

N° d'ordre :

N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED
FACULTÉ DESSCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

Systeme D'équations Lotka-Volterra et
Modèle Prédateur-Proie

Présenté par: Madjidi Ghania

Rahal Isra

Soutenu devant le jury composé de

Mansour Abdelouahab

Guedda Lamine

Hreiz Bakkar Al Arabi

Président

Rapporteur

Examineur

Univ. El Oued

Univ. El Oued

Univ.ElOued

Année universitaire 2018 – 2019.

Remerciements

*Nous remercions **Allah** qui nous a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.*

*Nous tenons à notifier un remerciement spécial à tous nos professeurs qui ont contribué à notre formation de mathématique, en particulier, notre encadreur pédagogique "**Mr Guedda Lamine**"*

Ainsi que tous nos professeurs qui nous ont enseigné durant nos études à la faculté des sciences exactes.

*nous remercions également tous nos collègues d'étude, particulièrement notre promotion de master mathématique, 2018/2019 à l'université de **Chahid Hama Lakhdar El-Oued**.*

Enfin, nous remercions vivement notre famille pour l'aide matérielle et morale durant la période de préparation.

Table des matières

Introduction générale	1
0.1 Modélisation mathématique	1
0.1.1 Démarche d'une modélisation	1
0.2 Système Lotka-Volterra	2
0.2.1 Description des variables	2
0.2.2 Mise en équation	3
0.2.3 Objectif de l'étude	4
1 Préliminaires et Notions Primaires	5
1.1 Équations différentielles d'ordre 1	5
1.1.1 Conventions et définitions	5
1.1.2 Solutions d'une Équation différentielle	5
1.1.3 Prolongement d'une solution - solutions maximales	6
1.1.4 Équations autonomes	6
1.2 Problème de Cauchy	7
1.2.1 Fonction lipschitzienne localement lipschitzienne	8
1.3 Problèmes d'existences	9
1.3.1 Existence Locale (théorème de Cauchy Lipschitz)	9
1.3.2 Explosion de la solution maximale	10
1.3.3 Existence Globale	10
1.3.4 Quelques conséquences concernant le cas d'un système autonome	11
1.4 Notions sur la stabilité	11
1.4.1 Point d'équilibre	12

1.4.2	Stabilité local de l'état d'équilibre $E=0$	12
1.4.3	Stabilité asymptotique globale	13
1.4.4	Stabilité dans le cas linéaire	14
1.4.5	Stabilité dans le cas non linéaire	15
1.4.6	Théorème de Lyapunov	16
2	Applications au système de Lotka-Volterra	18
2.1	Existence de solutions	18
2.1.1	Existence Locale	18
2.1.2	Positivité des solutions	19
2.1.3	Existence Globale	20
2.1.4	la bornitude de solution maximale	21
2.2	Comportement au voisinage d'un point d'équilibre	22
2.2.1	Étude de l'équilibre $O(0,0)$	22
2.2.2	Étude de l'équilibre $\omega(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$	23
2.3	Étude globale des solutions	26
2.3.1	Périodicité des solutions	26
2.3.2	Moyenne sur une période	31
2.4	Calcul de la période	32
3	Approximation numérique des solutions	34
3.1	Rappels sur les méthodes numériques	34
3.1.1	Quelque méthodes classiques	34
3.1.2	Notions de consistance et de stabilité	36
3.2	Application au système de Lotka-Volterra	38
3.2.1	Visualisation des solutions numériques	38
3.2.2	Étude théorique des schémas dans le cas linéaire	39
	Bibliographie	42

Introduction générale

Le but principal de cette étude est de présenter le modèle prédateur-proie à travers un système de deux équations différentielles non linéaires du premier ordre dite système de Lotka-Volterra.

0.1 Modélisation mathématique

La modélisation, c'est l'ensemble de processus qui permet l'intervention des mathématiques dans une science basée sur l'expérience ou l'observation, par exemples dans différentes disciplines scientifiques : physique, chimie, économie, écologie animale

0.1.1 Démarche d'une modélisation

On peut distinguer plusieurs étapes :

- Le scientifique fait des hypothèses sur les phénomènes étudiés.
- Les hypothèses sont traduites mathématiquement en un modèle.
- On étudie le modèle mathématique ; et en tire des conséquences qualitatives ou quantitatives et on fait des prévisions.
- On compare les prévisions aux réalités expérimentales.
- On revient éventuellement sur les hypothèses pour modifier le modèle, et le cycle continu.

