés dans le temps.

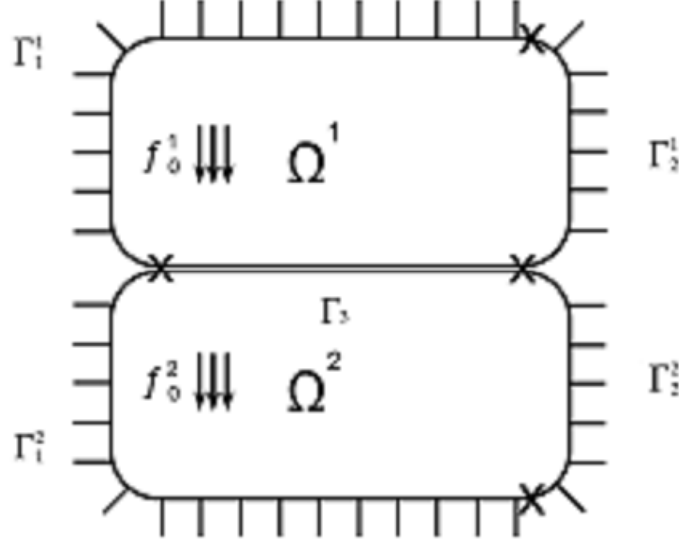


Figure1.1. Cadre Physique 1

Cadre physique n⁰2 (Problème électro-mécanique.)

Nous considérons deux corps matériels qui occupent des domaines bornés $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d (\ell = 1, 2; d = 2, 3)$, avec une frontière régulière $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$, partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3^\ell$, tel que $mes\Gamma_1^\ell > 0$. Nous notons que ν la normale unitaire sortante à Γ les corps est encastrées sur $\Gamma_1^\ell, \ell = 1, 2$ dans une structure fixe. Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité $f_2^\ell, \ell = 1, 2$ et dans Ω agissent des forces volumiques de densités $f_0^\ell, \ell = 1, 2$. (voir Fig. 1.2.). Nous supposons $f_2^\ell, \ell = 1, 2$. et $f_0^\ell, \ell = 1, 2$. varient très lentement par rapport au temps et soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. En plus de l'action des forces des tractions, le corps est soumis à l'action des chaleurs électriques de densité volumiques $q_0^\ell, \ell = 1, 2$ et de chaleurs électriques surface. Pour les décrire, nous considérons une partition de la frontière $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell$ en deux parties mesurables, Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ telles que $mes\Gamma_a^\ell > 0$. Les corps est en contact avec frottant avec adhésion sur la partie Γ_3^ℓ , le potentiel électriques s'annule sur Γ_a^ℓ , et la charges électriques superficielle de densité $q_2^\ell, \ell = 1, 2$. est prescrite sur Γ_b^ℓ . La différence entre le cadre physique mécanique et le cadre physique électro-

mécanique résulte du fait qu' en ce dernier, nous prenons en considération les propriétés mécaniques et aussi les propriétés électriques du corps matériels.

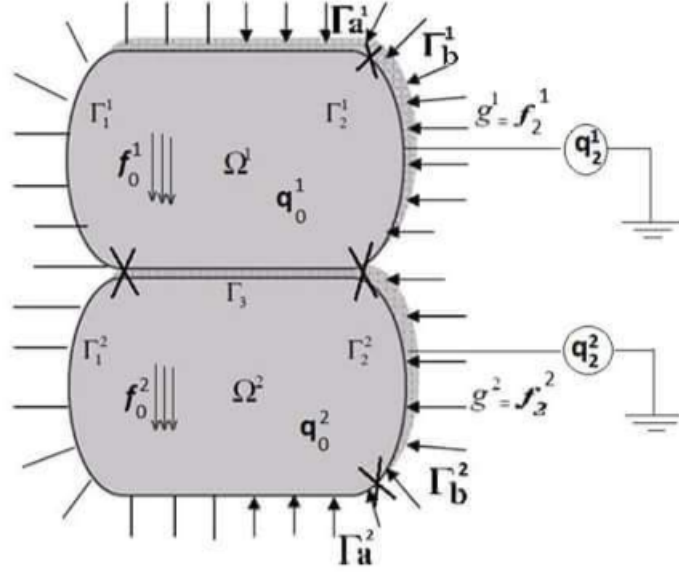


Figure1.2. Cadre Physique 2

Avant d'obtenir les modèles mathématiques qui correspondent aux cadres physiques présentés, voici quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de cette thèse.

Nous désignons par $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), " $\cdot$ " et $|\cdot|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell &= u_i^\ell \cdot v_i^\ell, & \|\mathbf{v}^\ell\| &= (\mathbf{v}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell &= \sigma_i^\ell \cdot \tau_i^\ell, & \|\boldsymbol{\tau}^\ell\| &= (\boldsymbol{\tau}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall \boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell \in \mathbb{S}^d. \end{aligned}$$

Pour chaque élément $\mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell$, nous notons par v_ν^ℓ et $\mathbf{v}_\tau^\ell$ les composantes normale et tangentielle à la frontière définies par :

$$v_\nu^\ell = \mathbf{v}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell, \quad \mathbf{v}_\tau^\ell = \mathbf{v}^\ell - v_\nu^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell. \quad (1.1)$$

Nous désignons par $\boldsymbol{\sigma}^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell(x, t)$ le champ des contraintes, par $\mathbf{u}^\ell = \mathbf{u}^\ell(x, t)$, le champ des déplacements et par $\varepsilon(\mathbf{u}^\ell)$ le champ des déformations infinitésimales.

Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des

fonctions par rapport à $x \in \bar{\Omega}^\ell$ et $t \in [0, T]$.

Pour un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ nous dénotons par σ_ν^ℓ et $\boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell$ les composantes normale et tangentielle à la frontière données par

$$\sigma_\nu^\ell = (\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell) \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell - \sigma_\nu^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell. \quad (1.2)$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell) \cdot \boldsymbol{v}^\ell = \sigma_\nu^\ell v_\nu^\ell + \boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell \cdot \boldsymbol{v}_\tau^\ell, \quad (1.3)$$

qui va intervenir tout au long de cette thèse, dans l'établissement des formulations variationnelles des problèmes mécaniques de contact.

1.1.1 Modèle mathématique

En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps, par exemple

$$\dot{u}^\ell = \frac{du^\ell}{dt}, \quad \ddot{u}^\ell = \frac{d^2u^\ell}{dt^2},$$

où $\dot{u}^\ell$ désigne le champ des vitesses et $\ddot{u}^\ell$ désigne le champ des accélérations.

Pour le champ de vitesses $\dot{u}^\ell$ les notations $\dot{u}_\nu^\ell$ et $\dot{u}_\tau^\ell$ représentent respectivement les vitesses normale et tangentielle à la frontière, c'est à dire $\dot{u}_\nu^\ell = \dot{u}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell$, $\dot{u}_\tau^\ell = \dot{u}^\ell - \dot{u}_\nu^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell$. Rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon^\ell(\boldsymbol{u}^\ell) = (\varepsilon_{ij}^\ell(\boldsymbol{u}^\ell)), \quad \varepsilon_{ij}^\ell(\boldsymbol{u}^\ell) = \frac{1}{2}(\partial_j \boldsymbol{u}_i^\ell + \partial_i \boldsymbol{u}_j^\ell).$$

Notons qu'ici et tout au long de la thèse, un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante à la variable spatiale. Passons maintenant à la description des modèles mathématiques associées aux cadres physiques ci-dessus.

Modèle mathématique n^0 1 le premier modèle mathématique est décrit l'évolution du corps dans le cadre physique n^0 1 (page 2) par l'équation du mouvement de Cauchy :

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell + f_0^\ell = \rho^\ell \ddot{\boldsymbol{u}}^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T]. \quad (1.4)$$

Les processus d'évolution modélés par l'équation précédente s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situation, cette équation peut encore se simplifier : par exemple dans le cas où $\dot{\mathbf{u}}^\ell = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesse $\dot{\mathbf{u}}^\ell$ varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell$ peut être négligé (processus quasi statiques). Dans ces deux cas l'équation du mouvement devient :

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell + f_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T]. \quad (1.5)$$

Puisque le corps Ω^ℓ est encastré sur Γ_1^ℓ , le champ des déplacements s'annule

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1^\ell \times (0, T), \quad (1.6)$$

La condition aux limites en tractions est

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = \mathbf{f}_2^\ell \quad \text{sur} \quad \Gamma_2^\ell \times (0, T). \quad (1.7)$$

Nous allons compléter ultérieurement le modèle mathématique (1.4)-(1.7) par les conditions de contact sur la partie Γ_3 de la frontière.

Modèle mathématique n^02 . Ce modèle mathématique décrit l'évolution des corps dans le cadre physique n^02 .(page 3). A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir les potentiels électriques $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et les champs des déplacements électriques $\mathbf{D}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution des corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques :

$$\text{div} \mathbf{D}^\ell = q_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (1.8)$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\text{div} \mathbf{D}^\ell = \mathbf{D}_{i,i}^\ell$, et q_0^ℓ représente la densité des charges électriques volumiques sur Ω^ℓ . Rappelons que dans les cadres physiques, le potentiel électrique s'annule sur la partie Γ_a^ℓ de la frontière

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a^\ell \times [0, T], \quad (1.9)$$

tandis que sur Γ_b^ℓ , une charge électrique de densité q_2^ℓ est prescrite,

$$\mathbf{D}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur} \quad \Gamma_b^\ell \times [0, T]. \quad (1.10)$$

Ce modèle piézoélectrique (1.4)-(1.10) sera complété ultérieurement par les conditions aux limites sur la surface de contact Γ_3 .

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire le mouvement du corps matériel considéré. Il est nécessaire de décrire ce qui est propre au matériau lui même, c'est l'objet des lois de comportement que nous décrirons dans le deuxième paragraphe de ce chapitre.

1.2 Lois de comportements

Les lois de comportements caractérisent ce qui est propre à chaque type de matériaux. Dans la description des phénomènes purement mécaniques, par la loi de comportement, nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ^ℓ , le tenseur des déformations infinitésimales ε^ℓ et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}^\ell$ et $\dot{\varepsilon}^\ell$, cette définition se modifie légèrement dans la description des phénomènes électromécanique.

Nous devons aussi prendre en considération le champ de déplacement électrique D^ℓ , le champ électrique $E^\ell(\varphi^\ell)$, l'opérateur d'élasticité $\mathcal{E}^\ell$, la fonction de viscosité $\mathcal{A}^\ell$ et la fonction de relaxation $\mathcal{Q}^\ell$ ext..., ceci est naturellement il lui faut ajouté d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de solide. (Corps piézoélectriques, matériaux électro-élastiques, matériaux électro-viscoélastiques, matériaux piézoélectrique-viscoélastiques).

Loi de comportement des matériaux électro-élastiques.

Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes σ^ℓ et le vecteur des déplacements électriques $\mathbf{D}^\ell$ sont reliés par la loi de comportement :

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{E}(\varphi^\ell), \\ \mathbf{D}^\ell = \mathcal{B}^\ell \mathbf{E}(\varphi^\ell) + \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \\ \mathbf{E}(\varphi^\ell) = -\nabla \varphi^\ell, \end{cases} \quad (1.11)$$

où $\mathcal{F}^\ell$ est l'opérateur d'élasticité, non forcément linéaire, à champ électrique nul, $\mathcal{E}^\ell = (e_{ijk}^\ell)$ est le tenseur *piézoélectrique* qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul; $\mathcal{B}^\ell = (b_{ij}^\ell)$ est le tenseur de la permittivité

électrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif et $E^\ell(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell$, où $\nabla\varphi^\ell = (\varphi^\ell_{(:,i)})$ représente le champ électrique. Par ailleurs $(\mathcal{E}^\ell)^* = (e_{ijk}^{\ell,*})$ dénote le transposé du tenseur $\mathcal{E}^\ell$, tel que

$$\mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{v} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}^d, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.12)$$

Pour plus des détails sur les lois de comportement (1.11), nous renvoyons le lecteur à voir par exemple [4, 5].

Loi de comportement électro-élastiques avec mémoire longue.

Dans ce cas la loi de comportement est donnée par

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(s))) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{E}(\varphi^\ell), \\ \mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi^\ell)), \end{cases} \quad (1.13)$$

où $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_{ij})$ est un tenseur de relaxation. Si $\mathcal{Q} = 0$, on retrouve la loi électro-élastique donnée par (1.11).

Loi de comportement thermo-électro-viscoélastiques avec mémoire longue et endommagement.

La loi de comportement d'un matériau thermo-électro-viscoélastique avec mémoire longue et endommagement est donnée par

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) + \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \tau^\ell(t), \varsigma^\ell(t)) + \\ \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(s)), \tau^\ell(s), \varsigma^\ell(s)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\xi^\ell(t)), \\ \mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varsigma^\ell)), \end{cases} \quad (1.14)$$

où $\mathcal{Q}^\ell$ représente une fonction constitutive non linéaire qui décrit le comportement viscoélastique, nous considérons également que $\mathcal{Q}^\ell$ dépend de deux variables internes l'endommagement ς^ℓ et la température absolue τ^ℓ .

La température τ^ℓ est défini par une équation parabolique, qui représente la conservation de l'énergie comme suit

$$\dot{\tau}^\ell - \kappa_0^\ell \Delta \tau^\ell = \Theta^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \tau^\ell, \varsigma^\ell) + \rho^\ell, \quad (1.15)$$

où Θ^ℓ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures. Ici et ci-dessous κ_0^ℓ est une constante strictement positive et ρ^ℓ une donnée, qui représente la source de chaleur du volume.

L'endommagement ς^ℓ est une variable internes d'état définie dans $\Omega^\ell \times [0, T]$, avec $0 \leq \varsigma^\ell \leq 1$: L'évolution du champ d'endommagement utilisée au quatrième chapitre est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation :

$$\dot{\varsigma}^\ell - \kappa^\ell \Delta \varsigma^\ell + \partial\psi_{K^\ell}(\varsigma^\ell) \ni \Psi^\ell(\sigma^\ell - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell), \varepsilon(u^\ell), \varsigma^\ell), \quad (1.16)$$

où κ^ℓ est une constante positive, Ψ^ℓ est la fonction source de l'endommagement, $\partial\psi_{K^\ell}$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice ψ_{K^ℓ} et K^ℓ est l'ensemble des endommagements admissibles défini par

$$K^\ell = \{\alpha \in H^1(\Omega^\ell); 0 \leq \alpha \leq 1, \quad p.p. \text{ dans } \Omega^\ell\}. \quad (1.17)$$

Nous utilisons la loi de comportement des matériaux thermo-électro-viscoélastiques avec mémoire longue et endommagement dans le quatrième chapitre dans cette thèse.

Nous passons maintenant aux conditions aux limites utilisées dans le troisième et quatrième chapitres .

1.3 Conditions aux limites

Définissons maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ^ℓ . (voir Fig.1)

1.3.1 La condition aux limites de déplacement

Les Corps est encastré dans une position fixe sur la partie $\Gamma_1^\ell \times [0, T]$, le champ des déplacements $\mathbf{u}^\ell$ est par conséquent nul :

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times [0, T]. \quad (1.18)$$

1.3.2 La condition aux limites de traction.

Une traction surfacique de densité f_2^ℓ agit sur $\Gamma_2^\ell \times [0, T]$ et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma^\ell \nu^\ell$ satisfait :

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times [0, T]. \quad (1.19)$$

1.3.3 Les conditions aux limites électriques.

Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations :

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T], \quad (1.20)$$

$$\mathbf{D}^\ell \nu^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T]. \quad (1.21)$$

1.3.4 Conditions aux limites de contact.

Les conditions aux limites sur la surface de contact sont décrites à la fois en direction de la normale et dans le plan tangent, ces dernières étant appelées condition de frottement. En direction de la normale nous pouvons distinguer le contact unilatéral (lorsqu'il ne peut y'avoir d'interpénétration entre les deux corps), bilatéral (lorsqu'il n'y a pas de séparation entre les deux corps), de compliance normale (lorsque la surface de contact est déformable) où bien de réponse normale instantanée (lorsque la surface de contact est lubrifiée). A part le cas limite lorsque la contrainte tangentielle est nulle (le cas sans frottement), le frottement peut être à seuil (quand le glissement se produit que lorsque la force de frottement atteint une valeur critique) ou sans seuil (lorsque le glissement se produit pour n'importe quelle force de frottement). Parmi les lois de frottement à seuil, les plus utilisées dans la littérature sont celles de Coulomb et de Tresca ; elles modélisent un frottement sec, alors que les lois de frottement sans seuil modélisent un frottement lubrifié. On définit le déplacement normal par relatif d' un corps par rapport à l' autre sur la zone de contact Γ_3 par

$$[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2, \quad (1.22)$$

et le déplacement tangent par relatif d' un corps par rapport à l' autre sur la zone de contact Γ_3 par

$$[\mathbf{u}_\tau] = \mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2. \quad (1.23)$$

. La continuité des contraintes sur l'inter faces Γ_3 se traduit par :

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\tau \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.24)$$

Conditions aux limites de contact de Signorini.

La condition de contact *non-pénétration* entre les deux corps est exprimée par la relation suivante :

$$[u_\nu] \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.25)$$

Aux point de Γ_3 tels que $[u_\nu] < 0$, il y' a séparation entre les deux corps. Les contraintes normales y sont alors nulles. Par conséquent, on a :

$$[u_\nu] < 0 \Rightarrow \sigma_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.26)$$

Aux point de Γ_3 tels que $[u_\nu] = 0$, le contact est maintenu et chaque corps exerce une réaction normale orienté vers l'autre corps et donc nous pouvons écrire

$$[u_\nu] = 0 \Rightarrow \sigma_\nu \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.27)$$

On dit que le contact entre les deux corps sans frottement si les mouvements tangentiels sont libres, ce qui traduit par :

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.28)$$

Pour résumer, les conditions de contact (1.22)-(??) s'écrivent d'une manière combinée de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \quad \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \stackrel{\text{noté}}{\equiv} \sigma_\nu \\ (b) : \quad [u_\nu] \leq 0, \sigma_\nu \leq 0, [u_\nu]\sigma_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \\ (c) : \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 = 0 \end{array} \right. \quad (1.29)$$

Les conditions aux limites de la forme (1.29) sont aussi appelés "*conditions de contact unilatéral*" ou bien "*conditions de contact de Signorini*".

Contact avec compliance normale.

Dans ce cas, la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale σ_ν^ℓ satisfait la condition dite de compliance normale

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \\ -\sigma_\nu = p_\nu([u_\nu] - g), \end{cases} \quad (1.30)$$

où g représente l'interstice entre les deux corps et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale.

Cette condition indique que un corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u_\nu] - g$. Précisons que dans les chapitres 3 et 4 de cette thèse, nous considérons le cas d'un corps repose sur l'autre corps, c'est-à-dire, l'interstice est nul, $g = 0$. Pour la fonction de compliance normale p_ν on prend comme exemple la fonction suivante

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+, \quad (1.31)$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha, \end{cases} \quad (1.32)$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (1.30) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

Maintenant, nous présentons les lois de frottement intervenant dans cette thèses

Contact sans frottement

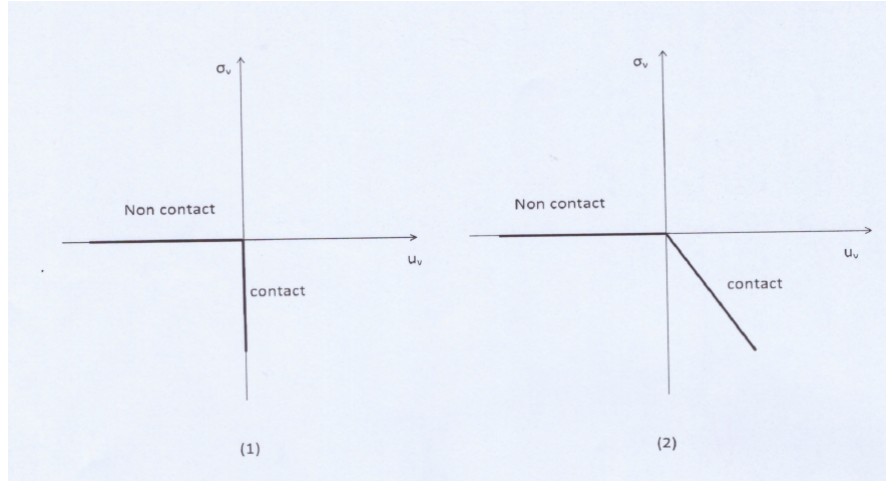
Dans un contact sans frottement, l'action mécaniques transmissible par obstacle entre deux solides ne peut être en tout point que normale au contact .

Ceci se traduit par la relation

$$\sigma_\tau = 0$$

qui signifie que la contrainte tangentielle est nulle.

Dans le cas où la contrainte tangentielle est nulle on dit que le mouvement tangentielle se produit avec frottement ce qui nous oblige à introduire une loi de frottement qui prend en considération la composante tangentielle avec les autres variables du système.



Figure(1.2) –Loi de Coulomb (1) et sa régularisation(2).

1.3.5 Loi de frottement de type Coulomb.

C'est une des lois de frottement les plus répandues dans la littérature mathématique. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer comme suit :

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu|\sigma_\nu|, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow [\mathbf{u}_\tau] = 0, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda[\mathbf{u}_\tau], \end{cases} \quad (1.33)$$

où $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement. C'est une version statique de la loi de Coulomb qui intervient dans la description du contact frottant des problèmes étudiés dans le chapitre 3 et le chapitre 4 de cette thèse.

Maintenant, nous remplaçons le seuil de frottement σ_ν de la loi (1.33), par la

condition de compliance normale (1.30), de façon à obtenir les conditions suivantes.

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu p_\nu([u_\nu] - g), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < \mu p_\nu([u_\nu] - g) \Rightarrow [\mathbf{u}_\tau] = 0, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = \mu p_\nu([u_\nu] - g) \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda[\mathbf{u}_\tau]. \end{cases} \quad (1.34)$$

Dans le chapitre 3 nous utilisons la loi (1.34) avec le cas particulier g , i.e. lorsque l'interstice est nul, ce choix ne représente guère une restriction du point de vue mécanique, mais il est imposé pour raison de simplification des calculs.

Une version quasi statique de la loi de frottement de Coulomb utilisée en littérature est donnée par

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq p_\tau([u_\nu] - g), \\ [\mathbf{u}_\tau] \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_\tau = -p_\tau([u_\nu] - g) \frac{[\mathbf{u}_\tau]}{\|[\mathbf{u}_\tau]\|}, \end{cases} \quad (1.35)$$

où p_τ est une fonction positive. Dans (1.35), la contrainte tangentielle ne peut pas excéder le seuil de frottement $p_\tau([u_\nu] - g)$.

De plus, quand le seuil de frottement est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement. Cette condition de frottement a été utilisée dans différents papiers.