Le modèle mathématiques qui est au centre de notre étude a été proposé, indépendamment, par Vito Volterra (mathématicien et physicien Italien) en 1926 et Alfred James Lotka (statisticien Américain) en 1925, d'où le nom Lotka-Volterra. Il joue un rôle important dans

l'étude de la dynamique des populations et il a été introduit pour décrire l'interaction entre deux types d'espèces : les prédateurs et les proies. Avant de décrire ce modèle, on donne une interprétation de ses paramètres.

0.2 Système Lotka-Volterra

0.2.1 Description des variables

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'un système biologique composé de deux espèces : des proies (lapins ou sardines) et des prédateurs (renards ou requins, respectivement).

Pour cela, on note $X(t)$ et $Y(t)$ le nombre de proies et de prédateurs respectivement au temps t . Alors $X : t \mapsto X(t)$ et $Y : t \mapsto Y(t)$ sont des fonctions de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{N} , donc elles sont discontinues.

Afin de disposer d'outils mathématiques, on préfère travailler avec des variables continues. C'est pourquoi on considère deux nouvelles quantités :

$$x(t) = \frac{X(t)}{X_0} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{Y(t)}{Y_0}$$

où X_0 est un nombre de proies et, Y_0 est un nombre de prédateurs, fixés et grands.

Les quantités x et y sont donc des proportions de proies et prédateurs respectivement. Les variations de $x(t)$ et $y(t)$ sont donc des quantités petites, si bien que l'on peut faire l'hypothèse que $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont des fonctions continues de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} . (Car X_0 étant très grand par rapport à la différence $X(t_1) - X(t_2) : t_1, t_2 \geq 0$, d'où $x(t_1) - x(t_2)$ est très petit).

Pour la suite, on fera l'hypothèse de régularité supplémentaire de supposer ces fonctions dérivables. on définit le taux de variation sur un intervalle $[t, t + \Delta t]$ comme suit :

$$\frac{\Delta X(t)}{X(t)} \quad \text{tel que} \quad \Delta X(t) = \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}.$$

D'où $\frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \frac{\Delta X(t)}{X(t)} : t \in [t, t + \Delta t]$, en effet :

$$\Delta x(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{X_0}}{\Delta t} = \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{X_0 \Delta t}.$$

Si on suppose que les variations de $x(t)$ sont petites par rapport à $X(t)$ (ce qui paraît vraisemblable seulement pour des populations nombreuses), on peut passer à la limite :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \frac{x'(t)}{x(t)}$$

Par la même méthode pour y .

0.2.2 Mise en équation

D'après ce qui précède $\frac{x'(t)}{x(t)}$: est le taux de variation de la population de proies, $\frac{y'(t)}{y(t)}$: est le taux de variation de la population de prédateurs.

1. En absence de prédateurs, les proies auraient une croissance exponentielle, car dans ce cas, on aurait $\frac{x'(t)}{x(t)} = a$; (où $a > 0$ est le taux de naissance). C'est l'équation de reproduction normale d'une populations biologique en supplant l'abondance de nourriture et l'absence de compétition (c'est à dire que les individus se comportent comme s'ils étaient isolés et équivalents) voir [1].
2. En absence de proies, les prédateurs auraient une décroissance exponentielle, faute de nourriture, car on aurait $\frac{y'(t)}{y(t)} = -c$; (où $c > 0$ est le taux de mort) . C'est l'équation qui régit la décadence d'une populations biologique).
3. Si les deux espèces sont présentes, on prend en compte les interactions entre les deux espèces. dans ce cas on suppose que le taux de prédation (capture) des proies est proportionnel au nombre de rencontres entre les prédateurs et les proies, représenté par

$$by,$$

où $b > 0$ est le taux de la mortalité des proies dû aux prédateurs.

De la même façon, le taux de variation du nombre de prédateurs est proportionnel à la quantité de nourriture à leur disposition, c'est-à-dire au nombre de proies.

représenté par

$$dx,$$

où $d > 0$ est le taux de croissance relative des prédateurs dû à l'abondance de nourriture (les proies).