1.3.6 Lois de contact avec frottement et adhésion

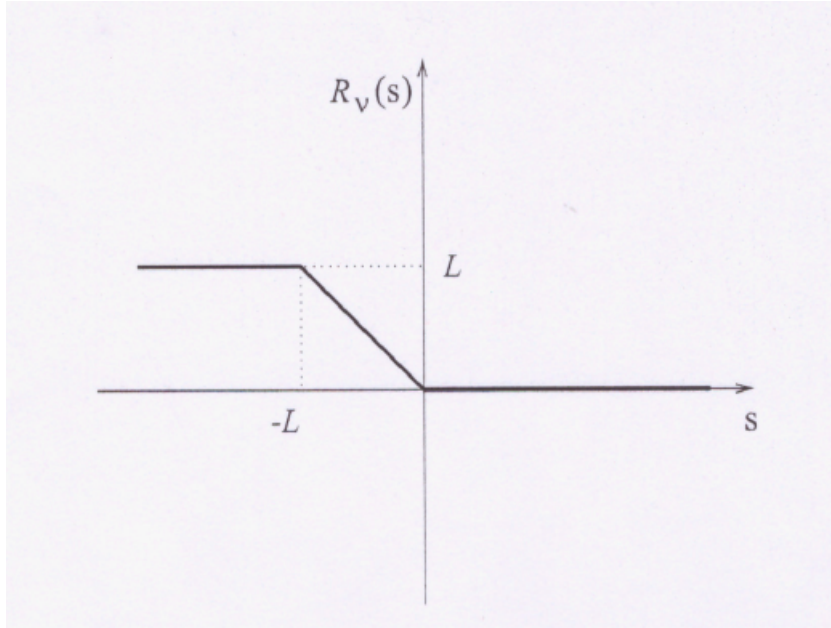
On va décrire la condition de contact avec compliance normale et adhésion sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, on introduit une variable interne d'état définie sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion, et quand $0 < \beta < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens. Pour plus détails sur ce section, on renvoie par exemple [12]. On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale avec adhésion :

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.36)$$

où σ_ν est le déplacement normal, γ_ν est un coefficient positif, $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée appelée fonction de compliance normale, et la fonction $R_\nu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature donné par :

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s \leq -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0. \end{cases} \quad (1.37)$$

Ici $L > 0$ est longueur caractéristique des liens. La condition (1.36) indique que chaque corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u]$, où le deuxième terme de l'égalité est la contribution de l'adhésion à la tension de surface. Notons que la condition de compliance normale avec adhésion (1.36) a été déjà utilisée dans [[11], [20]].



Figure(1.3) -représentation graphique de l'opérateur de traction R_ν .

Quand le champ d'adhésion β est nul, (1.36) devient :

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.38)$$

qui représente la condition de compliance normale.

Ensuite, nous supposons que la composante tangentielle satisfait la condition suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\tau, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \leq \mu p_\nu([u_\nu]), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| < \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow [\mathbf{u}_\tau] = 0 \quad \text{on } \Gamma_3 \times (0, T), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| = \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{telle que } \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) = -\lambda [\mathbf{u}_\tau] \end{array} \right. \quad (1.39)$$

où γ_τ est un coefficient positif et μ est le coefficient de frottement, supposé être positif. $\mathbf{R}_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ est l'opérateur de troncature défini par :

$$\mathbf{R}_\tau(\mathbf{v}) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{si } \|\mathbf{v}\| \leq L, \\ L \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} & \text{si } \|\mathbf{v}\| > L. \end{cases} \quad (1.40)$$

Notons que les conditions de frottement similaires à ceux dans (1.39) ont été considérées dans [19] dans le cas particulier $\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) = [\mathbf{u}_\tau]$ et $R_\nu([u_\nu]) = -[u_\nu]$, pour L très grand.

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différentes. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme :

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu([u_\nu])^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\|^2) - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.41)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.42)$$

Où γ_ν, γ_τ et ϵ_a sont coefficients d'adhérence positifs, et $[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2$, le déplacement tangent relatif de corps Ω^1 par rapport l'autre corps Ω^2 sur la zone de contact, et β_0 l'adhésion initiale, tel que :

$$0 \leq \beta_0 \leq 1, \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (1.43)$$

Sous les conditions (1.41)- (1.43), on a la remarque suivante :

Remarque 1.3.1 : *Nous remarquons que sous les trois conditions précédentes le champ d'adhésion vérifie la restriction $0 \leq \beta \leq 1$. En effet, puisque $\dot{\beta} \leq 0$ donc $\beta \leq \beta_0 \leq 1$. En outre, si $\beta = 0$ quand $t = t_0$, donc $\dot{\beta} = 0$ pour tout $t \geq t_0$ et d'où $\beta = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. $x \in \Gamma_3$. Alors, nous concluons que $0 \leq \beta \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$ p.p. $x \in \Gamma_3$.*

Chapitre 2

Outils Mathématiques

Ce chapitre est consacré à la disription des espaces utilisés dans cette thèse.

Nous supposons que Ω^ℓ est un domaine borné et de lipschitzien de $\mathbb{R}^d$, ($d = 2, 3$), c'est à dire que sa frontière Γ^ℓ est présentable comme le graphe d'une fonction lipschitzienne sur un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$ avec une partitions de trois parties mesurables disjointes $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3^ℓ d'un coté et une partition de $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell$, en deux parties ouvertes Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ d'un autre coté, telles que $mes\Gamma_1^\ell > 0$ et $mes\Gamma_a^\ell > 0$.

2.1 Contraction

Le principe de contraction de Banach est le résultat le plus élémentaire dans la théorie du point fixe . En analyse ces théorèmes se relèvent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de résolution des equations différentielles. Le théorème de point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tend vers un point fixe. En définit quelque définitions qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet des critère de théorème du point fixe de contraction.

Définition 2.1.1 Soit (X, d) un espace métrique, une application $f : X \longrightarrow X$ est dite lipschitzienne de rapport $k \geq 0$ si ;

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in X$$

k est dite constante de Lipschitz.

Définition 2.1.2 Soit (X, d) un espace métrique, une application $f : X \longrightarrow X$ est dite 1- lipschitzienne si $k = 1$ et

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in X$$

et l'application f est dite non expansive.

Définition 2.1.3 L'application lipschitzienne f est appelée.

1. non expansive si $k \leq 1$,
2. contraction si $0 < k < 1$.

Théorème 2.1.1 Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une contraction avec k sa constante de Lipschitz. Alors f admet un unique point fixe $u \in X$.

En outre, pour tout $x \in X$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = u$$

$$d(f^n(x), u) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(x, f(x)).$$

Maintenant il nous est paru nécessaire de présenter quelque espaces, quelque résultats sur les opérateurs fortement monotones et Lipschitzien, les inéquations variationnelles et dévolution.

2.2 Espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_H$ un produit scalaire sur H c'est-à-dire $(\cdot, \cdot)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\| \cdot \|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\| u \|_H = (u, u)_H^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

et on rappelle que $\| \cdot \|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|(u, v)_H| \leq \| u \|_H \| v \|_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (2.2)$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme défini par (2.1). Soit H' l'espace dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme :

$$\| \eta \|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{\langle \eta, v \rangle_{H' \times H}}{\| v \|_H},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ représente la dualité entre H' et H .

Théorème 2.2.1 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet) : Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual. Alors, pour tout $\phi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H.$$

De plus

$$\| \phi \|_{H'} = \| f \|_H.$$

L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' .

2.3 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 2.3.1 (Espace de Lebesgue). Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble ,

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } |v|^p \text{ lebesgue integrable sur } \Omega\}.$$

C'est un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$ et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, mesurable.

Alors on définit $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ par :

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |v(x)| = \inf \{c; |v(x)| \leq c\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

Définition 2.3.2 Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. On dit qu'une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $u \circ I_K \in L^p$ pour tout $\forall K \subset \Omega$ où I_K représente l'application identité de K .

Théorème 2.3.1 . Pour tout $p \in [1, +\infty[$, les espaces $L^p(\Omega)$ vérifient les assertions suivantes ;

- 1) Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach.
- 2) Pour toute fonction $u \in L^p(\Omega)$, toute $v \in L^q(\Omega)$ l'inégalité de Hölder est vérifiée ;i.e

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}, \text{ avec } \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

- 3) les espaces $L^2(\Omega)$ sont des espaces séparables pour $[1, +\infty[$.

- 4) L'espace $L^2(\Omega)$ munit de produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

est un espace de Hilbert. De plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz correspondant à l'inégalité de Hölder est vérifiée :i.e.

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

2.4 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre plusieurs problèmes concernant les équations aux dérivées partielles.

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega) \ i = 1, \dots, d\}.$$

On note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espaces de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée :

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \text{ et on écrit } \| u \|_{H^1(\Omega)}^2 = \| u \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On a les résultats suivants :

$$C^1(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème 2.4.1 (*Rellich*)

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

Théorème 2.4.2 (*trace de Sobolev*)

Il existe une application linéaire et continue $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\delta u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 2.4.1 L'espaces $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représenté l'espaces de fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle dT . L'application δ s'appelle application de trace, elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ définir pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 2.4.2 On note que l'application de trace $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compact.

Définition 2.4.1 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_{\alpha} \in L^p(\Omega), \text{ tel que } v_{\alpha} = D^{\alpha} u \}.$$

Remarque 2.4.3 Nous avons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^{\alpha} u$ et v_{α} .

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} (\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^{\alpha} u \|_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \| D^{\alpha} u \|_{L^{\infty}(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

Théorème 2.4.3 *Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, munis de la norme $\|\cdot\|$, sont des espaces de Banach. De plus, les espaces $H^k(\Omega)$, pour tout k entier, sont des espaces de Hilbert.*

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le [5].

2.5 Espaces fonctionnels

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques $\mathbf{u}^\ell$ et $\boldsymbol{\sigma}^\ell$:

$$\begin{cases} H^\ell = \{\mathbf{u}^\ell = (u_i^\ell) & | & u_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\} = (L^2(\Omega^\ell))^d, \\ \mathcal{H}^\ell = \{\boldsymbol{\sigma}^\ell = (\sigma_{ij}^\ell) & | & \sigma_{ij}^\ell = \sigma_{ji}^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\} = (L_s^2(\Omega^\ell))^{d \times d}, \\ H_1^\ell = \{\mathbf{u}^\ell = (u_i^\ell) & | & u_i^\ell \in H^1(\Omega^\ell)\} = (H^1(\Omega^\ell))^d, \\ \mathcal{H}_1^\ell = \{\boldsymbol{\sigma}^\ell \in \mathcal{H}^\ell & | & \sigma_{ij,j}^\ell \in H^\ell\}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Les espaces $H^\ell, \mathcal{H}^\ell, H_1^\ell$ et $\mathcal{H}_1^\ell$ sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires suivants :

$$\begin{cases} (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Omega^\ell} u_i^\ell v_i^\ell dx, \\ (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \sigma_{ij}^\ell \tau_{ij}^\ell dx, \\ (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H_1^\ell} = (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} + (\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \\ (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}_1^\ell} = (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \text{Div} \boldsymbol{\tau}^\ell)_{H^\ell}, \end{cases} \quad (2.4)$$

respectivement, où $\varepsilon : H_1^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell$ et $\text{Div} : \mathcal{H}_1^\ell \rightarrow H^\ell$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(\mathbf{u}^\ell) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\ell)), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\ell) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\ell + u_{j,i}^\ell), \quad \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell = (\sigma_{ij,j}^\ell).$$

Les normes sur les espaces $H^\ell, \mathcal{H}^\ell, H_1^\ell$ et $\mathcal{H}_1^\ell$ sont notées par $\|\cdot\|_{H^\ell}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}^\ell}, \|\cdot\|_{H_1^\ell}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^\ell}$, respectivement.

Puisque la frontière Γ^ℓ est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur $\boldsymbol{\nu}^\ell$ à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $\mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell$ nous utilisons la notation $\mathbf{v}^\ell$ pour désigner la trace $\gamma \mathbf{v}^\ell$ de $\mathbf{v}^\ell$ sur Γ^ℓ .

Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1^\ell \rightarrow L^2(\Gamma^\ell)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective.

Désignons par H_{Γ^ℓ}' le dual de H_{Γ^ℓ} et $(\cdot, \cdot)$ le produit de dualité entre H_{Γ^ℓ}' et H_{Γ^ℓ} . Pour tout $\boldsymbol{\sigma}^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, il existe un élément $\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \in H_{\Gamma^\ell}'$ tel que :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell, \gamma \mathbf{v}^\ell) = (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell. \quad (2.5)$$

En outre, si $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell, \gamma \mathbf{v}^\ell) = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell da \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell. \quad (2.6)$$

Donc, pour $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ assez régulier nous avons la formule de Green suivante :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell da \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell, \quad (2.7)$$

où da est un élément de mesure de surface.

Nous définissons le sous-espace fermé de H_1^ℓ

$$\mathbf{V}^\ell = \{ \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell \mid \mathbf{v}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \}. \quad (2.8)$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur $\mathbf{V}^\ell$; alors, il existe une constante $c_k > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_1^ℓ telle que

$$\| \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) \|_{\mathcal{H}^\ell} \geq c_k \| \mathbf{v}^\ell \|_{H_1^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell. \quad (2.9)$$

Nous considérons sur l'espace $\mathbf{V}^\ell$, le produit scalaire donné par

$$(\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{\mathbf{V}^\ell} = (\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell, \quad (2.10)$$

et soit $\| \cdot \|_{\mathbf{V}^\ell}$ la norme associée, i.e.

$$\| \mathbf{v}^\ell \|_{\mathbf{V}^\ell} = \| \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) \|_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell. \quad (2.11)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\| \cdot \|_{H_1^\ell}$ et $\| \cdot \|_{\mathbf{V}^\ell}$ sont des normes équivalentes sur $\mathbf{V}^\ell$ et ainsi $(\mathbf{V}^\ell, \| \cdot \|_{\mathbf{V}^\ell})$ est un espace de Hilbert.

De plus, en utilisant le Théorème de trace de Sobolev, (2.7) et (2.8), il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ , Γ_1^ℓ et Γ_3 telle que :

$$\| \mathbf{v}^\ell \|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \| \mathbf{v}^\ell \|_{\mathbf{V}^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell. \quad (2.12)$$

Pour une fonction scalaire β , qui représente le champ d'adhésion sur la surface Γ_3 du contact, nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{Q} = \{\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid 0 \leq \beta(t) \leq 1 \text{ sur } \Gamma_3\}. \quad (2.13)$$

On introduit également les espaces suivants :

$$W^\ell = \{\xi^\ell \in H^1(\Omega^\ell) \mid \xi^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell\},$$

$$\mathcal{W}^\ell = \{\mathbf{D}^\ell = (D_i^\ell) \mid D_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell), D_{i,i}^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\},$$

où $\text{div} D^\ell = (D_{i,i}^\ell)$. Ces espaces W^ℓ et $\mathcal{W}^\ell$ sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$(\varphi^\ell, \xi^\ell)_{W^\ell} = (\nabla \varphi^\ell, \nabla \xi^\ell)_{H^\ell}, \quad (\mathbf{D}^\ell, \mathbf{E}^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} = (\mathbf{D}^\ell, \mathbf{E}^\ell)_{H^\ell} + (\text{div} \mathbf{D}^\ell, \text{div} \mathbf{E}^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad (2.14)$$

soient $\|\cdot\|_{W^\ell}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^\ell}$ les normes associées ; c'est-à-dire

$$\|\xi^\ell\|_{W^\ell} = \|\nabla \xi^\ell\|_{H^\ell}, \quad \|\mathbf{D}^\ell\|_{\mathcal{W}^\ell}^2 = \|\mathbf{D}^\ell\|_{H^\ell}^2 + \|\text{div} \mathbf{D}^\ell\|_{L^2(\Omega^\ell)}^2. \quad (2.15)$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_a^\ell) > 0$, l'inégalité de Friedrich-Poincaré est vérifiée ainsi il existe une constante $c > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_a^ℓ telle que

$$\|\nabla \xi^\ell\|_{H^\ell} \geq c \|\xi^\ell\|_{H^1(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi^\ell \in W^\ell. \quad (2.16)$$

Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré trouvé dans [14].

Il s'ensuit de (2.16) que $\|\cdot\|_{H^1(\Omega^\ell)}$ et $\|\cdot\|_{W^\ell}$ sont des normes équivalentes sur W^ℓ et donc $(W^\ell, \|\cdot\|_{W^\ell})$ est un espace réel de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $\tilde{c}_0^\ell$ dépendant uniquement de Ω^ℓ , Γ_a^ℓ et Γ_3 , telle que

$$\|\xi^\ell\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0^\ell \|\xi^\ell\|_{W^\ell}, \quad \forall \xi^\ell \in W^\ell. \quad (2.17)$$

Afin de simplifier les notations, nous définissons les espaces produits :

$$V = V^1 \times V^2, \quad H = H^1 \times H^2, \quad H_1 = H_1^1 \times H_1^2,$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2, \quad W = W^1 \times W^2, \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}^1 \times \mathcal{W}^2,$$

les espaces $V, W, \mathcal{W}$ sont des espaces de Hilbert réel dotés des produits scalaires canoniques notée

$(\cdot, \cdot)_V, (\cdot, \cdot)_W, (\cdot, \cdot)_\mathcal{W}$.

Les normes associés seront désignés par $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W, \|\cdot\|_\mathcal{W}$, respectivement.

On rappelle les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel.

Nous notons par $C([0, T], X)$ et $C^1([0, T], X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ avec valeur sur X , respectivement, avec les normes :

$$\|f\|_{C([0, T], X)} = \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X,$$

$$\|f\|_{C^1([0, T], X)} = \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X + \max_{t \in [0, T]} \|\dot{f}(t)\|_X.$$

Nous notons par $C_c([0, T], X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $[0, T]$ à valeurs dans X .

Définition 2.5.1 Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c([0, T], X)$ telle que $\|f_n(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $t \in [0, T] \setminus E$.

2.5.1 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

I-Opérateur fortement monotone

Nous donnons quelques définitions et propriétés sur les opérateurs non linéaires et les formes bilinéaires dans un espaces de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$.

Définition 2.5.2 Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non-linéaire. L'opérateur A est dit

(1) monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X; \quad (2.18)$$

(2) fortement monotone si il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X; \quad (2.19)$$

(3) Lipschitzien si il existe $M > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (2.20)$$

II- Inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution

La modélisation de plusieurs classes de problèmes physiques conduit aux inégalités variationnelles elliptiques ou d'évolution, dans la fonctionnelles non différentiable dépend de la solution elle Ces dernières sont appelées " inégalités quasi-variationnelles". Pour cela, nous nous considérons un espaces de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$, soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur non-linéaire et la fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Compte tenu de ces données, nous considérons l'inégalité quasi-variationnnelle suivante :

$$(Au, u - v)_X + j(u, v) + j(u, u) \geq (f, u - v)_X \quad \forall v \in X. \quad (2.21)$$

Pour résoudre cette inéquation, nous supposons que A fortement monotone et Lipschitzien, c'est à dire A , satisfait à (2.18), (2.19) et la fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Pour tout } \eta \in X, j(\eta, \cdot) \text{ est convexe et s.c.i. sur } X, \\ (b) \text{ Il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ j(u_1, v_1) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

L'existence et l'unicité d'une solution au problème (2.21) est donnée par le résultat suivant.

Théorème 2.5.1 *Supposons que les hypothèses (2.19), (2.20), et (2.22) sont satisfaites. Alors $\alpha < m$, pour tout $f \in X$, il existe une solution unique $u \in X$ au problème (2.21).*

La démonstration du Théorème se trouve dans [21]. Dans le quatrième chapitre dans cette thèse, nous utiliserons un résultat abstrait sur les inéquations quasi-variationnelles d'évolution. Ce résultat concerne les problèmes du type suivant,

Trouver, $u : [0, T] \longrightarrow X$ tel que

$$(A\dot{u}(t), v - \dot{u}(t))_X + (Bu(t), v - \dot{u}(t))_X + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X, \quad (2.23)$$

$\forall v \in X, t \in [0, T].$,

$$u(0) = u_0. \quad (2.24)$$

La différence entre le problème (2.21) et le problème (2.23)-(2.24) consiste dans le fait que le dernier problème est évolutif. En effet, f et u dépendent maintenant du temps. Pour étudier le problème (2.23)-(2.24), en plus des hypothèses (2.18), (2.19), la fonctionnelle j satisfait (2.22), nous avons besoin de que l'opérateur non linéaire B soit Lipschitz, et aussi supposons que ;

$$f \in C([0, T], X), \quad (2.25)$$

$$u_0 \in X. \quad (2.26)$$

Dans l'étude de problèmes (2.23)-(2.24), nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.5.2 *Soient (2.19), (2.20), (2.22) et (2.25)-(2.26) satisfaites avec l'opérateur non linéaire B soit Lipschitzien. Alors :*

- 1) *Il existe unique solution $u \in C^1([0, T]; X)$ au problème (2.23)-(2.24).*
- 2) *Si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (2.23)-(2.24) correspondantes aux données $f_1, f_2 \in C([0, T]; X)$, alors il existe $c > 0$ tel que ;*

$$\| \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \|_X \leq c(\| f_1(t) - f_2(t) \|_X + \| u_1(t) - u_2(t) \|_X) \quad \forall t \in [0, T].$$

- 3) *Si de plus $f \in W^{1,p}(0, T, X)$ pour $p \in [1, \infty)$, alors la solution $u \in W^{2,p}(0, T, X)$.*

Théorème 2.5.3 (Théorème de point fixe de Banach) *Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \| \cdot \|_X)$. Supposons que $\Lambda : K \rightarrow K$ est une contraction, c'est à dire il existe $c \in]0, 1[$ telle que*

$$\| \Lambda(u) - \Lambda(v) \|_X \leq c \| u - v \|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$; i.e, possède un point fixe unique dans K .

Pour l'opérateur $\Lambda^m : K \rightarrow K$ défini par la relation

$$\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1}) \quad m \geq 2,$$

nous avons la version suivante du théorème de point fixe.

Théorème 2.5.4 *Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \| \cdot \|_X)$. Supposons que $\Lambda^m : K \rightarrow K$ est une contraction pour m un entier positif. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .*

Définition 2.5.3 Une forme bilinéaire $b : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\|b(u, v)\|_X \leq M \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 2.5.4 Une forme bilinéaire $b : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que :

$$b(u, u) \geq m \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

Théorème 2.5.5 (Théorème du Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert, $b : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercitive.

Soit $l : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique $u \in H$ qui satisfait :

$$b(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H. \quad (2.27)$$

De plus, si $b(\cdot, \cdot)$ est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété :

$$\frac{1}{2}b(u, u) - l(u) \leq \frac{1}{2}b(v, v) - l(v), \quad \forall v \in X. \quad (2.28)$$

III- Sous différentiabilité

Nous considérons dans tout ce paragraphe que X est un espace de Hilbert et K un sous ensemble de l'espace X .

Définition 2.5.5 On appelle fonction indicatrice de K , la fonction Ψ_K définie par

$$\Psi_K = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K, \\ +\infty & \text{si } u \notin K. \end{cases}$$

Définition 2.5.6 Soit une fonction $j : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et u un élément de l'espace X tel que $j(u) \neq \pm\infty$. Le sous-différentiel de la fonction j en u , noté $\partial j(u)$ est l'ensemble défini par

$$\partial j(u) = \{u' \in X' \mid j(v) \geq j(u) + (u', v - u), \forall v \in K\}. \quad (2.29)$$

Le crochet $(\cdot, \cdot)$ désignant la dualité entre X' et X .

Tout élément u' de l'ensemble $\partial j(u)$ est appelé sous-gradient de la fonction j en u . La fonction j est dite sous-différentiable en u si $\partial j(u) \neq \emptyset$. Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X .

Nous pouvons caractériser le sous-différentiel $\partial \Psi_K$ d'une fonction indicatrice Ψ_K d'un ensemble convexe non vide.

$$\partial \Psi_K = \{u' \in X' \mid (u', v - u) \leq 0, \forall v \in K\}. \quad (2.30)$$

IV- Équation différentielle ordinaire

Théorème 2.5.6 (Cauchy-Lipschitz) : Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $[0, T]$, qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X, \text{ p.p. } t \in [0, T]; \\ (b) \text{ il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que} \\ F(\cdot, x) \in L^p([0, T]; X) \quad \forall x \in X. \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}([0, T]; X)$ tel que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \text{ p.p. } t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0.$$

V- Inégalités variationnelle paraboliques

Soit V et H deux espaces de Hilbert tel que V est dense dans H et son injection est continue. L'espace H est identifié à son propre dual et à un sous-espace du dual V' de V . Nous écrivons $V \subset H \subset V'$ et on dit que les inclusions ci-dessus définissent un triple de Gelfand. Nous désignons par $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_H$ et $\|\cdot\|_{V'}$ les normes sur les espaces V, H et V' respectivement, et nous utilisons $V \times V'$ pour l'appariement de dualité entre V et V' . Notez que si $f \in H$ alors $\langle f, v \rangle_{V \times V'} = (f, v)_H, \quad \forall v \in H$. se qui suit est un résultat standard pour les inégalités variationnelles paraboliques.

Théorème 2.5.7 Soit $V \subset H \subset V'$ un triple de Gelvand ,soit K un non-vide ensemble fermé et convexe de V . Supposons que $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue forme bilinéaire symétrique telle que pour certaines constantes $\alpha > 0$ et c_0 ,

$$a(v, v) + c_0 \|v\|_H^2 \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T, H)$, il existe une fonction unique $u \in H^1(0, T, H) \cap L^2(0, T, V)$ tel que $u(0) = u_0$ et $u(t) \in K$, $\forall t \in [0, T]$ et pour presque tout $t \in (0, T)$.

$$\langle \dot{u}(t), v - u(t) \rangle_{V \times V} + a(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_H \quad \forall v \in K.$$

2.5.2 Lemme de Gronwall

Nous rappelons ici le lemme du type Gronwall qui intervient dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 2.5.1 Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$

(1) Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq (a + \int_0^t m(s) ds) \exp\left(\int_0^t n(s) ds\right) \quad \forall t \in [0, T],$$

(2) Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s) ds \leq e^{at} \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $a = 0$, $n = 1$, la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 2.5.1 Soient $m \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Si $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq \int_0^t m(s) ds + \int_0^t \psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors, il existe $c > 0$ tel que

$$\psi(t) \leq \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Le Corollaire est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution.

Dans le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient,

Corollaire 2.5.2 Soient $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Si $a \geq 0$ et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que ;

$$\psi(t) \leq (a + \int_0^t n(s)\psi(s)ds) \quad \forall t \in [0, T],$$

alors.

$$\psi(t) \leq (a) \exp(\int_0^t n(s)ds) \quad \forall t \in [0, T].$$

Le corollaire précédent est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution de façon suivante. En supposant qu'il existe deux solution, en notant par ψ la norme de la différence entre ces solution, on essaie ensuite de majorer ψ sous la forme

$$\psi(t) \leq \int_0^t n(s)\psi(s)ds. \quad \forall t \in [0, T]$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$.

L'application du corollaire donne immédiatement la nullité de ψ .

Deuxième partie

Problème de Contact Entre Deux Corps Électro-élastiques avec Adhésion

Chapitre 3

Problème de Contact Entre Deux Corps Électro-élastiques avec Adhésion

Dans ce chapitre, nous considérons un modèle mathématique dans un processus quasi-statique d'un problème de contact avec compliance normale et adhésion entre deux corps électro-élastiques, où les inconnues dans ce cas, sont les champs des déplacements u^ℓ , les champs des contraintes σ^ℓ , les potentiels électriques φ^ℓ , un champ d'adhésion β , et les champs des déplacements électriques $\mathbf{D}^\ell$, avec la loi de comportement électro-élastiques non linéaire. Pour ce problème le contact est modélisé par l'adhésion dont l'évolution est décrite par une équation différentielle ordinaire du premier ordre. En utilisant les formules de Green, on propose une formulation variationnelle au problème électro-mécanique puis nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution. Les démonstrations sont basées sur des arguments d'inégalités quasi-variationnelles dépendant du temps du type elliptiques, ainsi la théorie des équations d'évolutions du premier ordre avec des opérateurs non linéaires, et de point fixe.

3.1 Formulation du problème

Nous décrivons le modèle mathématique du processus quasi-statique, nous présentons sa formulation variationnelle, le cadre physique est le suivant : Considérons deux corps électro-élastiques, occupant deux domaines bornés Ω^1, Ω^2 de l'espace $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$). Nous avons mis un super-script ℓ pour indiquer que la quantité est liée au domaine Ω^ℓ , dans se qui suit l'indice ℓ supérieur est compris entre 1 et 2. Pour chaque domaine Ω^ℓ , ($\ell = 1, 2$), avec une surface frontière régulière Γ^ℓ , partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3^ℓ , correspondant aux conditions aux limites mécanique, d'un part, et en deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ correspondant aux conditions aux limites électrique, d'autre part, telles que $\Gamma_1^\ell > 0$ et $\Gamma_a^\ell > 0$. On note par ν^ℓ la normale unitaire sortante à Γ^ℓ . Nous noterons par Γ_3^ℓ l'interface de contact du corps Ω^ℓ , ($\ell = 1, 2$) ; on a $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2$, noté par Γ_3 . Le corps Ω^ℓ est encastré sur Γ_1^ℓ dans une structure fixe et en contact avec frottement, adhésion et compliance normale sur la partie Γ_3 . Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité f_2^ℓ . De plus, ce milieu est soumis à l'action de potentiel électrique nul sur la partie Γ_a^ℓ de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2^ℓ sur la partie Γ_b^ℓ . Nous nous intéressons à l'étude de l'évolution des corps matériels sous l'action des forces volumiques des densités f_0^ℓ et des charges électriques de densité volumiques q_0^ℓ . Finalement, Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Nous utilisons une loi de comportement électro-élastique donnés par :

$$\sigma^\ell = \mathcal{F}^\ell \varepsilon(u^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{E}(\varphi^\ell), \quad (3.1)$$

où $\mathcal{F}^\ell$ est un opérateur non linéaire donné, $E^\ell(\zeta^\ell) = -\nabla \zeta^\ell$ est le champ électrique, $\mathcal{E}^\ell$ représente le tenseur piézoélectrique du troisième ordre, $(\mathcal{E}^\ell)^*$ est sa transposition. Nous présentons par la suite les lois de comportement (3.1), le tenseur de contraintes $\sigma^\ell(t)$ est divisé en deux parties : $\sigma^\ell(t) = \sigma_R^\ell(t) + \sigma_E^\ell(t)$, où $\sigma_R^\ell(t) = \mathcal{F}^\ell \varepsilon((u^\ell)(t))$ représente la partie purement élastique de la contrainte et $\sigma_E^\ell(t) = (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \zeta^\ell(t)$ représente la partie électrique de la contrainte. Notons qu'il existe le point au-dessus d'une variable représente sa dérivée par rapport au temps t .

Problème $\mathcal{P}$. Pour $\ell = 1, 2$, trouver les champs des déplacements $\mathbf{u}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le potentiel électrique $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, les champs de déplacement électrique $\mathbf{D}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tels que :

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{E}(\varphi^\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (3.2)$$

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{B}^\ell \mathbf{E}(\varphi^\ell) + \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (3.3)$$

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell + \mathbf{f}_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (3.4)$$

$$\text{div} \mathbf{D}^\ell = q_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (3.5)$$

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times [0, T], \quad (3.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = \mathbf{f}_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times [0, T], \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu \\ -\sigma_\nu = p_\nu([u_\nu]) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([u_\tau])\| \leq \mu p_\nu([u_\nu]) \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([u_\tau])\| < \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow [u_\tau] = 0 \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([u_\tau])\| = \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{tel que } \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([u_\tau]) = -\lambda [u_\tau] \end{cases} \quad \text{on } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (3.9)$$

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu([u_\nu])^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([u_\tau])\|^2) - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (3.10)$$

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T], \quad (3.11)$$

$$\mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T], \quad (3.12)$$

$$\mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (3.13)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (3.14)$$

Les équations (3.2) et (3.3) représentent la loi constitutive électro-élastique, elles font parution dans (1.11), $\mathcal{B}^\ell$ désigne la permittivité électrique opérateur et $\mathbf{D}^\ell = (D_1^\ell, \dots, D_d^\ell)$

est le vecteur de déplacement électrique. Ensuite, les équations (3.4) et (3.5) sont les équations d'équilibre écrites pour les champs de contrainte et de déplacement électrique, introduits respectivement dans (1.5) et (1.8). Les conditions (3.6) et (3.7) sont les conditions de déplacement-traction. La condition (3.8) décrit le contact avec complaisance normale et adhésion où γ_ν est un coefficient d'adhérence et les conditions (3.9) sont les conditions de frottement et d'adhésion, où les opérateurs de troncation sont donnés par (1.37) et (1.40). L'équation (3.10) est l'équation différentielle ordinaire associée au champ d'adhésion, avec la condition initiale (3.14) où β_0 est un champ d'adhésion donné, tandis que (3.11) et (3.12) représentent les conditions aux limites électriques sur Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ respectivement, que nous avons définies dans (1.20) et (1.21).

On considère maintenant les hypothèses suivantes :

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{F}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_{\mathcal{F}^\ell} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \| \mathcal{F}^\ell(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}^\ell(x, \varepsilon_2) \| \leq L_{\mathcal{F}^\ell} \| \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \|, \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ (b) \text{ il existe } m_{\mathcal{F}^\ell} > 0 \text{ telle que,} \\ \quad (\mathcal{F}^\ell(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}^\ell(x, \varepsilon_2), \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{F}^\ell} \| \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \|^2, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{F}^\ell(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell, \\ \quad \text{pour tout, } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ (d) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{F}^\ell(x, 0) \in \mathcal{H}^\ell. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

L'opérateur piézoélectrique $\mathcal{E}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait les hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \mathcal{E}^\ell(x, \tau) = (e_{ijk}^\ell(x) \tau_{jk}) \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d \\ \text{p.p. } x \in \Omega^\ell, (b) e_{ijk}^\ell = e_{ikj}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i, j, k \leq d. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

L'opérateur de permittivité $\mathcal{B}^\ell = b_{ij}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait les hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \mathcal{B}^\ell(x, \mathbf{E}) = (b_{ij}^\ell(x) E_j) \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \\ (b) b_{ij}^\ell = b_{ji}^\ell, b_{ij}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i, j \leq d, \\ (c) \text{ Il existe } m_{\mathcal{B}^\ell} > 0 \text{ tel que } b_{ij}^\ell(x) E_i E_j \geq m_{\mathcal{B}^\ell} \| \mathbf{E} \|^2, \\ \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_\nu > 0 \text{ tels que } |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (b) (p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto p_\nu(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}, \\ (d) p_\nu(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

La fonction de contact tangentiel $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_\tau > 0 \text{ tels que } |p_\tau(x, r_1) - p_\tau(x, r_2)| \leq L_\tau (|r_1 - r_2|) \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (b) \text{ il existe } m_\tau > 0 \text{ tels que } |p_\tau(x, r)| \leq m_\tau \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto p_\tau(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}, \\ (d) \text{ l'application } x \longmapsto p_\tau(x, 0) \in L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (3.19)$$

On suppose que les forces volumiques f_0^ℓ et les tractions surfaciques f_2^ℓ , et les charges électriques volumique sont q_0^ℓ et surfaciques q_2^ℓ ont les régularités :

$$f_0^\ell \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Omega^\ell)^d), \quad f_2^\ell \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Gamma_2^\ell)^d), \quad (3.20)$$

$$q_0^\ell \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega^\ell)), \quad q_2^\ell \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_b^\ell)), \quad (3.21)$$

$$q_2^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_3, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.22)$$

Les coefficients d'adhésion γ_ν, γ_τ et ϵ_a satisfont les conditions

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \epsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \epsilon_a \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \quad (3.23)$$

tandis que le coefficient de frottement μ vérifie

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \quad (3.24)$$

le champ initial de déplacements satisfait :

$$\mathbf{u}_0^\ell \in V^\ell. \quad (3.25)$$

Finalement, on suppose que le champ initial d'adhésion satisfait :

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (3.26)$$

Nous énonçons maintenant quelques définitions qu'on utilise dans la suite de ce chapitre.

D'abord, l'application d'inclusion de $(V, \|\cdot\|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et dense. On définit la fonction $f = (f^1, f^2) : [0, T] \rightarrow V$ par

$$(f(t), \mathbf{v})_V = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot \mathbf{v}^\ell da, \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T], \quad (3.27)$$

et la fonction $q = (q^1, q^2) : [0, T] \rightarrow W$ par

$$(q(t), \psi)_W = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell(t) \cdot \psi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell(t) \cdot \psi^\ell da, \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T]. \quad (3.28)$$

Les conditions (3.20) et (3.21) impliquent

$$f \in W^{1,\infty}([0, T]; V), \quad q \in W^{1,\infty}([0, T]; W). \quad (3.29)$$

On définit la fonctionnelle d'adhésion comme suit $j_{ad} : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) \cdot [v_\nu] + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) \cdot [\mathbf{v}_\tau]) da. \quad (3.30)$$

La fonctionnelle de complaisance normale $j_{nc} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu]) \cdot [v_\nu] da, \quad (3.31)$$

et la fonctionnelle de frottement $j_{fr} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) \parallel [\mathbf{v}_\tau] \parallel da. \quad (3.32)$$

La condition (3.18) entraîne que les intégrales dans (3.31) et (3.32) sont bien définies.

3.2 Formulation variationnelle

A l'aide des formules de Green on voit directement que si $\mathbf{u}, \varphi$ et β sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (3.4), (3.6), (3.8) et (3.9) avec (3.30), (3.31) et (3.32) pour tout $t \in [0, T]$ on déduit que :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + (Div \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell(\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))dx + \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))dx &= \int_{\Gamma_1^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da \\ &+ \int_{\Gamma_2^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da + \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

La formule de Green pour $\ell = 1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^1} \boldsymbol{\sigma}^1(\varepsilon(\mathbf{v}^1) - \varepsilon(\mathbf{u}^1(t)))dx + \int_{\Omega^1} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1(t))dx &= \int_{\Gamma_1^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1(t))da + \\ &\int_{\Gamma_2^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1(t))da + \int_{\Gamma_3^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1(t))da, \quad \forall \mathbf{v}^1 \in V^1. \end{aligned} \quad (3.33)$$

La formule de Green pour $\ell = 2$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^2} \boldsymbol{\sigma}^2(\varepsilon(\mathbf{v}^2) - \varepsilon(\mathbf{u}^2(t)))dx + \int_{\Omega^2} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2(t))dx &= \int_{\Gamma_1^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2(t))da + \\ &\int_{\Gamma_2^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2(t))da + \int_{\Gamma_3^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2(t))da, \quad \forall \mathbf{v}^2 \in V^2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

à addition (3.33) et (3.34)

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell(\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))dx &= \\ \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_1^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

d'après (3.4), et (3.6)-(3.7) on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell(\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da + \\ &\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da + \\ &\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t))da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da + \\ &\quad \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

d'après (3.27)

$$(f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da.$$

En suite :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} = (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell.$$

On calcule $\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da = ? :$

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2(t)) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu^1 (\mathbf{v}_\nu^1 - \mathbf{u}_\nu^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu^2 (\mathbf{v}_\nu^2 - \mathbf{u}_\nu^2(t)) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 (\mathbf{v}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 (\mathbf{v}_\tau^2 - \mathbf{u}_\tau^2(t)) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu ([\mathbf{v}_\nu - \mathbf{u}_\nu(t)]) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da \\ &= \int_{\Gamma_3} (-p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu])) ([v_\nu - u_\nu(t)]) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da, \end{aligned}$$

alors :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)) da = \int_{\Gamma_3} (-p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu])) ([v_\nu - u_\nu(t)]) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau ([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da. \quad (3.35)$$

Nous supposons que $\Gamma_3 = \Gamma_3^+ \cup \Gamma_3^-$,

où $\Gamma_3^+ = \{x \in \Gamma_3 \mid [\mathbf{u}_\tau] = 0\}$ et $\Gamma_3^- = \{x \in \Gamma_3 \mid [\mathbf{u}_\tau] \neq 0\}$.

Maintenant, en utilisant (3.9).

Pour $[\mathbf{u}_\tau]$:

si $[\mathbf{u}_\tau] = 0$

$$\int_{\Gamma_3^+} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{u}_\tau(t)]) da = - \int_{\Gamma_3^+} \mu p_\nu([u_\nu]) \parallel [\mathbf{u}_\tau] \parallel da,$$

si $[\mathbf{u}_\tau] \neq 0$ a

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{u}_\tau(t)]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \lambda [\mathbf{u}_\tau] [\mathbf{u}_\tau(t)] da,$$

nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{u}_\tau(t)]) da &= -\lambda \int_{\Gamma_3^-} \parallel [\mathbf{u}_\tau] \parallel^2 da, \\ &= - \int_{\Gamma_3^-} \parallel \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) \parallel \parallel [\mathbf{u}_\tau] \parallel da, \\ &= - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \parallel [\mathbf{u}_\tau] \parallel da, \end{aligned}$$

alors :

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{u}_\tau(t)]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \parallel [\mathbf{u}_\tau] \parallel da. \quad (3.36)$$

Pour $[\mathbf{v}_\tau]$:

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \lambda [\mathbf{u}_\tau] [\mathbf{v}_\tau] da,$$

donc

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau]) da \geq -\lambda \int_{\Gamma_3^-} \parallel [\mathbf{u}_\tau] \parallel \parallel [\mathbf{v}_\tau] \parallel da \geq - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \parallel [\mathbf{v}_\tau] \parallel, \quad (3.37)$$

nous utilisons (3.37) et l'égalité (3.36) pour trouver

$$\int_{\Gamma_3} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da \geq - \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) (\parallel [\mathbf{v}_\tau] \parallel - \parallel [\mathbf{u}_\tau] \parallel) da. \quad (3.38)$$

Maintenant, nous utilisons (3.35) et (3.38) pour trouver

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} &\geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{\mathbf{V}} - \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu]) ([v_\nu - u_\nu(t)]) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) ([v_\nu - u_\nu(t)]) da - \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) (\parallel [\mathbf{v}_\tau] \parallel - \parallel [\mathbf{u}_\tau] \parallel) da \\ &\quad - \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) ([\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)]) da. \end{aligned}$$

D'après (3.30)-(3.31) et (3.32), on a

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\
 & + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + j_{nc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \\
 & + j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{\mathbf{V}},
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

et de (3.2), on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t) \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\
 & + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + j_{nc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \\
 & + j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{\mathbf{V}}, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{V}^\ell.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

En utilise la formule de Green pour les inconnues électrique du problème ainsi que les conditions (3.11), (3.5) et la définition (3.28) on a :

$$(\mathbf{D}^\ell, \nabla \psi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (Div \mathbf{D}^\ell, \psi^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \psi^\ell da, \quad \forall \psi^\ell \in H_1^\ell, \tag{3.41}$$

$$\int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \psi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} Div \mathbf{D}^\ell \cdot \psi^\ell dx = \int_{\Gamma_a^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \psi^\ell da + \int_{\Gamma_b^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \psi^\ell da, \quad \forall \psi^\ell \in H_1^\ell. \tag{3.42}$$

La formule de Green pour $\ell = 1$

$$\int_{\Omega^1} \mathbf{D}^1 \cdot \nabla \psi^1 dx + \int_{\Omega^1} Div \mathbf{D}^1 \cdot \psi^1 dx = \int_{\Gamma_a^1} \mathbf{D}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \psi^1 da + \int_{\Gamma_b^1} \mathbf{D}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \psi^1 da, \quad \forall \psi^1 \in H_1^1. \tag{3.43}$$

La formule de Green pour $\ell = 2$

$$\int_{\Omega^2} \mathbf{D}^2 \cdot \nabla \psi^2 dx + \int_{\Omega^2} Div \mathbf{D}^2 \cdot \psi^2 dx = \int_{\Gamma_a^2} \mathbf{D}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \psi^2 da + \int_{\Gamma_b^2} \mathbf{D}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \psi^2 da, \quad \forall \psi^2 \in H_1^2. \tag{3.44}$$

Pour $\ell = 1, 2$, on a d'après (3.11) :

$$\int_{\Gamma_a^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \psi^\ell da = 0,$$

à addition (3.43) et (3.44) on a :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \psi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} Div \mathbf{D}^\ell \cdot \psi^\ell dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \psi^\ell da.$$

On a d'après (3.5) et (3.12) :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \psi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \psi^\ell dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \psi^\ell da, \\ \sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{D}^\ell, \nabla \psi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \psi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \psi^\ell da &= 0. \end{aligned}$$

On a d'après (3.28) :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \psi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \psi^\ell da = (q(t), \psi)_W.$$

Donc :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{D}^\ell, \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} + (q(t), \psi)_W = 0.$$

De (3.3), on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell, \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \psi)_W, \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T]. \quad (3.45)$$

De (3.40), (3.14), (3.10) et (3.45), on obtient la formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}$.

Problème $\mathcal{PV}$. Trouver les champs de déplacements $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) : [0, T] \rightarrow V$, les potentiels électriques $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) : [0, T] \rightarrow W$, et le champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$, tels que :

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &\quad + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + j_{nc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \\ &\quad + j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell(t), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \psi)_W, \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T], \quad (3.47)$$

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu([u_\nu])^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\|^2) - \epsilon_a)_+, \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \quad (3.48)$$

$$\beta(0) = \beta_0. \quad (3.49)$$

Dans le reste de cette section, nous présentons quelques inégalités comprenant les fonctionnelles j_{ad} , j_{nc} et j_{fr} qui seront utilisées dans les sections suivantes.