Ces considérations nous conduisent au système d'équations différentielles suivantes :

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a - by \quad \text{et} \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = -c + dx \quad (a, b, c, d > 0)$$

Du point de vue mathématique, il s'agit d'un système de deux équations différentielles, auquel on ajoute des conditions initiales (population au départ de chacune des espèces) :

$$\begin{cases} x'(t) = x(a - by) \\ y'(t) = y(-c + dx) \end{cases} \quad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0), \quad x_0, y_0 > 0 \quad (1)$$

Ce système est appelé système de Lotka- Volterra qui modélise les nombres des proies et prédateurs durant une période de temps. voir [15].

0.2.3 Objectif de l'étude

On désire obtenir des informations sur les solutions du système (1), c'est-à-dire connaître l'évolution des quantités x et y au cours du temps : est-ce que $x(t)$ et $y(t)$ restent des quantités positives au cours du temps, est-ce qu'une des deux populations s'éteint en temps fini, en temps infini, etc. ? Il est important que le modèle soit fidèle aux observations faites dans la nature afin d'être utile dans un but prédictif.

Dans **le premier chapitre** nous rappelons, sans démonstration, quelques définitions et propriétés fondamentales à propos l'étude des équations différentielles ordinaires, qui seront utilisées directement dans la suite de ce mémoire, citons par exemple : l'équations autonomes, solutions (locales - globales - maximales), théorème de Cauchy-Lipshitz, points d'équilibres, notions sur la stabilité , fonction de Lyapunov...etc .

le deuxième chapitre porte sur l'application des notions introduites dans le premier chapitre dans l'étude qualitative des solutions du système Lotka volterra (existence : locale et globale, positivité et périodicité des solutions et comportement au voisinage de ses points d'équilibres).

Dans **le troisième chapitre** nous rappelons les schémas de quelques méthodes numériques et les utilisons dans l'approximation numérique des solutions du système Volterra-Lotka.

Chapitre 1

Préliminaires et Notions Primaires

1.1 Équations différentielles d'ordre 1

1.1.1 Conventions et définitions

Sauf mention contraire, on entend par intervalle tout intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide. On s'intéressera aux systèmes différentielles du type :

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad (1.1)$$

où $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie par $f(t, y) = (f_1(t, y), f_2(t, y), \dots, f_m(t, y))$ est une fonction continue et U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

Pour les démonstration de résultats dans chapitre voir [3], [11], [14], [16].

1.1.2 Solutions d'une Équation différentielle

Une solution de l'équation (1.1) est un couple $(\varphi; J)$ où J est un intervalle et $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ est une fonction dérivable sur J à valeurs dans \mathbb{R}^m telle que $(t; \varphi(t)) \in U$ pour tout $t \in J$ et

$$\varphi'_i(t) = f_i(t, \varphi(t)), \forall t \in J, i = 1, 2, \dots, m$$

On remarque tout de suite que, f et φ étant deux fonctions continues, par composition, $\varphi'(t) = (\varphi'_1(t), \varphi'_2(t), \dots, \varphi'_m(t))$ est également continue sur J alors, φ est de classe C^1 sur J .

Remarque 1.1.1. Pour simplifier l'énoncé de certains théorèmes, nous supposons en général que l'ouvert U est de la forme $U = I \times \Omega$ où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^m . Dans ce cas, la condition pour tout $t \in J, (t, y(t)) \in U$ se réduit alors à $J \subset I$ et $y(t) \in \Omega$. On remarque également que si f est de classe C^k , alors toute solution de (1.1) est nécessairement de classe C^{k+1} .

1.1.3 Prolongement d'une solution - solutions maximales

Définition 1.1.1. Soient $(\varphi; J), (\psi; J')$ deux solutions de (1.1). On dit que $(\psi; J')$ prolonge $(\varphi; J)$ si $J \subset J'$ et $\psi \equiv \varphi$ sur J . Une solution $(\psi; J)$ de (1.1) est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement.

Si $J = I$, la solution maximale $(\psi; J)$ de (1.1) est appelée solution **globale**.