Ci-dessous dans cette section, β, β_1, β_2 dénotent les éléments de $L^2(\Gamma_3)$ tel que $0 \leq \beta, \beta_1, \beta_2 \leq 1$ p.p. sur Γ_3 , $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}^\ell$ et $\mathbf{v}^\ell$ représentent des éléments de V^ℓ , et c est une constante générique positive qui peut dépendre de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_3, p_\nu, \gamma_\nu, \gamma_\tau$ et L , dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la raison de simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite aux fonctions diverses sur $x^\ell \in \Omega^\ell \cup \Gamma_3$.

D'abord nous faisons remarquer que les fonctionnelles j_{ad} et j_{nc} sont linéaires par rapport au dernier argument et donc

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad j_{nc}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -j_{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (3.50)$$

Ensuite, en utilisant (3.30) et les inégalités,

$$|R_\nu([u_{1\nu}])| \leq L, \quad \|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \leq L, \quad |\beta_1| \leq 1, \quad |\beta_2| \leq 1$$

, nous déduisons que

$$j_{ad}(\beta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq c \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2| \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\| da. \quad (3.51)$$

En combinant cette inégalité avec (1.39), nous obtenons

$$j_{ad}(\beta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq c \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V. \quad (3.52)$$

En choisissant $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ dans (3.52), nous trouvons

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq 0. \quad (3.53)$$

Des manipulations semblables, basées sur la Lipschitzienne des opérateurs R_ν et $\mathbf{R}_\tau$, montrent que :

$$|j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{ad}(\beta, \mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V. \quad (3.54)$$

Aussi, nous prenons $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}$ et $\mathbf{u}_2 = 0$ dans (3.53), ensuite nous utilisons les égalités $R_\nu(0) = 0, \mathbf{R}_\tau(0) = 0$ et (3.52) pour obtenir

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0. \quad (3.55)$$

Maintenant, nous utilisons (3.31) pour voir que

$$|j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}])| |[v_\nu]| da, \quad (3.56)$$

ensuite (3.18a) et (1.39) impliquent

$$|j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})| \leq c_0^2 L_\nu \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V. \quad (3.57)$$

Nous utilisons encore une fois (3.31), pour obtenir

$$j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \int_{\Gamma_3} (p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}])([u_{1\nu}] - [u_{2\nu}]) da, \quad (3.58)$$

et alors, (3.18b) implique

$$j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \geq 0. \quad (3.59)$$

Aussi, nous prenons $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}$ et $\mathbf{u}_2 = 0$ dans l'inégalité (3.59) et nous utilisons (3.18c) et (3.50) pour obtenir

$$j_{nc}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0. \quad (3.60)$$

Maintenant, nous utilisons (3.32) pour trouver

$$j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) + j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) - j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) \leq \int_{\Gamma_3} \mu |p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}])| \|[v_{1\tau}] - [v_{2\tau}]\| da. \quad (3.61)$$

Moyennant l'hypothèse (3.18a) et gardant en tête (2.12), nous obtenons

$$j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) + j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) - j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) \leq L_\nu c_0^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V. \quad (3.62)$$

Les inégalités (3.52)–(3.62) combinées avec les égalités (2.12) vont être utilisées dans des places diverses dans le reste du chapitre.

3.3 Existence et unicité de la solution

Notre intérêt principal dans cette section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel **Problème $\mathcal{PV}$** .

Théorème 3.3.1 .

Supposons que (3.15)–(3.20), (3.23)–(3.26), (3.16)–(3.28) et (1.12) sont vérifiées. Alors, il existe $\mu_0 > 0$ dépendant uniquement de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_3, \mathcal{F}^\ell, \mathcal{B}^\ell$ et p_ν telle que, si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq \mu_0$,

alors le Problème $\mathcal{PV}$ possède une solution unique $(\mathbf{u}, \varphi, \beta)$.

En outre, la solution satisfait ;

$$\mathbf{u} \in W^{1,\infty}([0, T]; V), \quad (3.63)$$

$$\varphi \in W^{1,\infty}([0, T]; W), \quad (3.64)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}. \quad (3.65)$$

Un "quintuple" de fonctions $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \beta, \mathbf{D})$ qui satisfait (3.2), (3.3), (3.14)–(3.40) est appelée solution faible du problème de contact $\mathcal{P}$.

Nous concluons par le Théorème (3.3.1) que, sous les hypothèses exposées, le Problème $\mathcal{P}$ possède une solution unique faible. Pour préciser la régularité de la solution faible, nous notons que les relations constitutives (3.2) et (3.3), les hypothèses (3.15), (3.16) et (3.27) et les régularités (3.63), (3.64) montrent que ;

$$\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}([0, T]; \mathcal{H}_1),$$

$$\mathbf{D} \in W^{1,\infty}([0, T]; \mathcal{W}_1)$$

il s'ensuit maintenant des régularités (3.20) et (3.21) que

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}([0, T]; H)$$

et

$$\text{div} \mathbf{D} \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Omega))$$

qui montre que :

$$\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}([0, T]; \mathcal{H}_1), \quad (3.66)$$

$$\mathbf{D} \in W^{1,\infty}([0, T]; \mathcal{W}_1). \quad (3.67)$$

Nous concluons que la solution faible $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \beta, \mathbf{D})$ du problème piézoélectrique de contact avec adhésion et frottement $\mathcal{P}$ possède la régularité (3.63), (3.64), (3.65)–(3.67).

Démonstration du Théorème (3.3.1). La démonstration du Théorème (3.3.1) sera effectué dans plusieurs étapes.

A cet effet, nous assumons dans la suite que (3.15)–(3.20), (3.23)–(3.26) sont satisfaites.

Soit $\mathcal{Z}$ l'ensemble fermé de l'espace $C([0, T]; L^2(\Gamma_3))$ défini par

$$\mathcal{Z} = \{\beta \in C([0, T]; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q} \mid \beta(0) = \beta_0\}, \quad (3.68)$$

et soit $\beta \in \mathcal{Z}$ donné.

Étape i :

Nous fixons $\beta \in \mathcal{Z}$ et nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème $\mathcal{PV}^\beta$. Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u}_\beta = (\mathbf{u}_\beta^1, \mathbf{u}_\beta^2) : [0, T] \rightarrow V$ un potentiel électrique $\varphi_\beta = (\varphi_\beta^1, \varphi_\beta^2) : [0, T] \rightarrow W$ tels que pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}_\beta^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_\beta^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell - \mathbf{u}_\beta^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t)) + j_{nc}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t)) \\ & + j_{fr}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T]. \quad (3.69) \\ & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_\beta^\ell(t), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \psi)_W, \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T]. \quad (3.70) \end{aligned}$$

Pour l'étude de ce problème on a le résultat suivant.

Lemme 3.3.1 *Il existe $\tilde{\mu}_0 > 0$ qui dépend de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_3, \mathcal{F}^\ell, \mathcal{B}^\ell$ et p_ν telle que, si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq \tilde{\mu}_0$, alors le Problème $\mathcal{PV}^\beta$ possède une solution unique. En outre, la solution satisfait $(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta) \in C([0, T]; V \times W)$.*

Démonstration. Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz pour définir l'opérateur $A_\beta(t) : V \longrightarrow V$ comme suit :

$$\begin{aligned} (A_\beta(t) \mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v})_V &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) + j_{nc}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}), \quad (3.71) \\ &\quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Soit $t \in [0, T]$ et $\beta \in \mathcal{Z}$ fixés et soit $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$. Nous utilisons (3.71) et le égalité (3.50) pour trouver

$$\begin{aligned} (A_\beta(t) \mathbf{u}_1 - A_\beta(t) \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} - \\ & j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) - j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2). \end{aligned}$$

Moyennant maintenant (3.15b) et les inégalités (3.53) et (3.59), on trouve

$$\begin{aligned} (A_\beta(t) \mathbf{u}_1 - A_\beta(t) \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V &\geq \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &\geq \sum_{\ell=1}^2 m_{\mathcal{F}^\ell} \|\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell\|_{V^\ell}^2 \geq \min(m_{\mathcal{F}^1}, m_{\mathcal{F}^2}) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2, \end{aligned}$$

donc

$$(A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V \geq m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2, \quad (3.72)$$

où $m_{\mathcal{F}} = \min(m_{\mathcal{F}^1}, m_{\mathcal{F}^2})$.

Soit $\mathbf{v} \in V$; en utilisant (3.71) nous avons

$$\begin{aligned} (A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_V &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \\ & j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) + j_{nc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j_{nc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

Combinons le égalité précédente avec (3.15a) et les inégalités (3.54)- (3.57), on à

$$\begin{aligned} (A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_V &\leq \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V \\ &\quad + L_\nu c_0^2 \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V, \\ &\leq \max(L_{\mathcal{F}^1}, L_{\mathcal{F}^2}) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V + c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V \\ &\quad + L_\nu c_0^2 \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V, \\ &\leq (\max(L_{\mathcal{F}^1}, L_{\mathcal{F}^2}) + L_\nu c_0^2 + c) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V, \\ &\leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V, \end{aligned}$$

d'où

$$(A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_V \leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V.$$

Mettons ensuite $\mathbf{v} = A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2$ dans l'inégalité précédente pour obtenir

$$\|A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2\|_V \leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V. \quad (3.73)$$

Pour résoudre (3.69) -(3.70), nous considérons l'espace produit de Hilbert $V \times W$ muni du produit scalaire

$$(x, y)_X = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_V + (\varphi, \psi)_W$$

$$\forall x = (\mathbf{u}, \varphi) = ((\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2), (\varphi^1, \varphi^2)), y = (\mathbf{v}, \psi) = ((\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2), (\psi^1, \psi^2)) \in X,$$

et la norme associée $\|\cdot\|_X$.

Nous définissons l'opérateur $\tilde{A}_{\beta(t)} : X \longrightarrow X$, la fonctionnelle $j : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, et l'élément $\mathbf{f}(t) = (\mathbf{f}^1(t), \mathbf{f}^2(t)) \in X$, par les égalités :

$$(\tilde{A}_{\beta(t)}x, y)_X = (A_\beta(t)\mathbf{u}, \mathbf{v})_V + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell - \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \quad (3.74)$$

$$\forall x = (\mathbf{u}, \varphi), y = (\mathbf{v}, \psi) \in X,$$

$$j(x, y) = j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \forall x = (\mathbf{u}, \varphi), y = (\mathbf{v}, \psi) \in X. \quad (3.75)$$

$$\mathbf{f}(t) = (f(t), q(t)), \quad (3.76)$$

pour tout $t \in [0, T]$, où $A_\beta(t)$ est donné par (3.71). Il est simple de vérifier que le couple $x_\beta = (\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta)$ est une solution du problème (3.69)–(3.70) avec la régularité $(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta) \in C([0, T]; V \times W)$ si et seulement si $x_\beta \in C([0, T]; X)$ et

$$(\tilde{A}_{\beta(t)}x_\beta(t), y - x_\beta(t))_X + j(x_\beta(t), y) - j(x_\beta(t), x_\beta(t)) \geq (\mathbf{f}(t), y - x_\beta(t))_X \quad \forall y \in X, t \in [0, T]. \quad (3.77)$$

Nous obtenons l'inégalité précédent en suivant ce qui suit, en utilisant (3.71) et (3.74) pour trouver

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_{\beta(t)}x_\beta(t), y)_X &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) + j_{nc}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_\beta^\ell, \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_\beta^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_{\beta(t)}x_\beta(t), y - x_\beta(t))_X &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{F}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t)) \\ &\quad + j_{nc}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t)) + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_\beta^\ell, \nabla \psi^\ell - \nabla \varphi_\beta^\ell)_{H^\ell} \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_\beta^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell), \nabla \psi^\ell - \nabla \varphi_\beta^\ell)_{H^\ell}, \end{aligned}$$

combinons cette dernière égalité avec (3.69) et (3.70) pour obtenir

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_{\beta(t)}x_\beta(t), y - x_\beta(t))_X &\geq (f(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\beta(t))_V - j_{fr}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{v}) \\ &\quad + j_{fr}(\mathbf{u}_\beta(t), \mathbf{u}_\beta(t)) + (q(t), \psi - \varphi)_W. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant (3.75) et (3.76) nous obtenons

$$(\tilde{A}_{\beta(t)}x_\beta(t), y - x_\beta(t))_X + j_{fr}(x_\beta(t), y) - j_{fr}(x_\beta(t), x_\beta(t)) \geq (\mathbf{f}(t), y - x_\beta(t))_X.$$

Nous définissons la forme bilinéaire $b : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$b(\varphi, \psi) = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell, \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \varphi, \psi \in W. \quad (3.78)$$

De (3.78), (3.17), (2.16) et de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$b(\varphi, \psi) = b(\psi, \varphi), |b(\varphi, \psi)| \leq c \|\varphi\|_W \|\psi\|_W, b(\varphi, \varphi) \geq c \|\varphi\|_W^2 \text{ pour tout } \varphi, \psi \in W,$$

c'est-à-dire que la forme bilinéaire b est continue, symétrique et coercive sur W .

Cependant, en utilisant le théorème de représentation de Riesz, on peut définir une forme linéaire continue $l_\beta : W \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$l_\beta(\psi) = (q(t), \psi)_W + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T].$$

On applique le théorème de Lax-Milgram pour déduire qu'il existe un élément unique $\varphi_\beta(t) \in W$ tel que

$$\begin{aligned} b(\varphi_\beta(t), \psi) &= l_\beta(\psi) \\ &= (q(t), \psi)_W + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_\beta^\ell(t)), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \psi \in W. \end{aligned} \quad (3.79)$$

L'opérateur $\tilde{A}_{\beta(t)}$ est fortement monotone et de Lipschitz sur X . En effet, en utilisant (3.72), (3.73), (2.16) et (3.16)–(3.17) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, soient $x_1 = (\mathbf{u}_1, \varphi_1), x_2 = (\mathbf{u}_2, \varphi_2) \in X$, pour tout $y = (\mathbf{v}, \psi)$, on a :

$$\begin{aligned} |(\tilde{A}_{\beta(t)} x_1 - \tilde{A}_{\beta(t)} x_2, y)_X| &= |(A_\beta(t) \mathbf{u}_1 - A_\beta(t) \mathbf{u}_2, \mathbf{v})_V + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell(\nabla \varphi_1^\ell - \nabla \varphi_2^\ell), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell} \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^*(\nabla \varphi_1^\ell - \nabla \varphi_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \nabla \psi^\ell)_{H^\ell}|, \\ &\leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V + c \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla \varphi_1^\ell - \nabla \varphi_2^\ell\|_{H^\ell} \|\nabla \psi^\ell\|_{H^\ell} \\ &\quad + c \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla \varphi_1^\ell - \nabla \varphi_2^\ell\|_{H^\ell} \|\mathbf{v}^\ell\|_{V^\ell} + c \sum_{\ell=1}^2 \|\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell\|_{V^\ell} \|\nabla \psi^\ell\|_{H^\ell}, \\ &\leq c \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V + c \sum_{\ell=1}^2 \|\varphi_1^\ell - \varphi_2^\ell\|_{W^\ell} \|\psi^\ell\|_{W^\ell} \\ &\quad + c \sum_{\ell=1}^2 \|\varphi_1^\ell - \varphi_2^\ell\|_{W^\ell} \|\mathbf{v}^\ell\|_{V^\ell} + c \sum_{\ell=1}^2 \|\mathbf{u}_1^\ell - \mathbf{u}_2^\ell\|_{V^\ell} \|\psi^\ell\|_{W^\ell}, \\ &\leq c(\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}\|_V + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\psi\|_W + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\mathbf{v}\|_V \\ &\quad + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\psi\|_W), \\ &\leq c \|x_1 - x_2\|_X \|y\|_X, \end{aligned}$$

et en prenant $y = \tilde{A}_{\beta(t)}x_1 - \tilde{A}_{\beta(t)}x_2$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\| \tilde{A}_{\beta(t)}x_1 - \tilde{A}_{\beta(t)}x_2 \|_{X \leq c} \| x_1 - x_2 \|_X, \quad (3.80)$$

qui prouve que $\tilde{A}_{\beta(t)}$ est Lipschitz. En outre, pour tout $x_1 = (\mathbf{u}_1, \varphi_1), x_2 = (\mathbf{u}_2, \varphi_2) \in X$, nous avons

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_{\beta(t)}x_1 - \tilde{A}_{\beta(t)}x_2, x_1 - x_2)_X &= (A_\beta(t)\mathbf{u}_1 - A_\beta(t)\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell(\nabla\varphi_1^\ell - \nabla\varphi_2^\ell), \nabla\varphi_1^\ell - \nabla\varphi_2^\ell)_{H^\ell} \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^*(\nabla\varphi_1^\ell - \nabla\varphi_2^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &\quad - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell\varepsilon(\mathbf{u}_1^\ell) - \mathcal{E}^\ell\varepsilon(\mathbf{u}_2^\ell), \nabla\varphi_1^\ell - \nabla\varphi_2^\ell)_{H^\ell} \\ &\geq m_{\mathcal{F}} \| \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \|_V^2 + \sum_{\ell=1}^2 m_{\mathcal{B}^\ell} \| \nabla\varphi_1^\ell - \nabla\varphi_2^\ell \|_{H^\ell}^2 \\ &\geq m_{\mathcal{F}} \| \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \|_V^2 + \sum_{\ell=1}^2 m_{\mathcal{B}^\ell} \| \varphi_1^\ell - \varphi_2^\ell \|_{W^\ell}^2 \\ &\geq \min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}) (\| \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \|_V^2 + \| \varphi_1 - \varphi_2 \|_W^2) \\ &\geq \min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}) \| x_1 - x_2 \|_X^2, \end{aligned}$$

où $m_{\mathcal{B}} = \min(m_{\mathcal{B}^1}, m_{\mathcal{B}^2})$. Alors

$$(\tilde{A}_{\beta(t)}x_1 - \tilde{A}_{\beta(t)}x_2, x_1 - x_2)_X \geq \min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}) \| x_1 - x_2 \|_X^2 \quad \forall x_1, x_2 \in X. \quad (3.81)$$

Aussi, en utilisant (3.75) et (3.62), nous pouvons vérifier aisément que, pour $x \in X$ donné, la fonctionnelle $j(x, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe est semi continue inférieurement et satisfait

$$\begin{aligned} j(x_1, y_1) - j(x_1, y_2) + j(x_2, y_2) - j(x_2, y_1) &\leq \\ c_0^2 L_\nu \| \mu \|_{L^\infty(\Gamma_3)} \| x_1 - x_2 \|_X \| y_1 - y_2 \|_X &\quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in X. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Finalement, notons que (3.76) et (3.29) montrent que $\mathbf{f} \in W^{1,\infty}(0, T; X)$.

Soit

$$\tilde{\mu}_0 = \frac{\min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}})}{c_0^2 L_\nu}, \quad (3.83)$$

et remarquons que $\tilde{\mu}_0$ dépend de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_3, \mathcal{F}^\ell, \mathcal{B}^\ell$ et p_ν .

Supposons que $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \tilde{\mu}_0$.

Alors

$$c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}), \quad (3.84)$$

et, en appliquant le résultat d'existence et d'unicité sur les inégalités quasi-variationnelles Théorème(2.5.1), il s'ensuit l'existence d'un élément unique $x_\beta(t) = (\mathbf{u}_\beta(t), \varphi_\beta(t)) \in X$, qui vérifie (3.77).

Maintenant, nous montrons que

$$(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta) \in C([0, T]; V) \times C([0, T]; W).$$

Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$ et on considère les notations $\mathbf{u}_\beta(t_i) = \mathbf{u}_i, \varphi_\beta(t_i) = \varphi_i, \beta(t_i) = \beta_i, q(t_i) = q_i, \mathbf{f}(t_i) = \mathbf{f}_i$ et $x_\beta(t_i) = (\mathbf{u}_\beta(t_i), \varphi_\beta(t_i)) = x_i$ pour $i = 1, 2$.

Nous utilisons (3.77), pour $t = t_1$

$$(\tilde{A}_{\beta(t)} x_1, x_2 - x_1)_X + j(x_1, x_2) - j(x_1, x_1) \geq (\mathbf{f}_1, x_2 - x_1)_X,$$

pour $t = t_2$

$$(\tilde{A}_{\beta(t)} x_2, x_1 - x_2)_X + j(x_2, x_1) - j(x_2, x_2) \geq (\mathbf{f}_2, x_1 - x_2)_X,$$

alors

$$(\tilde{A}_{\beta(t)} x_1, x_1 - x_2)_X - j(x_1, x_2) + j(x_1, x_1) \leq (\mathbf{f}_1, x_1 - x_2)_X, \quad (3.85)$$

et

$$-(\tilde{A}_{\beta(t)} x_2, x_1 - x_2)_X - j(x_2, x_1) + j(x_2, x_2) \leq -(\mathbf{f}_2, x_1 - x_2)_X, \quad (3.86)$$

à addition (3.85) et (3.86) on a :

$$(\tilde{A}_{\beta(t)} x_1 - \tilde{A}_{\beta(t)} x_2, x_1 - x_2)_X \leq (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, x_1 - x_2)_X + j(x_1, x_2) - j(x_1, x_1) + j(x_2, x_1) - j(x_2, x_2).$$

Combinons maintenant l'inéquation précédente avec les inégalités (3.81), (3.82) et (3.75) pour trouver

$$\min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}) \|x_1 - x_2\|_X^2 \leq c \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_X \|x_1 - x_2\|_X + c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|x_1 - x_2\|_X^2,$$

ce qui mène à l'inégalité suivante

$$\|x_1 - x_2\|_X \leq \frac{c}{\min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}) - c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}} \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_X. \quad (3.87)$$

Rappelons que $\mathbf{f} \in W^{1,\infty}([0, T]; X)$ et sous l'hypothèse de petitesse (3.84), il vient de (3.87) que l'application $t \mapsto x_\beta : [0, T] \rightarrow X$ est continue. C'est à dire

$$\mathbf{u}_\beta \in C([0, T]; V) \quad \text{et} \quad \varphi_\beta \in C([0, T]; W). \quad (3.88)$$

Ce qui termine la preuve du lemme (3.3.1).

Étape ii : Nous supposons dans ce qui suit que $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \tilde{\mu}_0$ et pour une fonction donnée $\beta \in \mathcal{Z}$, nous dénotons par $(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta)$ la solution du problème $\mathcal{PV}^\beta$ obtenue dans le Lemme (3.3.1), et nous considérons le problème de Cauchy suivant.

Problème $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$. Trouver un champ d'adhésion $\theta_\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que :

$$\dot{\theta}_\beta(t) = -(\theta_\beta(t)(\gamma_\nu(R_\nu([u_{\beta\nu}(t)]))^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_{\beta\tau}(t)])\|^2 - \epsilon_a)_+ \quad \text{p.p. } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (3.89)$$

$$\theta_\beta(0) = \beta_0. \quad (3.90)$$

Nous obtenons le résultat suivant.

Lemme 3.3.2 *Il existe une solution unique au Problème $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$ qui vérifie*

$$\theta_\beta \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}.$$

Démonstration. Nous considérons l'application $F_\beta : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ défini par

$$F_\beta(t, \theta) = -(\theta_\beta(t)(\gamma_\nu(R_\nu([u_{\beta\nu}(t)]))^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_{\beta\tau}(t)])\|^2 - \epsilon_a)_+.$$

Soit $t \in [0, T]$ et $\theta \in L^2(\Gamma_3)$. Il s'ensuit d'après les propriétés des opérateurs de troncation R_ν et $\mathbf{R}_\tau$ que F_β est de Lipschitz par rapport à la seconde variable, uniformément en temps.

De plus, pour tout $\theta \in L^2(\Gamma_3)$ l'application $t \mapsto F_\beta(t, \theta)$ appartient à $L^\infty([0, T]; L^2(\Gamma_3))$. Moyennant maintenant le Théorème (2.5.5), nous obtenons l'existence d'une fonction unique $\theta_\beta \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Gamma_3))$ qui résout le problème $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$.

Notons que la restriction $0 \leq \beta \leq 1$ est incluse implicitement dans le problème variationnel $\mathcal{PV}$. En effet, la condition (3.26) nous garantit que $\beta(t) \leq \beta_0$ et donc l'hypothèse (3.18) montre que $\beta(t) \leq 1$ pour $t \geq 0$, p.p. sur Γ_3 .

D'un autre côté, si $\beta(t_0) = 0$ à $t = t_0$, alors il s'ensuit de (3.24) et (3.26) que $\dot{\beta}(t) = 0$

pour tout $t \geq t_0$ et donc, $\beta(t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. sur Γ_3 .

Nous concluons que $0 \leq \beta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p. sur Γ_3 . Il résulte de la définition de l'ensemble $\mathcal{Q}$, que $\theta_\beta \in \mathcal{Q}$, ce qui conclut la preuve du lemme. Il s'ensuit du Lemme (3.3.2), que pour tout $\beta \in \mathcal{Z}$ la solution θ_β du problème $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$ appartient à $\mathcal{Z}$, voir (3.68).

Étape iii : Nous pouvons considérer l'opérateur $\Lambda : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ donné par

$$\Lambda\beta = \theta_\beta. \quad (3.91)$$

Dans la dernière étape, nous allons prouver le résultat suivant.

Lemme 3.3.3 *Il existe un unique élément $\beta^* \in \mathcal{Z}$ tel que $\Lambda\beta^* = \beta^*$.*

Démonstration. Supposons que β_1, β_2 , sont deux fonctions dans $\mathcal{Z}$.

Nous utilisons les notations $\mathbf{u}_{\beta_i} = \mathbf{u}_i$, $\varphi_{\beta_i} = \varphi_i$ et $\theta_{\beta_i} = \theta_i$ les fonctions obtenues dans les Lemmes (3.3.1) et (3.3.2), respectivement, pour $\beta = \beta_i$, $i = 1, 2$. Soit $t \in [0, T]$, nous utilisons des arguments semblables à ceux utilisés dans la preuve de (3.87) et l'inégalité (3.69) pour déduire que

$$\| \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t) \|_V \leq c \| \beta_1(t) - \beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)}. \quad (3.92)$$

Nous intégrons maintenant (3.89) avec l'état initial (3.90) pour obtenir :

$$\theta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t (\theta_i(s)(\gamma_\nu(R_\nu([u_{i\nu}(s)]))^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_{i\tau}(s)])\|^2) - \epsilon_a)_+ ds.$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c \int_0^t \| \theta_1(s)(R_\nu([u_{1\nu}(s)]))^2 - \theta_2(s)(R_\nu([u_{2\nu}(s)]))^2 \|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \\ &\quad \int_0^t \| \theta_1(s)\|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_{1\tau}(s)])\|^2 - \theta_2(s)\|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_{2\tau}(s)])\|^2 \|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de R_ν et $\mathbf{R}_\tau$ et écrivant $\theta_1 = \theta_1 - \theta_2 + \theta_2$ et après quelques opérations élémentaires, on trouve

$$\| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \| \theta_1(s) - \theta_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)} ds + c \int_0^t \| \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds.$$

Moyennant une version des lemmes de Gronwall Corollaire (2.5.1), il s'ensuit que

$$\| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \| \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds,$$

et, en utilisant (2.12), nous obtenons

$$\| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \| \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s) \|_V ds, \quad (3.93)$$

puis nous introduisons (3.91) dans l'estimation (3.93) pour trouver

$$\| \Lambda \beta_1(t) - \Lambda \beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \| \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s) \|_V ds. \quad (3.94)$$

Nous combinons maintenant (3.92) avec (3.94) pour déduire

$$\| \Lambda \beta_1(t) - \Lambda \beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \| \beta_1(s) - \beta_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)} ds,$$

la réitération de cette dernière inégalité n fois nous permette d'écrire

$$\| \Lambda^n \beta_1(t) - \Lambda^n \beta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c^n \times \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} \| \beta_1 - \beta_2 \|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))} ds_n \cdots ds_1,$$

où Λ^n désigne le $n^{\text{ième}}$ puissance de l'opérateur Λ^n .

La dernière inégalité implique que

$$\| \Lambda^n \beta_1 - \Lambda^n \beta_2 \|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))} \leq \frac{c^n T^n}{n!} \| \beta_1 - \beta_2 \|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))}. \quad (3.95)$$

Pour n suffisamment grand, Λ^n est une contraction sur le sous-espace fermé $\mathcal{Z}$ de l'espace de Banach $C([0,T];L^2(\Gamma_3))$. Donc, d'après le théorème du point fixe (2.5.2), Λ^n admet un point fixe unique et par conséquent Λ admet un point fixe unique $\beta^* \in \mathcal{Z}$.

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour établir la démonstration du Théorème (3.3.1).

Démonstration.

Existence. Soit $\beta^* \in \mathcal{Z}$ le point fixe de Λ et soit $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_{\beta^*}$, $\varphi^* = \varphi_{\beta^*}$ où $(\mathbf{u}_{\beta^*}, \varphi_{\beta^*})$ est la solution du Problème $\mathcal{PV}^\beta$ pour $\beta = \beta^*$. En utilisant les estimations (3.87), on déduit que.

$$\| x^*(t_1) - x^*(t_2) \|_X \leq \frac{c}{\min(m_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{B}}) - c_0^2 L_\nu \| \mu \|_{L^\infty(\Gamma_3)}} \| \mathbf{f}(t_1) - \mathbf{f}(t_2) \|_X. \quad (3.96)$$

pour tout $t_1, t_2 \in [0, T]$. Et puisque $\theta_{\beta^*} = \beta^*$ et d'après le lemme (3.3.2) nous déduisons que

$$\beta^* \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Gamma_3)).$$

De la régularité de $\mathbf{f} = (f, q)$ donnée par (3.21)-(3.20) et l'estimation (3.96), nous obtenons

$$x^* \in W^{1,\infty}([0, T]; X)$$

i.e $\mathbf{u}^* \in W^{1,\infty}([0, T]; V)$, $\varphi^* \in W^{1,\infty}([0, T]; W)$.

Nous concluons de (3.69), (3.70), (3.89) et (3.90), que $(\mathbf{u}^*, \varphi^*, \beta^*)$ est une solution du problème $\mathcal{PV}$ et satisfait (3.63), (3.64), (3.65).

Unicité. L'unicité est une conséquence de l'unicité des problèmes $\mathcal{PV}^\beta$ et $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$. Soit $(\mathbf{u}, \varphi, \beta)$ est une solution du problème $\mathcal{PV}$ (3.2), (3.49) ayant la régularité (3.63)(3.65).

En utilisant les arguments à la remarque(1.3.1), on obtient $\beta \in \mathcal{Z}$, d'après (3.2) et (3.47), nous trouvons que $(\mathbf{u}, \varphi)$ est une solution du problème $\mathcal{PV}^\beta$, et du lemme(3.3.1), nous avons $(\mathbf{u}_\beta, \varphi_\beta)$ est une solution unique du problème $\mathcal{PV}^\beta$.

Donc

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\beta \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi_\beta. \quad (3.97)$$

Nous remplaçons $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\beta$ dans (3.48), on trouve que β est une solution du Problème $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$ et d'après le lemme(3.3.2), le problème $\mathcal{P}^{\theta_\beta}$ admet une unique solution notée par θ_β , d'où

$$\beta = \theta_\beta. \quad (3.98)$$

Nous utilisons maintenant (3.98) et la définition de $\mathbf{\Lambda}$, on obtient $\mathbf{\Lambda}\beta = \beta$, c'est-à-dire β est le point fixe de $\mathbf{\Lambda}$ et comme β^* est l'unique point fixe de $\mathbf{\Lambda}$, on conclut

$$\beta = \beta^*. \quad (3.99)$$

L'unicité du théorème (3.3.1) est maintenant une conséquence des égalités (3.97) et (3.99).

Troisième partie

Problème de Contact entre deux corps thermo-électro- Viscoélastiques avec adhésion et endommagement

Chapitre 4

Problème de Contact entre deux corps thermo-électro- Viscoélastiques avec adhésion et endommagement

Dans ce chapitre, nous considérons un modèle mathématique dans un processus quasi-statique d'un problème de contact avec compliance normale et adhésion entre deux corps thermo-électro-viscoélastiques, où les inconnues dans ce cas, sont les champs des déplacements u^ℓ , les champs des contraintes σ^ℓ , les potentiels électriques ξ^ℓ , un champ d'adhésion ζ , les champs des températures τ^ℓ , les champs d'endommagements ς^ℓ et les champs des déplacements électriques $\mathbf{D}^\ell$, avec la loi de comportement thermo-électro-viscoélastiques non linéaire. Pour ce problème le contact est modélisé par l'adhésion dont l'évolution est décrite par une équation différentielle ordinaire du premier ordre. En utilisant les formules de Green, on propose une formulation variationnelle au problème, nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution. Les démonstrations sont basées sur des arguments d'inéquations variationnelles dépendant du temps du type parabolique, ainsi la théorie des équations d'évolutions du premier ordre avec des opérateurs non linéaires, et de point fixe. L'analyse de ce problème a fait l'objet de la publication [37].

4.1 Formulation du problème

Pour chaque domaine Ω^ℓ , ($\ell = 1, 2$), avec une surface frontière régulière Γ^ℓ , partitionnée en trois parties mesurables Γ_1^ℓ , Γ_2^ℓ et Γ_3^ℓ , correspondant aux conditions aux limites mécanique, d'une part, et en deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ correspondant aux conditions aux limites électrique, d'autre part, telles que $\Gamma_1^\ell > 0$ et $\Gamma_a^\ell > 0$. On note par ν^ℓ la normale unitaire sortante à Γ^ℓ . Nous noterons par Γ_3^ℓ l'interface de contact du corps Ω^ℓ , ($\ell = 1, 2$); on a $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2$, noté par Γ_3 . Le corps Ω^ℓ est encastré sur Γ_1^ℓ dans une structure fixe et en contact avec frottement, adhésion et compliance normale sur la partie Γ_3 . Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité f_2^ℓ . De plus, ce milieu est soumis à l'action de potentiel électrique nul sur la partie Γ_a^ℓ de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2^ℓ sur la partie Γ_b^ℓ . Nous nous intéressons à l'étude de l'évolution des corps matériels sous l'action des forces volumiques des densités f_0^ℓ et des charges électriques de densité volumiques q_0^ℓ . Finalement, Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Nous utilisons une loi de comportement thermo-électro-viscoélastique avec endommagements donnés par :

$$\sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell) + \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \tau^\ell, \varsigma^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u^\ell(s)), \tau^\ell(s), \varsigma^\ell(s)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\zeta^\ell), \quad (4.1)$$

où $\mathcal{A}^\ell$ est un opérateur non linéaire donné, $\mathcal{Q}^\ell$ est l'opérateur de relaxation, $\mathcal{B}^\ell$ représente l'opérateur l'élasticité, $E^\ell(\zeta^\ell) = -\nabla \zeta^\ell$ est le champ électrique, $\mathcal{E}^\ell$ représente le tenseur piézoélectrique du troisième ordre, $(\mathcal{E}^\ell)^*$ est sa transposition. (4.1) dans cet problème, le point au-dessus d'une variable représente une dérivée avec par rapport à la variable de temps t . Nous présentons par la suite les lois de comportement (4.1), le tenseur de contraintes $\sigma^\ell(t)$ est divisé en trois parties : $\sigma^\ell(t) = \sigma_V^\ell(t) + \sigma_E^\ell(t) + \sigma_R^\ell(t)$, où $\sigma_V^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell \varepsilon((\dot{u}^\ell)(t))$ représente la partie purement visqueuse de la contrainte, $\sigma_E^\ell(t) = (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \zeta^\ell(t)$ représente la partie électrique de la contrainte et $\sigma_R^\ell(t)$ satisfait une relation élastique de type taux

$$\sigma_R^\ell(t) = \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \tau^\ell(t), \varsigma^\ell(t)) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u^\ell(s)), \tau^\ell(s), \varsigma^\ell(s)) ds$$

représente la partie de la contrainte thermo-élastiques avec long terme mémoire et endommagements. A noter également que lorsque $\mathcal{Q}^\ell = 0$ la loi de comportement (4.1) de-

vient électro-viscoélastique de Kelvin-Voigt avec endommagements et effets thermiques relation constitutive,

$$\sigma^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)) + \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \tau^\ell(t), \varsigma^\ell(t)) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \zeta^\ell(t).$$

L'évolution quasistatique avec endommagements dans les matériaux viscoplastiques a été étudiée dans [4, 13]. La loi de comportement suivante est utilisée pour le potentiel électrique,

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\xi^\ell)), \quad (4.2)$$

où $\mathbf{D}^\ell$ est le champ de déplacement électrique de permittivité électrique.

L'endommagement ς^ℓ est donné par l'inclusion différentielle suivante

$$\dot{\varsigma}^\ell - \kappa^\ell \Delta \varsigma^\ell + \partial \varphi_{K^\ell}(\varsigma^\ell) \ni \Psi^\ell(\sigma^\ell - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell), \varepsilon(u^\ell), \varsigma^\ell), \quad (4.3)$$

où K^ℓ désigne l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles définies par,

$$K^\ell = \{\alpha \in H^1(\Omega^\ell) : 0 \leq \alpha \leq 1, \text{ p.p. dans } \Omega^\ell\}, \quad (4.4)$$

κ^ℓ un coefficient positif, $\partial \varphi_{K^\ell}$ représente le sous-différentiel de la fonction d'indicateur de l'ensemble K^ℓ et Ψ^ℓ est une fonction constitutive donnée qui décrit les sources des l'endommagement dans le système. Lorsque $\varsigma^\ell = 1$, il n'y a aucun endommagement dans le matériau Ω^ℓ , lorsque $\varsigma^\ell = 0$, la matière complètement endommagé, quand $0 < \varsigma^\ell < 1$, il y a endommagements partiels et le système a une capacité de charge réduite. Des problèmes de contact avec endommagements ont été étudiés dans [17, 19, 24]. La loi de comportement thermo-électro-viscoélastique (4.1) comprend un effet de température décrit par l'équation parabolique donnée par :

$$\dot{\tau}^\ell - \kappa_0^\ell \Delta \tau^\ell = \Theta^\ell(\sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell), \tau^\ell, \varsigma^\ell) + \rho^\ell, \quad (4.5)$$

où Θ^ℓ est une fonction constitutive nonlinéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures. Ici, et ci-dessous κ_0^ℓ est une constante strictement positive et ρ^ℓ une donnée, qui représente la source de chaleur du volume.

Problème $\mathcal{P}$. Pour $\ell = 1, 2$, trouver les champs des déplacements $\mathbf{u}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow$

$\mathbb{R}^d$, les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}^d$, les champs des températures $\tau^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, les champs d'endommagements $\varsigma^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, les champs des potentiels électriques $\xi^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, un champ d'adhésion $\zeta : \Gamma_3 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, et les champs des déplacements électriques $\mathbf{D}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ tell que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^\ell(t) = & \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) + \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \tau^\ell(t), \varsigma^\ell(t)) + \\ & \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(s)), \tau^\ell(s), \varsigma^\ell(s)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\xi^\ell(t)), \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (4.6)$$

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varsigma^\ell)). \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T). \quad (4.7)$$

$$\dot{\tau}^\ell - \kappa_0^\ell \Delta \tau^\ell = \Theta^\ell(\sigma^\ell, \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \tau^\ell, \varsigma^\ell) + \rho^\ell, \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T). \quad (4.8)$$

$$\dot{\varsigma}^\ell - \kappa^\ell \Delta \varsigma^\ell + \partial \psi_{k^\ell}(\varsigma^\ell) \ni \Psi^\ell(\sigma^\ell - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varsigma^\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T). \quad (4.9)$$

$$\text{Div} \sigma^\ell + f_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T). \quad (4.10)$$

$$\text{Div} \mathbf{D}^\ell - q_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T). \quad (4.11)$$

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T). \quad (4.12)$$

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T). \quad (4.13)$$

$$\zeta^\ell = H_{ad}(\zeta, \alpha_\zeta, R_\nu([u_\nu]), R_\tau([u_\tau])), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (4.14)$$

$$\sigma_\nu^\ell = \sigma_\nu^2 = \sigma_\nu \text{ où } \sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \zeta^2 R_\nu([u_\nu]) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (4.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 R_\tau([u_\tau])\| \leq \mu p_\nu([u_\nu]), \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 R_\tau([u_\tau])\| < \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow [\dot{\mathbf{u}}_\tau] = 0, \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 R_\tau([u_\tau])\| = \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \\ \text{tell que } \sigma_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 R_\tau([u_\tau]) = -\lambda [\dot{\mathbf{u}}_\tau]. \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.16)$$

$$\xi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times (0, T). \quad (4.17)$$

$$\mathbf{D}^\ell \nu^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times (0, T). \quad (4.18)$$

$$\kappa_0^\ell \frac{\partial^\ell \tau^\ell}{\partial \nu^\ell} + \lambda_0^\ell \tau^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\ell \times (0, T). \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \zeta^\ell}{\partial \nu^\ell} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\ell \times (0, T). \quad (4.20)$$

$$\mathbf{u}^\ell(0) = \mathbf{u}_0^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell(0) = \boldsymbol{\tau}_0^\ell, \zeta^\ell(0) = \zeta_0^\ell, \quad \text{dans } \Omega^\ell. \quad (4.21)$$

$$\zeta(0) = \zeta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (4.22)$$

Les équations (4.6) - (4.7) représentent la loi de comportement thermo-électro-viscoélastique avec une mémoire à long terme et d'endommagement. L'équation (4.8) représente la conservation de l'énergie où θ^ℓ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur générée par le travail des forces internes et ρ^ℓ est une source de chaleur volumique donnée. L'inclusion (4.9) décrit l'évolution du champ d'endommagement. Les équations (4.10) et (4.11) sont les équations d'équilibre pour les champs de contrainte et de déplacement électrique, respectivement. Ensuite, les équations (4.12) et (4.13) représentent respectivement la condition aux limites de déplacement et de traction. La condition (4.14) représente les conditions normales de conformité à l'adhésion où $[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2$ représente les déplacements dans la direction normale, aussi $[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2$, correspond au saut des déplacements dans la direction tangentielle, voir (1.22) et (1.25). La condition (4.15) décrit le contact avec compliance normale et adhésion sur Γ_3 , où γ_ν est un coefficient d'adhérence donné, p_ν est une fonction positive donnée, et elle était déjà utilisée dans [21, 22]. La condition (4.16) est une condition de loi de friction de Coulomb non locale couplée avec compliance normale et adhésion. Les équations (4.17) et (4.18) représentent les conditions aux limites électrique. La relation (4.19) représente une condition aux limites de Fourier pour la température sur Γ^ℓ . La relation (4.20) représente une condition aux limites de Neumann homogène pour le champ d'endommagement sur Γ^ℓ . Enfin les fonctions u_0 , τ_0 , ζ_0 et ξ_0 dans (4.21) et (4.22) sont les initiales données.

4.2 Formulation Variationnelle

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}$, nous avons besoin d'introduire quelques hypothèses sur les données.