Exemple 1.1.1. soient λ un réel et $x_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $x_\lambda(t) = \lambda e^{at}$ est une solution maximale de l'équation $x'(t) = ax(t)$. La restriction de x_λ à l'ensemble de départ $]0, 1[$ est aussi une solution, mais ce n'est pas maximale.

1.1.4 Équations autonomes

L'équation (1.1) est dite **autonome** si f ne dépend pas de t , et **non autonome** sinon. Une équation différentielle autonome est donc du type

$$y'(t) = f(y(t)). \quad (1.2)$$

Exemple 1.1.2. (avec $m = 1$) : $y'(t) = y(t)$ (autonome) ; $y'(t) = y(t) + t$ (non autonome).

Remarque 1.1.2. Une équation non-autonome dans \mathbb{R}^m peut être résolue via une équation autonome auxiliaire dans \mathbb{R}^{m+1} . En effet, associons à l'équation non autonome (1.1), avec $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, l'équation autonome

$$X'(t) = g(X(t)) \quad (1.3)$$

avec $g : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ telle que $g(X) = (1, f(X))$. On vérifie que $y : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ est solution de (1.1) si et seulement si, la fonction $X : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ définie par $X(t) = (t, y(t))$ est solution de (1.3). On peut donc déduire les solutions de (1.1) des solutions de (1.3). En

revanche, le fait qu'on puisse le faire en théorie implique qu'il suffit de démontrer certains résultats pour les équations autonomes.

1.2 Problème de Cauchy

Un problème de Cauchy est la donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale (aussi appelé problème aux valeurs initiales). C'est donc un problème du type :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

avec $t_0 \in I$, $y_0 \in \Omega$ et $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue.

Définition 1.2.1. Soit $(t_0, y_0) \in U (= I \times \Omega)$. Résoudre le problème de Cauchy (1.4) consiste à déterminer $(\varphi; J)$ où J est un intervalle contenant t_0 et $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction dérivable (en fait de classe C^1) sur J telle que $J \subset I$ et pour tout $t \in J$, nous avons

$$\varphi(t) \in \Omega, \text{ et } \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

Par exemple, dans le cas scalaire, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' - y - t = 0 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

nous avons $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f(t, y) = y + t$. Ce problème admet la solution maximale unique $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = 2 \exp(t) - (t + 1)$, car

$$\varphi'(t) - \varphi(t) - t = 0 \text{ et } \varphi(0) = 1.$$

Un problème de Cauchy peut ne pas avoir de solutions si f n'est pas continue et peut avoir plusieurs solutions maximales (même si f est continue).

Exemple 1.2.1. : Considérons le problème de Cauchy $y' = 5|y|^{\frac{2}{5}}$ et $y(0) = 0$. Les fonctions y_1 et y_2 définies sur \mathbb{R} par $y_1(t) = 0$, $y_2(t) = t^5$ sont deux solutions, ce problème n'a donc pas une solution unique.

Dans la définition précédente, en intégrant l'équation différentielle ordinaire (en abrégé EDO) du problème de Cauchy (1.4) entre t_0 et t et en tenant compte de la condition initiale $y(t_0) = y_0$, on obtient que

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad (1.5)$$

où $\int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds = \left(\int_{t_0}^t f_1(s, y(s)) ds, \int_{t_0}^t f_2(s, y(s)) ds, \dots, \int_{t_0}^t f_m(s, y(s)) ds \right)$. Réciproquement, toute fonction φ vérifiant (1.5) est bien une solution de classe C^1 de (1.4). Nous utiliserons souvent l'équivalence entre les deux formulations

1.2.1 Fonction lipschitzienne localement lipschitzienne

Définition 1.2.2. Soit $f : U = I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction ($m \geq 1$). On dira que f est lipschitzienne en y (uniformément par rapport à t), et on notera $f \in Lip(U)$, s'il existe $k > 0$ tel que :

$$\|f(t, y_2) - f(t, y_1)\|_{\mathbb{R}^m} \leq k \|y_2 - y_1\|_{\mathbb{R}^m},$$

pour tout $(t, y_1), (t, y_2) \in U$.