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ telle que, } \forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{S}^d \\ \quad | \mathcal{A}^\ell(x, \omega_1) - \mathcal{A}^\ell(x, \omega_2) | \leq L_{\mathcal{A}^\ell} | \omega_1 - \omega_2 |, \\ \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ il existe } m_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ telle que, } \forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{S}^d \\ \quad (\mathcal{A}^\ell(x, \omega_1) - \mathcal{A}^\ell(x, \omega_2))(\omega_1 - \omega_2) \geq m_{\mathcal{A}^\ell} | \omega_1 - \omega_2 |^2, \\ \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{A}^\ell(x, \omega), \quad \text{est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell \\ \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{S}^d.. \\ (d) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{A}^\ell(x, 0) \in \mathcal{H}^\ell \text{ continue sur } \mathbb{S}^d, \\ \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (4.23)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{B}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_{\mathcal{B}^\ell} > 0 \text{ telle que; } \forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{S}^d, r_1, r_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \\ \quad | \mathcal{B}^\ell(x, \omega_1, r_1, d_1) - \mathcal{B}^\ell(x, \omega_2, r_2, d_2) | \leq L_{\mathcal{B}^\ell} (| \omega_1 - \omega_2 | + | r_1 - r_2 | + | d_1 - d_2 |) \\ \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{B}^\ell(x, \omega, r, d) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell \\ \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{S}^d, r, d \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{B}^\ell(x, 0, 0, 0) \in \mathcal{H}^\ell. \end{array} \right. \quad (4.24)$$

La fonction de relaxation $\mathcal{Q}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_{\mathcal{Q}^\ell} > 0 \text{ telle que, } \forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{S}^d, r_1, r_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \\ \quad | \mathcal{Q}^\ell(x, t, \omega_1, r_1, d_1) - \mathcal{Q}^\ell(x, t, \omega_2, r_2, d_2) | \leq L_{\mathcal{Q}^\ell} (| \omega_1 - \omega_2 | + | r_1 - r_2 | + | d_1 - d_2 |) \\ \quad \forall t \in (0, T) \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{Q}^\ell(x, t, \omega, r, d) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell \\ \quad \text{pour tout } t \in (0, T) \omega \in \mathbb{S}^d, r, d \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ l'application } t \longmapsto \mathcal{Q}^\ell(x, t, \omega, r, d) \text{ est continue dans } (0, T) \\ \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{S}^d, r, d \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (d) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{Q}^\ell(x, t, 0, 0, 0) \in \mathcal{H}^\ell, \forall t \in (0, T). \end{array} \right. \quad (4.25)$$

La fonction d'énergie $\Theta^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_{\Theta^\ell} > 0 \text{ telle que, } \forall \eta_1, \eta_2, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{S}^d, \alpha_1, \alpha_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}. \\ \quad | \Theta^\ell(x, \eta_1, \omega_1, \alpha_1, d_1) - \Theta^\ell(x, \eta_2, \omega_2, \alpha_2, d_2) | \leq L_{\Theta^\ell} (| \eta_1 - \eta_2 | + | \omega_1 - \omega_2 | \\ \quad + | \alpha_1 - \alpha_2 | + | d_1 - d_2 |) \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ l'application } x \longmapsto \Theta^\ell(x, \eta, \omega, \alpha, d) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell \\ \quad \text{pour tout } \eta, \omega \in \mathbb{S}^d \text{ et } \alpha, d \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto \Theta^\ell(x, 0, 0, 0, 0) \text{ appartient à } L^2(\Omega^\ell). \\ (d) \text{ l'application } x \longmapsto \Theta^\ell(x, \eta, \omega, \alpha, d) \text{ est borné pour tout } \\ \quad \eta, \omega \in \mathbb{S}^d, \alpha, d \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (4.26)$$

La fonction de taux d'adhésion $H_{ad} : L_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_{H_{ad}} > 0 \text{ telle que, } \forall \zeta_1, \zeta_2, \omega_1, \omega_2 \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}, d_1, d_2 \in \mathbb{R}^{d-1}, \\ \quad | H_{ad}(x, \zeta_1, \omega_1, r_1, d_1) - H_{ad}(x, \zeta_2, \omega_2, r_2, d_2) | \leq \\ \quad L_{H_{ad}} (| \zeta_1 - \zeta_2 | + | \omega_1 - \omega_2 | + | r_1 - r_2 | + | d_1 - d_2 |) \\ \quad , \text{ p.p. } x \in L_3. \\ (b) \text{ l'application } x \longmapsto H_{ad}(x, \zeta, \omega, r, d) \text{ est Lebesgue mesurable on } L_3 \\ \quad \text{pour tout } \zeta, \omega, r \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}^{d-1}. \\ (c) \text{ l'application } (x, \zeta, r, d) \longmapsto H_{ad}(x, \zeta, \omega, r, d) \text{ est continue sur} \\ \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}, \text{ p.p. } x \in L_3. \\ (d) H_{ad}(x, 0, \omega, r, d) = 0 \text{ pour tout } \zeta, \omega, r \in \mathbb{R}, \\ \quad d \in \mathbb{R}^{d-1}. \text{ p.p. } x \in L_3. \\ (e) H_{ad}(x, \zeta, \omega, r, d) \geq 0, \forall \zeta \leq 0, \omega, r \in \mathbb{R}, \\ \quad d \in \mathbb{R}^{d-1}. \text{ p.p. } x \in L_3 \text{ et} \\ \quad H_{ad}(x, \zeta, \omega, r, d) \leq 0, \forall \zeta \geq 1, \omega, r \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}^{d-1}. \quad \text{p.p. } x \in L_3. \end{array} \right. \quad (4.27)$$

Le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \mathcal{E}^\ell(x, \tau) = (e_{ijk}^\ell(x) \tau_{jk}), \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } \quad x \in \Omega^\ell. \\ (b) e_{ijk}^\ell = e_{ikj}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i, j, k \leq d. \end{array} \right. \quad (4.28)$$

La fonction source d'endommagement $\Psi^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_{\Psi^\ell} > 0 \text{ telle que, } \quad \forall \eta_1, \eta_2, \omega_1, \quad \omega_2 \in \mathbb{S}^d, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \\ \quad | \Psi^\ell(x, \eta_1, \omega_1, \alpha_1) - \Psi^\ell(x, \eta_2, \omega_2, \alpha_2) | \leq \quad L_{\Psi^\ell} (| \eta_1 - \eta_2 | + | \omega_1 - \omega_2 | + | \alpha_1 - \alpha_2 |) \\ \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ l'application } x \longmapsto \Psi^\ell(x, \eta, \omega, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell \\ \quad \text{pour tout } \eta, \omega \in \mathbb{S}^d \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto \Psi^\ell(x, 0, 0, 0) \text{ appartient à } L^2(\Omega^\ell). \\ (d) \text{ l'application } x \longmapsto \Psi^\ell(x, \eta, \omega, \alpha) \text{ est borné,} \\ \quad \forall \eta, \omega \in \mathbb{S}^d, \alpha \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (4.29)$$

L'opérateur de permittivité électrique $\mathcal{G}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \mathcal{G}^\ell(x, E) = (b_{ij}^\ell(x) E_j), \quad b_{ij}^\ell = (b_{ji}^\ell), \quad b_{ij}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell) \quad , 1 \leq i, j \leq d. \\ (b) \text{ il existe } m_{\mathcal{G}^\ell} > 0 \text{ tel que } \quad \mathcal{G}^\ell E \cdot E \geq m_{\mathcal{G}^\ell} | E |^2, \forall E = (E_{ij}) \in \mathbb{R}^d, \\ \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (4.30)$$

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_\nu > 0 \text{ tels que } |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2|, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (b) (p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \\ \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto p_\nu(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ (d) p_\nu(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (4.31)$$

Les coefficients de l'adhésion γ_ν et γ_τ satisfont aux conditions ;

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \gamma_\nu, \gamma_\tau \geq 0 \text{ sur } \Gamma_3. \quad (4.32)$$

Les forces, les tractions ont la régularité . les forces volumiques f_0^ℓ , les tractions surfacetiques f_2^ℓ , les charges électriques volumiques sont q_0^ℓ , et surfacique q_2^ℓ ont la

régularités :

$$\begin{aligned} f_0^\ell &\in C(0, T; L^2(\Omega^\ell)^d), \\ f_2^\ell &\in C(0, T; L^2(\Gamma_2^\ell)^d), \\ q_0^\ell &\in C(0, T; L^2(\Omega^\ell)), \quad q_2^\ell \in C(0, T; L^2(\Gamma_b^\ell)), \quad \rho^\ell \in C(0, T; L^2(\Omega^\ell)). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Le coefficient d'énergie κ_0^ℓ , et le coefficient des microfissures κ^ℓ satisfont .

$$\kappa_0^\ell > 0 \quad \text{et} \quad \kappa^\ell > 0. \quad (4.34)$$

Finalement, on suppose que le coefficient de frottement et les données initiales satisfont :

$$\begin{aligned} \mu &\in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \\ \mathbf{u}_0^\ell &\in \mathbf{V}^\ell, \quad \varsigma_0^\ell \in K^\ell, \quad \tau_0^\ell \in L_1^\ell, \quad \zeta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \zeta_0 \leq 1, \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Le théorème de représentation de Riesz, nous permet de définir les fonctions $f = (f^1, f^2) : [0, T] \longrightarrow \mathbf{V}$ et $q = (q^1, q^2) : [0, T] \longrightarrow \mathbf{W}$. comme suit :

$$(f(t), v)_V = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot v^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot v^\ell da, \quad \forall v \in V, \quad t \in [0, T]. \quad (4.36)$$

$$(q(t), \phi)_W = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell(t) \cdot \phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell(t) \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi \in W, \quad t \in [0, T]. \quad (4.37)$$

Les conditions (4.33) impliquent

$$f \in C(0, T; V), \quad q \in C(0, T; W). \quad (4.38)$$

Nous introduisons les fonctions continues suivantes $a_0 : L_1 \times L_1 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$a : L_1 \times L_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, par :

$$a_o(\tau, \alpha) = \sum_{\ell=1}^2 \kappa_o^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \tau^\ell \cdot \nabla \alpha^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \tau^\ell \alpha^\ell da. \quad (4.39)$$

$$a(\varsigma, \alpha) = \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \varsigma^\ell \cdot \nabla \alpha^\ell dx. \quad (4.40)$$

On définit la fonctionnelle d'adhésion comme suit $j_{ad} : L^2(\Gamma_3) \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$j_{ad}(\zeta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \zeta^2 R_\nu([u_\nu]) \cdot [v_\nu] + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) \cdot [\mathbf{v}_\tau]) da. \quad (4.41)$$

La fonctionnelle de compliance normale $j_{\nu c} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$j_{\nu c}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu]) \cdot [v_\nu] da. \quad (4.42)$$

La fonctionnelle de frottement $j_{fr} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) \parallel [\mathbf{v}_\tau] \parallel da. \quad (4.43)$$

La condition (4.31) entraîne que les intégrales dans (4.42) et (4.43) sont bien définies.

A l'aide des formules de Green on voit directement que si $\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}$ et ζ sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (4.10), (4.12), (4.15) et (4.16) avec (4.41), (4.42) et (4.43) pour tout $t \in [0, T]$ on déduit que :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t))_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell (\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t))) dx + \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) dx &= \int_{\Gamma_1^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_2^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da + \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

d'après (4.10) et (4.12)-(4.13) on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell (\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t))) dx - \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) dx &= \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

La formule de Green pour $\ell = 1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^1} \boldsymbol{\sigma}^1 (\varepsilon(\mathbf{v}^1) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^1(t))) dx - \int_{\Omega^1} f_0^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \dot{\mathbf{u}}^1(t)) dx &= \int_{\Gamma_2} f_2^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \dot{\mathbf{u}}^1(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_3^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \dot{\mathbf{u}}^1(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^1 \in V^1. \end{aligned} \quad (4.44)$$

La formule de Green pour $\ell = 2$:

$$\int_{\Omega^2} \boldsymbol{\sigma}^2 (\varepsilon(\mathbf{v}^2) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^2(t))) dx - \int_{\Omega^2} f_0^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \dot{\mathbf{u}}^2(t)) dx = \int_{\Gamma_2^2} f_2^1 \cdot (\mathbf{v}^2 - \dot{\mathbf{u}}^2(t)) da$$

$$+ \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \dot{\mathbf{u}}^2(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^2 \in V^2. \quad (4.45)$$

A addition (4.44) et (4.45)

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell (\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t))) dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da + \\ \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da + \\ \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

D'après (4.36)

$$(f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da.$$

En suite :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} = (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da \quad (4.46)$$

On calcule $\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da = ?$

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \dot{\mathbf{u}}^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \dot{\mathbf{u}}^2(t)) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu^1 (\mathbf{v}_\nu^1 - \dot{\mathbf{u}}_\nu^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu^2 (\mathbf{v}_\nu^2 - \dot{\mathbf{u}}_\nu^2(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 (\mathbf{v}_\tau^1 - \dot{\mathbf{u}}_\tau^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 (\mathbf{v}_\tau^2 - \dot{\mathbf{u}}_\tau^2(t)) da. \end{aligned}$$

Moyennant (4.15) et (4.16), on a

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da = \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu([\mathbf{v}_\nu - \dot{\mathbf{u}}_\nu(t)]) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da,$$

alors :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da &= \int_{\Gamma_3} (-p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \zeta^2 R_\nu([u_\nu])) ([v_\nu - \dot{u}_\nu(t)]) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Nous supposons que $\Gamma_3 = \Gamma_3^+ \cup \Gamma_3^-$, où

$$\begin{aligned} \Gamma_3^+ &= \{x \in \Gamma_3 / \quad \| \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) \| < \mu p_\nu([u_\nu]) \} \\ \text{et } \Gamma_3^- &= \{x \in \Gamma_3 / \quad \| \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) \| = \mu p_\nu([u_\nu]) \}. \end{aligned} \quad \text{D'où,}$$

$$\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da = \int_{\Gamma_3^+} \boldsymbol{\sigma}_\tau([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da + \int_{\Gamma_3^-} \boldsymbol{\sigma}_\tau([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da.$$

Pour $[\dot{\mathbf{u}}_\tau]$:

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\int_{\Gamma_3^+} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\dot{\mathbf{u}}_\tau]) da \geq - \int_{\Gamma_3^+} \| \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) \| \| [\dot{\mathbf{u}}_\tau] \| da.$$

Maintenant, en utilisant (4.16),

$$\int_{\Gamma_3^+} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\dot{\mathbf{u}}_\tau]) da \geq - \int_{\Gamma_3^+} \mu p_\nu([u_\nu]) \| [\dot{\mathbf{u}}_\tau] \| da = 0. \quad (4.48)$$

Et

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \lambda [\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)] [\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)] da.$$

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da &= -\lambda \int_{\Gamma_3^-} \| [\dot{\mathbf{u}}_\tau] \|^2 da \\ &= - \int_{\Gamma_3^-} \| \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) \| \| [\dot{\mathbf{u}}_\tau] \| da \\ &= - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \| [\dot{\mathbf{u}}_\tau] \| da, \end{aligned}$$

alors :

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \| [\dot{\mathbf{u}}_\tau] \| da. \quad (4.49)$$

Pour $[\mathbf{v}_\tau]$:

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \lambda [\dot{\mathbf{u}}_\tau][\mathbf{v}_\tau] da.$$

Aussi, on utilise inégalité de Cauchy-Schwartz, donc

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau]) da &\geq -\lambda \int_{\Gamma_3^-} \| [\dot{\mathbf{u}}_\tau] \| \| [\mathbf{v}_\tau] \| da \\ &\geq - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \| [\mathbf{v}_\tau] \| da. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Nous utilisons (4.49) et l'égalité (4.50) pour trouver :

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da \geq - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) (\| [\mathbf{v}_\tau] \| - \| [\dot{\mathbf{u}}_\tau] \|) da. \quad (4.51)$$

Et de (4.47) et (4.51) , il vient :

$$\int_{\Gamma_3} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da \geq - \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) (\| [\mathbf{v}_\tau] \| - \| [\dot{\mathbf{u}}_\tau] \|) da. \quad (4.52)$$

En combinant les inégalités (4.41), (4.48) et (4.52), d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} &\geq (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V + \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \zeta^2 R_\nu([u_\nu])([v_\nu - \dot{\mathbf{u}}_\nu(t)]) da \\ &\quad - \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da - \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) (\| [\mathbf{v}_\tau] \| - \| [\dot{\mathbf{u}}_\tau] \|) da \\ &\quad - \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu])([v_\nu - \dot{u}_\nu(t)]) da \end{aligned}$$

et, d'après (4.41), (4.42) et (4.43) on a :

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\zeta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ + j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ + j_{vc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{cases} \quad (4.53)$$

En utilise la formule de Green pour les inconnues électrique du problème ainsi que les conditions (4.11), (4.17) et la définition (4.37) on a :

$$(\mathbf{D}^\ell, \nabla \phi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (\operatorname{div} \mathbf{D}^\ell, \phi^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in H_1^\ell,$$

d'où

$$\int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \operatorname{div} \mathbf{D}^\ell \cdot \phi^\ell dx = \int_{\Gamma_a^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da + \int_{\Gamma_b^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in H_1^\ell. \quad (4.54)$$

Pour $\ell = 1, 2$, on a d'après (4.17) :

$$\int_{\Gamma_a^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da = 0,$$

alors :

$$\int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \operatorname{div} \mathbf{D}^\ell \cdot \phi^\ell dx = \int_{\Gamma_b^\ell} \mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in H_1^\ell. \quad (4.55)$$

On a d'après (4.11) et (4.18) :

$$\int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx = \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in H_1^\ell. \quad (4.56)$$

La formule de Green pour $\ell = 1$

$$\int_{\Omega^1} \mathbf{D}^1 \cdot \nabla \phi^1 dx + \int_{\Omega^1} q_0^1 \cdot \phi^1 dx = \int_{\Gamma_b^1} q_2^1 \cdot \phi^1 da, \quad \forall \phi^1 \in H_1^1. \quad (4.57)$$

La formule de Green pour $\ell = 2$

$$\int_{\Omega^2} \mathbf{D}^2 \cdot \nabla \phi^2 dx + \int_{\Omega^2} q_0^2 \cdot \phi^2 dx = \int_{\Gamma_b^2} q_2^2 \cdot \phi^2 da, \quad \forall \phi^2 \in H_1^2, \quad (4.58)$$

à addition (4.57) et (4.58) on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{D}^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da, \\ \sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{D}^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da &= 0. \end{aligned}$$

On a d'après (4.37) :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da = (q(t), \phi)_W.$$

Donc :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathbf{D}^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} + (q(t), \phi)_W = 0.$$

De (4.7), on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\zeta^\ell(t))), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (-q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, \quad t \in (0, T). \quad (4.59)$$

Maintenant, pour les inconnues des températures du problème, pour tout $t \in [0, T]$ et la condition (4.8), nous obtenons :

$$(\dot{\tau}^\ell(t) - \rho^\ell(t), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} - (\kappa_0^\ell \Delta \tau^\ell(t), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} = (\Theta^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t), \tau^\ell(t), \varsigma^\ell(t)), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \forall \alpha^\ell \in L_1^\ell, \quad \ell = 1, 2. \quad (4.60)$$

En utilisant la formule de Green, pour $\ell = 1, 2$ on a :

$$-\kappa_0^\ell (\Delta \tau^\ell(t), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} = \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \tau^\ell(t) \cdot \nabla \alpha^\ell dx - \kappa_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \frac{\partial^\ell \tau^\ell(t)}{\partial \nu^\ell} \alpha^\ell dx, \quad \forall \alpha^\ell \in L_1^\ell.$$

On a d'après (4.19) :

$$-\kappa_0^\ell (\Delta \tau^\ell(t), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} = \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \tau^\ell(t) \cdot \nabla \alpha^\ell dx + \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \tau^\ell(t) \alpha^\ell dx, \quad \forall \alpha^\ell \in L_1^\ell, \quad \ell = 1, 2. \quad (4.61)$$

En combinant les inégalités (4.60) et (4.61), on a :

$$\begin{aligned} & (\dot{\tau}^\ell(t) - \rho^\ell(t), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \tau^\ell(t) \cdot \nabla \alpha^\ell dx + \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \tau^\ell(t) \cdot \alpha^\ell dx \\ & = (\Theta^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \tau^\ell(t), \varsigma^\ell(t)), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \alpha^\ell \in L_1^\ell, \quad \ell = 1, 2. \end{aligned}$$

Additionner, pour $\ell = 1, 2$ d'où

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}^\ell(t) - \rho^\ell(t), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + \sum_{\ell=1}^2 \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \tau^\ell(t) \cdot \nabla \alpha^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \tau^\ell(t) \cdot \alpha^\ell dx \\ & = \sum_{\ell=1}^2 (\Theta^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \tau^\ell(t), \varsigma^\ell(t)), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \alpha = (\alpha^1, \alpha^2) \in L_1. \end{aligned}$$

D'après (4.37), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}^\ell(t) - \rho^\ell(t), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\tau(t), \alpha) &= \sum_{\ell=1}^2 (\Theta^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \tau^\ell(t), \varsigma^\ell(t)), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \\ & \forall \alpha \in L_1. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Maintenant, pour les inconnues d'endommagements, soit $\varsigma^\ell(t) \in K^\ell$, $\ell = 1, 2$ et pour tout $t \in [0, T]$. La définition de $\partial \psi_{K^\ell}(\varsigma^\ell)$ (2.30) et de (4.3), on obtient :

$$(\Psi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t), \varsigma^\ell(t)) - \dot{\varsigma}^\ell(t) + \kappa^\ell \Delta \varsigma^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} \leq 0, \quad \forall \alpha^\ell \in K^\ell.$$

Donc :

$$\left(\Psi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t), \varsigma^\ell(t)), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}$$

$$\leq (\dot{\varsigma}^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} - \kappa^\ell (\Delta \varsigma^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}.$$

En utilisant la formule de Green et (4.20)

$$\begin{aligned} (\Delta \varsigma^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + (\nabla \varsigma^\ell(t), \nabla(\alpha^\ell - \varsigma^\ell(t)))_{L^2(\Omega^\ell)} &= \int_{\Gamma^\ell} \frac{\partial \varsigma^\ell(t)}{\partial \nu} \cdot (\alpha^\ell - \varsigma^\ell(t)) da, \\ (\Delta \varsigma^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} &= - \int_{\Omega^\ell} \nabla \varsigma^\ell(t) \cdot \nabla(\alpha^\ell - \varsigma^\ell(t)) dx. \end{aligned}$$

En suite :

$$\begin{aligned} &(\dot{\varsigma}^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \varsigma^\ell(t) \cdot \nabla(\alpha^\ell - \varsigma^\ell(t)) dx \\ &\geq \left(\Psi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)), \varepsilon(u^\ell(t), \varsigma^\ell(t)), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t)) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \ell = 1, 2. \end{aligned}$$

Additionner, pour $\ell = 1, 2$ il vient

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^2 (\dot{\varsigma}^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \varsigma^\ell(t) \cdot \nabla(\alpha^\ell - \varsigma^\ell(t)) dx \\ &\geq \sum_{\ell=1}^2 \left(\Psi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)), \varepsilon(u^\ell(t), \varsigma^\ell(t)), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t)) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \alpha \in K. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Finalement, de (4.6), (4.7), (4.53), (4.59), (4.62), (4.63), (4.14), (4.21) et (4.22), on obtient la formulation variationnelle suivante du problème thermo-électro-viscoélastique P.

Problème PV. Trouver les champs des déplacements $\mathbf{u} = (u^1, u^2) : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$, les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell = (\sigma^1, \sigma^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$, les champs des potentiels électriques $\xi = (\xi^1, \xi^2) : [0, T] \rightarrow W$, les champs températures $\tau = (\tau^1, \tau^2) : [0, T] \rightarrow L_1$, les champs d'endommagements $\varsigma = (\varsigma^1, \varsigma^2) : [0, T] \rightarrow L_1$, le champs d'adhésion $\zeta : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ et les champs des déplacements électriques, tels que :

$\mathbf{D} = (D^1, D^2) : [0, T] \rightarrow \mathbf{W}$ tell que pour tout $t \in [0, T]$.

$$\sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \tau^\ell, \varsigma^\ell) + \int_0^\ell \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(s)), \tau^\ell(s), \varsigma^\ell(t)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\zeta^\ell). \quad (4.64)$$

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\zeta^\ell)), \quad (4.65)$$

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1}^{\ell=2} (\sigma^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell)(t))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\zeta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ + j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ + j_{vc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{cases} \quad (4.66)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\zeta^\ell(t))), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (-q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, \quad t \in (0, T). \quad (4.67)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}^\ell(t) - \rho^\ell(t), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\tau(t), \alpha) = \sum_{\ell=1}^2 (\Theta^\ell(\sigma^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \tau^\ell(t), \varsigma^\ell(t)), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad (4.68)$$

$$\forall \alpha \in L_1.$$

$$\begin{aligned} & \sum_1^2 (\zeta^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \zeta^\ell(t) \cdot \nabla (\alpha^\ell - \varsigma^\ell(t)) dx \\ & \geq \sum_{\ell=1}^2 \left(\Psi^\ell(\sigma^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t), \varsigma^\ell(t)), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t)) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \alpha \in K. \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\dot{\zeta}^\ell(t) = H_{ad}(\zeta(t), \alpha_\zeta(t), R_\nu([u_\nu(t)]), R_\tau([u_\tau(t)])), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.70)$$

$$\mathbf{u}^\ell(0) = \mathbf{u}_0^\ell, \tau^\ell(0) = \tau_0^\ell, \varsigma^\ell(0) = \varsigma_0^\ell \text{ et } \zeta(0) = \zeta_0, \quad \text{dans } \Omega^\ell. \quad (4.71)$$

On remarque que le problème **PV** est formulé dans les termes, des champs des déplacements, des champs des contraintes, des champs des potentiels électriques, des champs températures, des champs d'endommagements, d'un champs d'adhésion et des champs des déplacements électriques. L'existence de solution unique du Problème **PV** est indiquée et prouvée dans la section suivante.