Remarquer que cette notion n'entraîne pas que f est continue sur U comme le prouve l'exemple suivant :

$$U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(t, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t \leq 0 \end{cases}.$$

En revanche, si f est lipschitzienne au sens classique, c'est à dire s'il existe $k > 0$ tel que

$$\|f(t_2, y_2) - f(t_1, y_1)\|_{\mathbb{R}^m} \leq k (|t_2 - t_1| + \|y_2 - y_1\|_{\mathbb{R}^m});$$

pour tout $(t_1, y_1), (t_2, y_2) \in U$, alors f est en particulier lipschitzienne en y (uniformément en t).

Définition 1.2.3. On dira que f est localement lipschitzienne sur U si pour tout $(t_1, y_1) \in U$, il existe une boule $B = \{(t', y') \in U; |t' - t_1| < \varepsilon \text{ et } \|y' - y_1\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon\}$ et une constante $k > 0$ telles que f soit lipschitzienne sur B . On note alors $f \in Lip_{loc}(U)$.

Cas particulier : Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^m ($m \geq 1$) c'est à dire que f ne dépend pas de t . Dans ce cas f est dite lipschitzienne de rapport k sur Ω et on note $f \in Lip(\Omega)$, s'il existe $k > 0$ tel que :

$$\|f(y_2) - f(y_1)\|_{\mathbb{R}^m} \leq k \|y_2 - y_1\|_{\mathbb{R}^m} .$$

De même, f est dite localement lipschitzienne sur Ω si pour tout $y_1 \in \Omega$, il existe une boule $B = \{y' \in U; \|y' - y_1\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon\}$ et une constante $k > 0$ telles que f soit lipschitzienne sur B . On note alors $f \in Lip_{loc}(\Omega)$.

Remarque 1.2.1. — *La fonction \exp sur \mathbb{R} est localement lipschitzienne mais pas globalement.*

- *Une application lipschitzienne est continue.*
- *Une fonction globalement lipschitzienne l'est localement.*
- *Une fonction de classe C^1 est localement lipschitzienne.*

1.3 Problèmes d'existences

On rappelle dans ce paragraphe les résultats classiques concernant l'existence de solutions pour les systèmes différentiels, en particulier les systèmes autonomes

1.3.1 Existence Locale (théorème de Cauchy Lipschitz)

Théorème 1.3.1. *Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue et localement lipschitzienne en $y \in \Omega$, uniformément en $t \in I$. Pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ le problème de Cauchy (1.4) admet une solution maximale unique $\varphi_{\max} : J_{\max} \rightarrow \mathbb{R}^m$ où l'intervalle $J_{\max} \subset I$ est ouvert.*

La démonstration de ce théorème repose sur le théorème du point fixe contractant en utilisant la formulation (1.5). Si on affaiblit la régularité de f , le résultat ne persiste pas : si f est seulement supposée continue, on conserve l'existence (théorème de Cauchy-Péano), mais on perd l'unicité.

Pour plus de détail voir [11], [14], [16].

Remarque 1.3.1. *Les solutions de (φ, J) du problème de Cauchy sont exactement les restrictions de l'unique solution maximale φ_{\max} i.e. les couples $(\varphi_{\max}|_J)$ avec J sous-intervalle de J_{\max} .*

De ce fait et sauf indication contraire, on ne s'intéressera plus qu'aux solutions maximales par la suite.

1.3.2 Explosion de la solution maximale

Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, soit $(\varphi,]T_-, T_+[)$ la solution maximale du problème de Cauchy (1.4). Le théorème suivant nous dit que si $T_+ < \sup I$ où $T_- > \inf I$ la solution maximale explose au voisinage de T_+ et T_- .

Théorème 1.3.2. *Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Si $T_+ < \sup I$, alors pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $t_K \in]T_-, T_+[$ tel que $\varphi(t_K) \notin K$.*

La démonstration utilise la caractérisation des compacts en dimension finie.

Corollaire 1.3.1. *Si $\Omega = \mathbb{R}^m$, avec les hypothèses de Cauchy-Lipschitz. Soit $(\varphi,]T_-, T_+[)$ la solution maximale du problème (1.4). Si $T_+ < \sup I$, alors $\lim_{t \rightarrow T_+} \|\varphi(t)\| = +\infty$.*

1.3.3 Existence Globale

On peut parfois montrer que toutes les solutions maximales du problème de Cauchy (1.4) sont globales. C'est le cas si la fonction f est définie sur \mathbb{R}^m tout entier et si elle est globalement Lipschitzienne : car alors il n'y a pas de risque de sortir de son domaine de définition, ni du domaine de validité de sa constante de Lipschitz.