Remarque 4.2.1 On remarque que, dans le problème **P** et dans le problème **PV**, nous n'avons pas besoin d'imposer explicitement la restriction $0 \leq \zeta \leq 1$, en effet, l'équation (4.50) garantit que $\zeta(x, t) \leq \zeta_0(t)$ et par conséquent l'hypothèse (4.40) montre que $\zeta(x, t) \leq 1$ pour $t \geq 0$, p.p. $x \in \Gamma_3$, d'autre part, si $\zeta(x, t) = 0$ à l'instant t_0 , il résulte

de (4.50) que $\zeta(x, t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ et donc $\zeta(x, t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ p.p $x \in \Gamma_3$, nous concluons que $0 \leq \zeta(x, t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T[$ p.p $x \in \Gamma_3$.

On note tout d'abord que les fonctions j_{ad} et j_{vc} sont linéaires par rapport au dernier argument et donc ;

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}), j_{vc}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -j_{vc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (4.72)$$

En suite ,l'utilisation de (4.42) et (4.31)(b) implique ;

$$j_{vc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j_{vc}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + j_{vc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) - j_{vc}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) \leq 0 \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}. \quad (4.73)$$

aussi l'utilisation de (4.47), (4.36)(a) , en gardant à l'esprit (4.25), nous obtenons ;

$$j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j_{fr}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) - j_{fr}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) \leq c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V$$

$$\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}. \quad (4.74)$$

4.3 Résultats principaux

Les résultats principaux sont énoncés par le théorème suivant.

Théorème 4.3.1 *Supposons que (4.23)-(4.35) sont vérifiées. Alors, il existe alors une solution unique $\{\mathbf{u}, \xi, \zeta, \boldsymbol{\sigma}, \tau, \varsigma, \mathbf{D}\}$, du problème PV, de plus la solution satisfait :*

$$\mathbf{u} \in C^1(0, T, \mathbf{V}), \quad (4.75)$$

$$\xi \in C(0, T, \mathbf{W}), \quad (4.76)$$

$$\zeta \in \mathbf{W}^{1,\infty}(0, T, L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}, \quad (4.77)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in C(0, T, \mathcal{H}_1), \quad (4.78)$$

$$\tau \in L^2(0, T, L_1) \cap H^1(0, T, L_0), \quad (4.79)$$

$$\varsigma \in L^2(0, T, L_1) \cap H^1(0, T, L_0), \quad (4.80)$$

$$\mathbf{D} \in C(0, T, \mathcal{W}). \quad (4.81)$$

La démonstration du Théorème 4.3.1 s'effectue en plusieurs étapes que nous prouvons dans ce qui suit. Par tout dans cette section, nous supposons ce qui suit que tenir (4.23) à (4.35) et nous considérons que C , est un constante positive générique qui dépend de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau, \mathcal{A}^\ell, \mathcal{B}^\ell, \mathcal{G}^\ell, \mathcal{Q}^\ell, \mathcal{E}^\ell, H_{ad}, \gamma_\nu, \gamma_\tau, \Theta^\ell, \Psi^\ell, \kappa_0^\ell, \kappa^\ell$ et T avec $\ell = 1, 2$, mais ne dépend ne de t ni de reste de données d'entrée et donc la valeur peut changer d'un endroit à l'autre.

Dans la première étape.

Soit $(\lambda, \mu) \in C(0, T, L_0 \times L_0)$ et considérons le problème auxiliaire.

Problème PV_(λ,μ) . Trouver $\tau_\lambda : [0, T] \rightarrow L_0, \varsigma_\mu : [0, T] \rightarrow L_0$ tell que :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}_\lambda^\ell(t) - \lambda^\ell(t) - \rho^\ell(t), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\tau_\lambda^\ell(t), \alpha) = 0, \quad \forall \alpha \in L_0, \quad (4.82)$$

$$\varsigma_\mu(t) \in K, \quad \sum_{\ell=1}^2 (\varsigma_\mu^\ell(t) - \mu^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma_\mu^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\varsigma_\mu(t), \alpha - \varsigma_\mu(t)) \geq 0, \quad \forall \alpha \in K, \quad (4.83)$$

$$\tau_\lambda(0) = \tau_0, \varsigma_\mu(0) = \varsigma_0 \quad (4.84)$$

où $K = K^1 \times K^2$.

Lemme 4.3.1 *Il existe une unique solution $\{\tau_\lambda, \varsigma_\mu\}$ au problème auxiliaire $PV_{(\lambda, \mu)}$ satisfaisant (4.79)- (4.80).*

Démonstration. On outre par une application de l'inégalité de Poincaré-Friedrich, on peut trouver une constant C_0 tell que

$$\int_{\Omega^\ell} |\nabla \alpha|^2 dx + \frac{\lambda_0^\ell}{\kappa_0^\ell} \int_{\Gamma^\ell} |\alpha|^2 da \geq c_0 \int_{\Omega^\ell} |\alpha|^2 dx, \quad \forall \alpha \in L_1^\ell, \ell = 1, 2.$$

Ainsi, nous obtenons

$$a_0(\alpha, \alpha) \geq c_1 \|\alpha\|_{L_1}^2, \quad \forall \alpha \in L_1$$

où $c_1 = \kappa_0 \min(1, c_0)/2$, ce qui implique que a_0 est L_1 - elliptique.

Par conséquent sur la base arguments techniques de l'analyse fonctionnelle concernant les équations paraboliques (voir Théorème ??), l'équation variationnelle (4.82) à une solution unique τ_λ satisfaisant $\tau_\lambda(0) = \tau_0$ à la régularité (4.79). Par contre on sait que la forme a n'est pas L_1 -elliptique, pour résoudre ce problème nous introduisons les fonctions :

$$\tilde{\varsigma}_\mu^\ell(t) = e^{-\kappa^\ell t} \varsigma_\mu^\ell(t), \quad \tilde{\alpha}^\ell(t) = e^{-\kappa^\ell t} \alpha^\ell(t), \quad \ell = 1, 2.$$

On remarque que si $\varsigma_\mu^\ell, \alpha^\ell \in K^\ell$, alors $\tilde{\varsigma}_\mu^\ell, \tilde{\alpha}^\ell \in K^\ell$. Par conséquent (4.83) est équivalent à l'inégalité

$$\begin{aligned} \tilde{\varsigma}_\mu \in K, \quad & \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tilde{\varsigma}}_\mu^\ell(t) - e^{-\kappa^\ell t} \mu^\ell(t), \tilde{\alpha}^\ell - \tilde{\varsigma}_\mu^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\tilde{\varsigma}_\mu(t), \tilde{\alpha} - \tilde{\varsigma}_\mu(t)) \\ & + \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell (\tilde{\varsigma}_\mu^\ell, \tilde{\alpha}^\ell - \tilde{\varsigma}_\mu^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} \geq 0 \quad \forall \tilde{\alpha} \in K, \quad p.p \ t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Le fait que

$$a(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}) + \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell (\tilde{\alpha}^\ell, \tilde{\alpha}^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} \geq \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell \|\tilde{\alpha}^\ell\|_{L_1^\ell}^2, \quad \forall \tilde{\alpha} \in L_1. \quad (4.86)$$

Et en utilisant des arguments classique d'analyse fonctionnelle concernant les inégalités paraboliques (4.82) (voir Théorème 2.5.6), implique que (4.85) à une solution unique $\tilde{\varsigma}_\mu$ ayant la régularité (4.80), on utilise les fonctions $\varsigma_\mu^\ell(t) = e^{\kappa^\ell t} \tilde{\varsigma}_\mu^\ell(t)$, on conclure que ς_μ^ℓ est une solution unique de (4.83), ayant la même régularité.

Dans la deuxième étape.

Soit $(\lambda, \mu, \eta) \in C(0, T, L_0 \times L_0 \times V)$, on utilise le $\{\tau_\lambda, \varsigma_\lambda\}$ obtenu en lemme 4.3.1, et

considérons le problème auxiliaire.

Problème $PV_{(\lambda,\mu,\eta)}$. Trouver $u_{\lambda\mu\eta} : [0, T] \rightarrow V$, $\xi_{\lambda\mu\eta} : [0, T] \rightarrow W$ et $\zeta_{\lambda\mu\eta} : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tell que ;

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\lambda\mu\eta}^\ell) + \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}^\ell), \tau_\lambda^\ell, \varsigma_\mu^\ell), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\lambda\mu\eta}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \\ j_{\nu c}(u_{\lambda\mu\eta}(t), v - \dot{\mathbf{u}}_{\mu\eta}(t)) + j_{fr}(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(t), v) - j_{fr}(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\lambda\mu\eta}(t)) \\ + (\eta(t), v - \dot{\mathbf{u}}_{\lambda\mu\eta}(t))_V \geq (f(t), v - \dot{\mathbf{u}}_{\mu\eta}(t))_V, \quad \forall v \in \mathbf{V}, \end{cases} \quad (4.87)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_{\lambda\mu\nu}^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell E^\ell(\xi_{\lambda\mu\eta}^\ell(t), \nabla \phi^\ell))_{H^\ell} = (-q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, \quad (4.88)$$

$$\dot{\zeta}_{\lambda\mu\eta}(t) = H_{ad}(\zeta_{\lambda\mu\eta}(t), \alpha_{\zeta_{\lambda\mu\eta}}, R_\nu([u_{\lambda\mu\eta\nu}(t)]), R_\tau([u_{\lambda\mu\eta\tau}(t)])), \quad (4.89)$$

$$u_{\lambda\mu\eta}(0) = u_0, \quad \zeta_{\lambda\mu\eta}(0) = \zeta_0. \quad (4.90)$$

Nous avons les résultats suivants.

Lemme 4.3.2 .

- 1) Le problème $PV_{(\lambda,\mu,\eta)}$ possède une solution unique $\{u_{\lambda\mu\eta}, \xi_{\lambda\mu\eta}, \zeta_{\lambda\mu\eta}\}$, qui satisfait la régularité (4.75)–(4.77).
- 2) Si $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$, sont deux solutions de (4.87) et (4.90) correspondant aux données $(\lambda_1, \mu_1, \eta_1)$ et $(\lambda_2, \mu_2, \eta_2) \in C(0, T, L_0 \times V)$, alors il existe $c > 0$ tel que, pour $t \in [0, T]$

$$\| \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \|_V \leq c(\| \eta_1(t) - \eta_2(t) \|_V + \| u_1(t) - u_2(t) \|_V). \quad (4.91)$$

Pour prouver (4.87) et (4.91), nous utilisons une existence abstraite et un résultat unique qui être trouvé dans théorème 2.5.2.

Démonstration. Nous allons appliquer le Théorème 2.5.2, dans le cas de l'espace de Hilbert $X = V$ muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et de la norme associée $\| \cdot \|_V$ définies par (2.10) et (2.11), nous utilisons le Théorème de Riesz–Frèchet pour définir les opérateurs $A : V \rightarrow V$, $B : V \rightarrow V$, $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ et la fonction $f_\eta : [0, T] \rightarrow V$ par les égalités

$$(Au, v)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (4.92)$$

$$(Bu, v)_V = (\mathcal{G}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (4.93)$$

$$j(u, v) = j_{nc}(u, v) + j_{fr}(u, v), \quad (4.94)$$

$$(f_\eta, v)_V = (f(t), v)_V - (\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (4.95)$$

pour tout $u, v \in V$ et $t \in [0, T]$, il s'ensuit des hypothèses (4.23) et (4.24) que l'opérateur A satisfait les conditions (2.18)-(2.19) et l'opérateur B lipschitzienne. Nous utilisons (2.12) pour voir que la fonctionnelle j défini dans (4.94) satisfait la condition (2.22)(a). Moyennant (4.73) et (4.2), encore une fois nous obtenons

$$j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \leq c_0^2(L_\nu + L_\tau) \|u_1 - u_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V, \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in V,$$

qui montre que la fonctionnelle j vérifie la condition (2.22)(b) sur V . De plus en utilisant (2.11) et (2.12) il est facile de voir f_η défini par 4.95 satisfait $f_\eta \in C(0, T; V)$. En utilisant maintenant (4.92)-(4.95) nous remarquons que le (4.87), (4.90) et (4.91) est une conséquence directe du Théorème 2.5.2, 1), 2); ce qui achève la preuve.

Ensuite ,nous considérons la forme ;

$$G : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}. \\ G(\xi, \phi) = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell \nabla \xi^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell}, \quad \forall \xi, \phi \in W. \quad (4.96)$$

Nous utilisons (4.27) ,(4.28) , (4.36) et (4.96) pour montrer que la forme G est bilinéaire continue, symétrique et coercitive sur W , en utilisant en outre (4.43) et le théorème de représentation de Riesz nous pouvons définir un élément (application) $\omega_{\lambda\mu\eta} : [0, T] \rightarrow W$. tel que

$$(\omega_{\lambda\mu\eta}(t), \phi)_W = (q(t), \phi)_W + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}^\ell(t), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell}, \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T).$$

Par l'application le Théorème de Lax-Milgram on déduire qu'il existe un unique élément $\xi_{\mu\eta}(t) \in W$ tel que ;

$$G(\xi_{\lambda\mu\eta}(t), \phi) = (\omega_{\lambda\mu\eta}(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W. \quad (4.97)$$

Il suit de (4.97) que $\xi_{\lambda\mu\eta}$ est une solution de l'équation (4.88) .

Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$ ça suit de (4.88) que

$$\| \xi_{\lambda\mu\eta}(t_1) - \xi_{\lambda\mu\eta}(t_2) \|_W \leq C(\| \mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(t_1) - \mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(t_2) \|_V + \| q(t_1) - q(t_2) \|_W). \quad (4.98)$$

Maintenant de (4.39), (4.98) et $u_{\lambda\mu\eta} \in C^1(0, T, V)$, nous obtenons $\xi_{\lambda\mu\eta}(t) \in C(0, T, W)$.

D'autre part nous considérons l'application

$$H_{\lambda\mu\eta} : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$$

$$H_{\lambda\mu\eta}(t, \zeta) = H_{ad}(\zeta(t), \alpha_\zeta, R_\nu([u_{\lambda\mu\eta\nu}(t)]), R_\tau([u_{\lambda\mu\eta\tau}(t)])), \text{ pour tout } t \in [0, T] \text{ et } \zeta \in L^2(\Gamma_3).$$

Il résulte des propriétés de l'opérateur de troncature R_ν et R_τ que $H_{\lambda\mu\eta}$ est Lipschitz continue par rapport à la deuxième variable, uniformément dans le temps.

De plus, pour tout $\zeta \in L^2(\Gamma_3)$ l'application $t \rightarrow H_{\lambda\mu\eta}(t, \zeta)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$.

Ainsi en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz (voir Théorème 2.5.5), on déduit qu'il existe l'unique fonction $\zeta_{\lambda\mu\eta} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ solution de l'équation (4.89).

De plus, les arguments utilisés dans la Remarque 4.2.1, montrent que $0 \leq \zeta_{\lambda\mu\eta}(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p. sur Γ_3 . Par conséquent, de la définition de l'ensemble $\mathcal{Z}$ on constate que $\zeta_{\lambda\mu\eta} \in \mathcal{Z}$, ceci complète la preuve.

Dans la troisième étape ; On considère l'élément

$$\Pi(\eta, \lambda, \mu)(t) = (\Pi^1(\eta, \lambda, \mu)(t), \Pi^2(\eta, \lambda, \mu)(t), \Pi^3(\eta, \lambda, \mu)(t)) \in V \times L_0 \times L_0, \quad (4.99)$$

définît par l'équation ;

$$\begin{aligned} (\Pi^1(\eta, \lambda, \mu)(t), v) &= - \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\xi_{\lambda\mu\eta}^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\zeta_{\lambda\mu\eta}(t), u_{\lambda\mu\eta}(t), v) \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_{\lambda\mu\eta}^\ell(s), \tau_\lambda^\ell(s), \varsigma_\mu^\ell(s))) ds, \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell}, \forall v \in V \end{aligned} \quad (4.100)$$

$$\Pi^2(\eta, \lambda, \mu) = (\Theta^1(\sigma_{\lambda\mu\eta}^1, \varepsilon(u_{\lambda\mu\eta}^1), \tau_\lambda^1, \varsigma_\mu^1), \Theta^2(\sigma_{\lambda\mu\eta}^2, \varepsilon(u_{\lambda\mu\eta}^2), \tau_\lambda^2, \varsigma_\mu^2)), \quad (4.101)$$

$$\Pi^3(\eta, \lambda, \mu) = (\Psi^1((\sigma_{\lambda\mu\eta}^1, \varepsilon(u_{\lambda\mu\eta}^1), \varsigma_\mu^1), \Psi^2((\sigma_{\lambda\mu\eta}^2, \varepsilon(u_{\lambda\mu\eta}^2), \varsigma_\mu^2)). \quad (4.102)$$

Telle que l'application $\sigma_{\lambda\mu\eta}^\ell$ est donnée par

$$\sigma_{\lambda\mu\eta}^\ell = \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u_{\lambda\mu\eta}^\ell), \tau_\lambda^\ell, \varsigma_\mu^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_{\lambda\mu\eta}^\ell(s), \tau_\lambda^\ell(s), \varsigma_\mu^\ell(s))) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\xi_{\lambda\mu\eta}^\ell). \quad (4.103)$$

Lemme 4.3.3 : *L'application Π admet un point fixe $(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) \in C(0, T; V \times L_0 \times L_0)$.*

Preuve :

Soit $(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)$ et $(\eta_2, \lambda_2, \mu_2) \in C(0, T; V \times L_0 \times L_0)$, et notée par $\tau_i, \varsigma_i, u_i, \xi_i, \zeta_i$ et σ_i les fonctions obtenue dans lemme 4.3.1 et lemme 4.3.2, et la relation (4.103) pour $(\eta, \lambda, \mu) = (\eta_i, \lambda_i, \mu_i); i = 1, 2$.

Soit $t \in [0, T]$ nous utilisons (4.25), (4.26), (4.28), (4.29) et la définitions de R_ν, R_τ

nous avons .

$$\begin{aligned} \|\Pi^1(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(t) - \Pi^1(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(t)\|_V^2 &\leq \sum_{\ell=1}^2 \|(\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi_1^\ell(t) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi_2^\ell(t)\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 + \\ &\sum_{\ell=1}^2 \int_0^t \|\mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_1^\ell(s), \tau_1^\ell(s), \varsigma_1^\ell(s)) - \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_2^\ell(s), \tau_2^\ell(s), \varsigma_2^\ell(s)))\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 ds + \\ &C \|\zeta_1^2(t) R_\nu([u_{1\nu}(t)]) - \zeta_2^2(t) R_\nu([u_{2\nu}(t)])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + C \|\zeta_1^2(t) R_\tau([u_{1\tau}(t)]) - \zeta_2^2(t) R_\tau([u_{2\tau}(t)])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\Pi^1(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(t) - \Pi^1(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(t)\|_V^2 &\leq C \left(\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + \right. \\ &\left. \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_W^2 + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.104)$$

Par des arguments similaires de (4.23), (4.25) et (4.32) il s'ensuit que ;

$$\begin{aligned} \|\Pi^2(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(t) - \Pi^2(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(t)\|_{L_0}^2 &\leq C (\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \\ &+ \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + \|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L_0}^2 + \int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L_0}^2 ds \\ &+ \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{L_0}^2 + \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_W^2). \end{aligned} \quad (4.105)$$

Il s'ensuit aussi que ;

$$\begin{aligned} \|\Pi^3(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(t) - \Pi^3(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(t)\|_{L_0}^2 &\leq C (\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \\ &+ \|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L_0}^2 + \int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_W^2). \end{aligned} \quad (4.106)$$

Maintenant de (4.104), (4.105) et (4.106) il s'ensuit ;

$$\begin{aligned} \|\Pi(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \Pi(\eta_2, \lambda_2, \mu)\|_{V \times L_0 \times L_0}^2 &\leq C (\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \\ &+ \|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L_0}^2 + \int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{L_0}^2 + \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{L_0}^2 ds \\ &+ \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_W^2 + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2). \end{aligned} \quad (4.107)$$

Alors, tant que, $u_i^\ell(t) = \int_0^t \dot{u}_i^\ell(s) ds + u_0^\ell(t)$, $t \in [0, T]$, $\ell = 1, 2$.

Nous avons, $\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds$, et utiliser l'inégalité dans (4.91) on trouve.

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq C \left(\int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V ds + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds \right). \quad (4.108)$$

Ensuite, nous appliquons l'égalité de Gronwall, on déduit.

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.109)$$

D'autre part de problème de Cauchy (4.15), on peut écrire :

$$\zeta_i(t) = \zeta_0 - \int_0^t H_a d(\zeta_i(s), \alpha_{\zeta_i(s)}, R_\nu([u_i\nu(s)], R_\tau([u_i\tau(s)])) ds,$$

En utilisant (4.23) et (4.33), nous obtenons ;

$$\begin{aligned} \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq C \int_0^t (\|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \\ &\quad + C \int_0^t \|R_\nu([u_{1\nu}(s)] - R_\nu([u_{2\nu}(s)])\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \\ &\quad C \int_0^t \|R_\tau([u_{1\tau}(s)] - R_\tau([u_{2\tau}(s)])\|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \end{aligned}$$

D'après les définitions de R_ν , R_τ et en écrivant $\zeta_1 = \zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_2$, on obtient.

$$\|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \left(\int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right). \quad (4.110)$$

Ensuite, nous appliquons l'inégalité de Gronwall et du théorème de trace de Sobolev nous obtenons

$$\|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds. \quad (4.111)$$

Nous avons utilisé maintenant (4.14), (4.22), (4.34) et (4.36) pour trouver

$$\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_W^2 \leq C \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \quad (4.112)$$

de (4.82) on déduit que

$$((\dot{\tau}_1 - \dot{\tau}_2, \tau_1 - \tau_2)_{L_0} + a_0(\tau_1 - \tau_2, \tau_1 - \tau_2 - 2) + (\lambda_1 - \lambda_2, \theta_1 - \theta_2)_{L_0} = 0,$$

nous intégrons cette égalité par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\tau_1(o) = \tau_2(0) = \tau_0$ et l'inégalité $a_0(\tau_1 - \tau_2, \tau_1 - \tau_2) \geq 0$, pour trouver

$$\frac{1}{2} \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{L_0}^2 \leq \int_0^t (\lambda_1(s) - \lambda_2(s), \tau_1(s) - \tau_2(s))_{L_0} ds,$$

ce qui implique que

$$\|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{L_0}^2 \leq \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{L_0}^2 ds.$$

Cette inégalité combinée à l'inégalité de Gronwall conduit à

$$\|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{L_0}^2 \leq C \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{L_0}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.113)$$

De plus, de (4.83) on en déduit que, p.p. $t \in [0, T]$.

$$(\dot{\varsigma}_1 - \dot{\varsigma}_2, \varsigma_1 - \varsigma_2)_{L_0} + a(\varsigma_1 - \varsigma_2, \varsigma_1 - \varsigma_2) \leq (\mu_1 - \mu_2, \varsigma_1 - \varsigma_2)_{L_0} .$$

Intégrer l'inégalité précédente par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales, $\varsigma_1(0) = \varsigma_2(0) = \varsigma_0$ et inégalité $a(\varsigma_1 - \varsigma_2, \varsigma_1 - \varsigma_2) \geq 0$, il vient

$$\frac{1}{2} \|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L_0}^2 \leq \int_0^t (\mu_1(s) - \mu_2(s), \varsigma_1(s) - \varsigma_2(s))_{L_0} ds .$$

Ce qui implique que

$$\|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L_0}^2 \leq \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L_0}^2 ds .$$

Cette inégalité combinée à l'inégalité de Gronwall conduit à

$$\|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L_0}^2 \leq C \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{L_0}^2 ds . \quad (4.114)$$

On substitue (4.91), (4.111) et (4.114) en (4.107) pour obtenir

$$\|\Pi(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \Pi(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)\|_{V \times L_0 \times L_0}^2 \leq C \int_0^t \|(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(s) - (\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(s)\|_{V \times L_0 \times L_0}^2 ds .$$

Réitérant cette inégalité m fois nous obtenons,

$$\|\Pi^m(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \Pi^m(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)\|_{C(0,T;V \times L_0 \times L_0)}^2 \leq \frac{C^m T^m}{m!} \|(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - (\eta_2, \lambda_2, \mu_2)\|_{C(0,T;V \times L_0 \times L_0)}^2 .$$

Ainsi, pour m suffisamment grand, Π^m est une contraction sur l'espace de Banach $C(0, T; V \times L_0 \times L_0)$ et donc Π à un point fixe unique.

Soit $(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) \in C(0, T; V \times L_0 \times L_0)$, le point fixe de Π , on suppose que :

$$u_* = u_{\lambda^* \mu^* \eta^*}, \quad \xi_* = \xi_{\lambda^* \mu^* \eta^*}, \quad \zeta_* = \zeta_{\lambda^* \mu^* \eta^*}, \quad \tau_* = \tau_{\lambda^*}, \quad \varsigma_* = \varsigma_{\mu^*}, \quad (4.115)$$

$$\sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell) + \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u_*^\ell), \tau_*^\ell, \zeta_*^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_*^\ell(s)), \tau_*^\ell, \zeta_*^\ell(s)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\xi_*^\ell), \quad (4.116)$$

$$D_*^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_*^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\zeta_*^\ell)). \quad (4.117)$$

Nous utilisons

$$\Pi^1(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = \eta^*, \quad \Pi^2(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = \lambda^*, \quad \Pi^3(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = \mu^* .$$

Il s'ensuit ;

$$\begin{aligned}
 (\eta^*(t), v)_V = & - \sum_{\ell=1}^2 \left((\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell (\xi_*^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell) \right)_{H^\ell} + J_{ad}(\zeta_*(t), u_*(t), v) + \\
 & \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_*^\ell(s)), \tau_*^\ell(s), \varsigma_*^\ell(s)) ds, \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall v \in V
 \end{aligned} \tag{4.118}$$

$$\lambda_*^\ell(t) = \Theta^\ell(\sigma_*^\ell(t), \varepsilon(u_*^\ell(t)), \tau_*^\ell(t), \varsigma_*^\ell(t)), \quad \ell = 1, 2 \tag{4.119}$$

$$\mu_*^\ell(t) = \Psi^\ell(\sigma_*^\ell(t), \varepsilon(u_*^\ell(t)), \varsigma_*^\ell(t)), \quad \ell = 1, 2. \tag{4.120}$$

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour établir la démonstration du Théorème 4.3.1.

Existence. Nous prouvons $\{u_*, \sigma_*, \xi_*, \tau_*, \varsigma_*, \zeta_*, D_*\}$, satisfait (4.49)-(4.56) et les régularités (4.75) – (4.81).

En effet, nous écrivons (4.87) pour $(\eta, \lambda, \mu) = (\eta_*, \lambda_*, \mu_*)$ et utilisons (4.115) pour trouver

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell)(t), \varepsilon(u^\ell) - \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u_*^\ell), \tau_*^\ell, \varsigma_*^\ell), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + j_{\nu c}(u_*(t), v - \dot{u}_*(t)) + j_{fr}(u_*(t), v) - j_{fr}(u_*(t), \dot{u}_*(t)) + (\eta^*(t), v - \dot{u}_*(t))_V \\ & \geq (f(t), v - \dot{u}_*(t))_v, \forall v \in V. \end{aligned} \quad (4.121)$$

Remplacer (4.118) en (4.121) pour obtenir ;

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell)(t), \varepsilon(u^\ell) - \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u_*^\ell), \tau_*^\ell, \varsigma_*^\ell), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_*^\ell(s)), \tau_*^\ell(s), \varsigma_*^\ell(s)) ds, \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\zeta_*(t), u_*(t), v - \dot{u}_*(t)) \\ & + j_{\nu c}(u_*(t), v - \dot{u}_*(t)) + j_{fr}(u_*(t), v) - j_{fr}(u_*(t), \dot{u}_*(t)) - \sum_{\ell=1}^2 ((\varepsilon^\ell)^* E^\ell(\xi_*^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & \geq (f(t), v - \dot{u}_*(t))_V, \quad \forall v \in V, \quad p.p. t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.122)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}_*^\ell(t), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\tau_*^\ell(t), \alpha) = \sum_{\ell=1}^2 (\lambda_*^\ell(t) + \rho^\ell(t), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} \\ & \text{pour tout } \alpha \in L_0, \quad p.p. t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Ensuite, remplacez (4.119) par (4.82) pour obtenir $\varsigma_*(t) \in K$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\varsigma}_*^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma_*^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\varsigma_*(t), \alpha - \varsigma_*(t)) \\ & \geq \sum_{\ell=1}^2 (\Psi^\ell(\sigma_*^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t), \varepsilon(u_*^\ell(t), \varsigma_*^\ell(t))), \alpha^\ell - \varsigma_*^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}. \end{aligned} \quad (4.124)$$

Pour tous $\alpha \in K$ p.p. $t \in [0, T]$. Nous écrivons maintenant (4.89) pour $(\eta, \lambda, \mu) = (\eta^*, \lambda^*, \mu^*)$ et utilisons (4.115) de voir ça

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell E^\ell(\xi^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_*^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = -(q(t), \phi)_W, \\ & \text{pour tout } \phi \in W, \quad p.p. t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.125)$$

De plus, nous utilisons $u_{\eta^* \lambda^* \mu^*}$ dans (4.89) et (4.115) pour trouver

$$\dot{\zeta}_*(t) = H_{ad}(\zeta_*(t), \alpha_{\zeta_*}(t), R_\nu([u_{*\nu}(t)]), R_\tau([u_{*\tau}(t)])), \quad p.p. t \in [0, T]. \quad (4.126)$$

Les relations (4.121) – (4.126) nous permettent de conclure maintenant que $\{u_*, \sigma_*, \xi_*, \varsigma_*, \zeta_*, D_*\}$ satisfait ; (4.49)–(4.55), ensuite la régularité (4.75) – (4.77) et (4.80) découlent de Lemme 4.3.2 et Lemme 4.3.3 .

Puisque u_*, σ_* et ξ_* satisfait (4.75), (4.76) et (4.80), respectivement, il résulte de (4.116) cette ;

$$\sigma_* \in C(0, T; \mathcal{H}). \quad (4.127)$$

Pour $\ell = 1, 2$ on choisit $v = u \pm \phi$ dans (4.122), avec $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, $\phi^\ell \in D(\Omega^\ell)^d$ et $\phi^{3-\ell} = 0$ pour obtenir.

$$\text{Div } \sigma_*^\ell(t) = -f_0^\ell(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad \ell = 1, 2. \quad (4.128)$$

Où $D(\Omega^\ell)$ est l'espace des fonctions réelles infiniment différentiable avec un support compact dans Ω^ℓ . La régularité (4.78) découle de (4.117), (4.127) et (4.128).

Soit maintenant $t_1, t_2 \in [0, T]$ de (4.105), (4.112), (4.114) et (4.117), nous concluons qu'il existe une constante positive $C > 0$ vérifiant ;

$$\|D_*(t_1) - D_*(t_2)\|_H \leq C (\|\xi_*(t_1) - \xi_*(t_2)\|_W + \|u_*(t_1) - u_*(t_2)\|_V).$$

La régularité de u_* et ξ_* et donnée par (4.75) et (4.76) implique ;

$$D_* \in C(0, T; H). \quad (4.129)$$

Pour $\ell = 1, 2$ nous choisissons avec $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, avec $\phi^\ell \in D(\Omega^\ell)^{3-\ell}$ et $\phi^{3-\ell} = 0$ dans (4.125) et en utilisant (4.121) nous trouvons

$$\text{Div} D_*^\ell = q_0^\ell(t), \quad t \in [0, T], \quad \ell = 1, 2. \quad (4.130)$$

La propriété (4.81) découle de (4.117), (4.129) et (4.130).

Enfin, nous concluons que la solution faible $\{u_*, \sigma_*, \xi_*, \varsigma_*, \zeta_*, D_*\}$ du problème PV à la régularité (4.75) – (4.81), ce qui conclut la partie existence du théorème 4.3.1.

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur $\Pi(., ., .)$, défini par (4.100) – (4.101) et de la solubilité unique des problèmes $PV_{(\lambda, \mu)}$ et $PV_{(\lambda, \eta, \mu)}$.

Conclusion générale

Dans cette thèse, on a étudié deux problèmes

Le premier, est l'étude de problèmes en mécanique de contact avec frottement de coulomb et adhésion pour les lois constitutives électro-élasticité. On a utilisé les formules de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ce problème. Comme la frontière des corps et donné de problème ont de bonne régularité. L'existence de la solution unique et faible du problème a été établie, donc la solution du problème électro-mécanique et du problème variationnelle est la même.

Le deuxième problème, nous avons présenté un modèle pour le processus quasi-statique de contact par frottement entre deux corps thermo électro-viscoélastiques endommagés. Le contact a été modélisé avec la condition de compliance normale et la loi de Coulomb de friction sèche associée. La nouvelle caractéristique du modèle était la compliance normale et la loi de frottement dépend de l'adhérence telle que présentée dans l'équation de la différence (2.14). La difficulté de résoudre ce type de problème réside non seulement dans le couplage des aspects viscoélastiques, électriques et thermiques, mais aussi dans la non-linéarité des conditions aux limites modélisant ce type de phénomènes physiques (conditions de contact et de frottement), ce qui nous donne une inégalités quasi variationnelles et type d'égalités variationnelles paraboliques non linéaires. L'existence de la solution unique faible du problème a été établie en utilisant des arguments de la théorie des inégalités variationnelles évolutives, des inégalités paraboliques et de la théorie de point fixe. On a montré l'existence et l'unicité de la solution des problèmes précédents par l'utilisation des arguments suivants : équation variationnelle dépendant du temps, de la théorie des inégalités variationnelles d'évolutives, des inégalités paraboliques et de la théorie de point fixe.

Bibliographie

- [1] A. Amassad, M. Shillor, M. Sofonea, *A quasistatic contact problem with slip dependent coefficient of friction*, Math. Meth. Appl. Sci, **22** (1999), 267-284.
- [2] L.E. Andersson, *A quasistatic frictional problem with normal compliance*, Nonlinear Analysis TMA **16** (1991), 407-428
- [3] L.E. Andersson, *A global existence result for a quasistatic contact problem with friction*, Advances in Mathematical Sciences and Applications **5** (1995), 249-286.
- [4] R.C. Batra and J.S. Yang, *Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity*, J. of Elasticity, **38** (1995), 209-218.
- [5] S. Boutechbak, *A dynamic problem of frictionless contact for elastic-thermoviscoplastic materials with damage*, Int. J. Pure Appl. Math., **86** (2013), pp. 173–197.
- [6] H. Brezis, *Equations et Inéquations Non Linéaires dans les Espaces en Dualité*, Annale de l'Institut Fourier, Tome **18**, 1968.
- [7] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, 1987.
- [8] D. S. Chandrasekharian, *A temperature rate dependent theory of piezoelectricity*, J. Thermal Stresses, **7** (1984), pp. 293–306.
- [9] D. S. Chandrasekharian, *A generalized linear thermoelasticity theory of piezoelectric media*, Acta Mech., **71** (1988), pp. 39–49.
- [10] O. Chau, J. R. Fernández, M. Shollor and M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion*, J. Comp. App. Math., **159** (2003), pp. 431–465.
- [11] H. L. Dai and X. Wang, *Thermo-electro-elastic transient responses in piezoelectric hollow structures*, Inter. J. Sol. Struct., **42**, (2005), pp. 1151–1171.

- [12] G. Duvaut and J. L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, 1976.
- [13] G. Duvaut and J.L. Lions, *Les inéquations en Mécanique et en Physique*, Springer-Verlag, Berlin (1976).
- [14] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*. C. R. Acad. Sci. Paris, Série II **295** (1982), 913–916.
- [15] M. Frémond, *Adhérence des solides*, *J. Mécanique Théorique et Appliquée*, **6** (1987), 383-407.
- [16] M. Frémond, *Contact with adhesion. Dans Topics in nonsmooth mechanics (Edité par J.J. Moreau, P.D. Panagiotopoulos, et G. Strang)*, Birkhauser Verlag, Basel (1988), 177-221.
- [17] T. Hadj Ammar, A. Saïdi and A. Azeb Ahmed, Dynamic contact problem with adhesion and damage between thermo-electro-elasto-viscoplastic bodies, *C. R. Mécani.*, **345** (2017), pp. 329–336.
- [18] T.Hadj ammar, B. Benabderrahmane and S. Drabla, *Mixed Önite element approximation for a contact problem in electro-elasticity*, Kuwait J. Sci, **42** (2015), 31-54.
- [19] T.Hadj ammarand, B. Benabderrahmane, *Variational analysis of a contact problem with friction between two deformable bodies*, Stud. Univ. Babe, s-Bolyai Math. 57 (2012), No. **3**, 427-444.
- [20] T. Hadj Ammar, S. Drabla and B. Benederrahmane, Analysis and approximation of frictionless contact problems between two piezoelectric bodies with adhesion, *Georgian Math. J.*, **44** (2014), pp. 1–15.
- [21] W. Han and M. Sofonea, Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **38** (2000), pp. 556–579.
- [22] W. Han, M. Sofonea and K. Kazmi, Analysis and numerical solution of a frictionless contact problem for electro-elastic-visco-plastic materials, *Compu. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, **196** (2007), pp. 3915–3926.
- [23] A. Klarbring, A. Mikelic, M. Shillor, *Frictional contact problems with normal compliance*, Int. J. Engng. Sci, **26** (1988), 811-832.

- [24] Z. Lerguet, *Analyse de Quelques Problèmes de Contact avec Frottement et Adhé-
sion*. Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2008).
- [25] Z. Lerguet, M. Shillor and M. Sofonea, A frictional contact problem for an electro-
viscoelastic body, *Electron. J. Differ. Equat.*, **2007**(2007), no. **170**, pp. 1–16.
- [26] A. Merouani and F. Messelmi, Quasi-static transmission problem in thermo-
viscoplasticity, *Int. J. Open Prob. Compt. Math.*, **6** (2013), no. **3**, pp. 29–46.
- [27] R. D. Mindlin, Polarisation gradient in elastic dielectrics, *Int. J. Solids Struct.*, **4**
(1968), no. 6, pp. 637–642.
- [28] R. D. Mindlin, Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics, *J. Elastic.*,
2 (1972), no. 4, pp. 217–280.
- [29] R. D. Mindlin, *Equation of high frequency vibrations of thermo-piezoelectric, crys-
tal plates, Interactions in Elastic Solids*, Springer, Wien, 1979.
- [30] J. NEČAS, and I. HLAVÁČEK, *Mathematical Theory of Elastic and Elastico-
Plastic Bodies : An Introduction*, Elsevier Sci. Pub. Comp, Amsterdam, Oxford,
New York, 1981.
- [31] W. Nowacki, Some general theorems of thermo-piezoelectricity, *J. Thermal Stres.*,
1 (1978), pp. 171–182.
- [32] W. Nowacki, *Foundations of linear piezoelectricity, in H. Parkus (Ed.)*, Electro-
magnetic Interactions in Elastic Solids, Springer, Wien, 1979.
- [33] J. Nečas, *Les méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques*, Masson,
Paris (1967).
- [34] M. Raous, L. Cangémi, M. Cocou, *A consistent model coupling adhesion, friction
and unilateral contact*, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*, **177** (1999), 383–399.
- [35] M. Raous, L. Cangémi and M. Cocu, A consistent model coupling adhesion, friction
and unilateral contact, *Comput. Meth. Appl. Engrg.*, **177** (1999), pp. 383–399.
- [36] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, A quasistatic viscoelastic contact problem
with normal compliance and friction, *J. Elasticity* **51** (1998), pp. 105–126.
- [37] M.Said.ameur,T.Hadj.Amar,L.Maiza, *Analysis of a frictionnal contact problem
for viscoelastic piezoelectric materials*, *Aust.J.anal.App*,Vol17(2020)N¹ Art.6,20
pp,AJMAA.

- [38] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics **276**, Chapman-Hall/CRC Press, New York 2006.
- [39] M. Shillor, M. Sofonea, J.J. Telega, *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact*, Lect. Notes Phys. **655**, 2004, Springer, Berlin Heidelberg.
- [40] M. Selmani, A dynamic problem with adhesion and damage in electro-viscoelastic body with long-term memory, *J. Ineq. Pure Appl. Math.*, **10** (2009), pp. 06–19.
- [41] J. N. Shurma and V. Walia, Straight and circular crested waves in generalized piezothermoelastic materials, *J. Thermal Stresses*, **29** (2006), pp. 529–551.
- [42] J. S. Yang, R. C. Batra, Free vibrations of a linear thermo-piezoelectric body, *J. Thermal Stresses*, **18** (1995), pp. 247–262.
- [43] Z. Zellagui, *Analyse Variationnelle et Numérique de Quelques Problèmes de Contact en Mécanique des Solides Déformables*, Thèse de Doctorat, Université de Sétif 1, Sétif, 2012.

ملخص عام

في هذه الرسالة درسنا مسألتين.

المسألة الأولى هو دراسة المشاكل في ميكانيكا التلامس مع احتكاك الكولوم والالتصاق لجسمين كهرو مطاطيين باستعمال القوانين التأسيسية للمرونة استخدمنا صيغة جرين للحصول على الصيغة المتغيرة لهذه المشكلة وفقاً لحالة المطابقة العادية والقانون المرتبط بـ كولون تم إثبات وجود الحل الفريد والضعيف للمشكلة، الكهرو مطاطية.

والمسألة الثانية قدمنا نموذجاً لعملية شبه ثابتة للتلامس مع الاحتكاك والالتصاق بين جسمين حراريين كهربائيين لزجين . تم تصميم جهة الاتصال وفقاً لحالة المطابقة العادية والقانون المرتبط بـ كولون للاحتكاك الجاف . كانت السمة الجديدة للنموذج هي المطابقة العادية ويعتمد على قانون الاحتكاك - الالتصاق والاتلاف . ولا تكمن صعوبة حل هذا النوع من المشكلات في اقتران اللزوجة المرنة والجوانب الكهربائية والحرارية فحسب ، بل تكمن أيضاً في عدم الخطية للظروف الحدودية التي تمثل هذا النوع من الظواهر الفيزيائية (ظروف التلامس والاحتكاك والاتلاف) .

تم تأسيس وجود الحل الفريد والضعيف للمسألتين باستخدام الحجج من نظرية التفاوتات المتغيرة التطورية، والمعادلات والمتباينات المساواة المكافئ ونظرية النقاط الثابتة ولقد أظهرنا وجود وتميز حل المسألتين السابقتين باستخدام الوسائط التالية : نظريات المعادلة المتغيرة والمتباينات المعتمدة على الوقت ، معادلة التطور المتغير ، المعادلة التفاضلية ونظرية النقطة الثابتة .

الكلمات المفتاحية: : الالتصاق- الاحتكاك - اتلاف - الكهرو مطاطية - الكهرو لزوجة - معادلات ومتباينات شبه تغيرية - متباينات تطويرية - نظرية النقطة الثابتة.

Résumé générale

Dans cette thèse, on a étudié deux problèmes. L'un est l'étude de problème en mécanique de contact avec frottement de coulomb et adhésion pour les lois constitutives électro-élasticité, l'autre nous avons présenté un modèle pour le processus quasi-statique de contact avec frottement, adhésion et endommagement entre deux corps thermo électro-viscoélastiques. On a utilisé les formules de Green pour obtenir les formulations variationnelle des problèmes. Comme la frontière des corps donné des problèmes ont de bonne régularité. L'existence et l'unicité de la solution faible de premier problème Electro-mécanique a été établie. Dans le deuxième problème, le contact a été modélisé avec les condition de compliance normale et la loi de Coulomb de friction sèche associée. La nouvelle caractéristique du modèle était la compliance normale et la loi de frottement dépend de l'adhérence telle que présentée dans les équations et l'inéquation. La difficulté de résoudre ces types de problèmes réside non seulement dans le couplage des aspects viscoélastiques, électriques et thermiques, mais aussi dans la non-linéarité des conditions aux limites modélisant ce type des phénomènes physiques (conditions de contact avec adhésion et de frottement), ce qui nous donne une inégalité quasi-variationnelles et type d'égalités variationnelles paraboliques non linéaires. L'existence de la solution unique et faible du problème a été établie. On a montré l'existence et l'unicité des solutions des problèmes précédents par l'utilisation des arguments suivants : Équations variationnelle dépendant du temps, équations variationnelle d'évolution, inéquations différentielles et le théorème de point fixe.

Mots clés ; Elécto-elastique, électro-viscoélastique, adhésion, frottement, équation variationnelle, inéquation quasi-variationnelle, point fixe.

general Summary

In this thesis, we have studied two problems

The first, is the study of problems in contact mechanics with coulomb friction and adhesion for the constitutive laws of electro-elasticity. We used Green's formula to obtain the variational formulation of this problem. As the boundary of the bodies and given of problem have good regularity. The existence and uniqueness weak solution, of the problem has been established, The second, we have presented a model for the quasi-static process of contact with friction and adhesion between two damaged thermo-electro-viscoelastic bodies. The contact was modeled with the condition of normal compliance and the associated law of Coulomb of dry friction. The new feature of the model was normal compliance and the friction law depends on the adhesion. The difficulty of solving this type of problem lies not only in the coupling of the viscoelastic, electrical and thermal aspects, but also in the non-linearity of the boundary conditions modeling this type of physical phenomena (conditions of contact and friction), which gives us a quasi-variational inequality and type of nonlinear parabolic variational equality.

We have shown the existence and uniqueness of the solution of the previous problems by the use of the following arguments : The theory of variational and evolutionary inequalities, parabolic inequalities and fixed-point theory.

key words : Elécto-elastic, électro-viscoélastic, adhésion,friction,evolutionnary variational inequality,quasi-variational inequality, fixed-pointe theorem.