Théorème 1.3.3. *Soit $f \in C(I \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ et globalement lipschitzienne par rapport à y alors, quel que soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^m$, il existe une unique solution globale $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ du problème (1.4). De plus, toute solution locale est une restriction de celle-ci.*

1.3.4 Quelques conséquences concernant le cas d'un système autonome

Soit le problème de Cauchy associé au un système différentiel autonome suivant

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \quad (1.6)$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, Ω est un ouvert de \mathbb{R}^m contenant y_0 .

Corollaire 1.3.2. *Si la fonction f est localement lipschitzienne sur Ω , alors le problème (1.6) admet une solution maximale unique $y \in C^1((-T, T), \mathbb{R}^m)$.*

Définition 1.3.1. *On appelle **trajectoire** (où **orbite**) partant de y_0 l'ensemble*

$$O_{y_0} = \{\varphi(t)/t \in]-T, T[\}$$

où $(\varphi,]-T, T[)$ est la solution maximale correspondante à la condition initiale $\varphi(0) = y_0$.

Selon le théorème de Cauchy-Lipschitz, et l'explosion de la solution maximale on déduit que

Corollaire 1.3.3. *Deux trajectoires distinctes sont disjointes.*

Définition 1.3.2. *On appelle **portrait de phase** la partition de Ω en trajectoires.*

En pratique, on peut tracer le portrait de phase sans résoudre explicitement l'équation ce qui nous permet d'avoir des informations importantes sur le comportement qualitatif des solution.

Théorème 1.3.4. *Soit $(\varphi,]-T, T[)$ la solution maximale de (1.6). Si φ est bornée sur $[0, T)$, alors $T = +\infty$.*

1.4 Notions sur la stabilité

Considérons le système continu de dimension finie décrit par une équation différentielle autonome vectorielle non-linéaire du premier ordre :

$$y'(t) = f(y(t)) \tag{1.7}$$

c'est à dire que $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m > 1$) est une fonction verifiant au moins les conditions de Cauchy-Lipschitz, avec $t \geq 0$.

1.4.1 Point d'équilibre

Définition 1.4.1. Un vecteur $E \in \mathbb{R}^m$ est dit point ou état d'équilibre si $f(E) = 0$. La trajectoire de cette équilibre est réduite au point E

Remarque 1.4.1. Le point d'équilibre $y \equiv E$ est l'unique solution de (1.7) avec la condition initiale $y(t_0) = E$ avec $t_0 \geq 0$.

En effet, pour $y \equiv E$, on a $E' = 0 = f(E)$ et $y(t_0) = E$.

Remarquons aussi qu'en posant $g(y_1) = f(y_1 + E)$, on verifie que E est un point d'équilibre de (1.7) si et seulement si 0 est un point d'équilibre de $y'_1 = g(y_1)$. Donc, sans perte de généralité, les définitions et théorèmes qui suivent seront établis en considérant : $E = 0$.

Exemple 1.4.1. Soit le système différentielle

$$\begin{cases} x' = 10(y - x) \\ y' = 28x - y - xz \\ z' = xy - \frac{8}{3}z \end{cases}$$

ici, on a $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $f(x, y, z) = (10(y - x), 28x - y - xz, xy - \frac{8}{3}z)$. $E = (0, 0, 0)$ est l'unique état d'équilibre pour ce système car c'est la solution unique de l'équation $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

1.4.2 Stabilité local de l'état d'équilibre $E= 0$

Soit $\varphi(t, y_0)$ la solution unique du problème de (1.7) avec la condition unitiale $y(0) = y_0$ c'est à dire $\varphi'(t, y_0) = f(\varphi(t, y_0))$ et $\varphi(0, y_0) = y_0$.

Définition 1.4.2. L'état d'équilibre $E = 0$ du système (1.7) est

1. **stable** : si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \|y_0\| < \eta \implies, \forall t > 0, \|\varphi(t, y_0)\| < \varepsilon.$$

2. **instable** : s'il n'est pas stable .

3. **asymptotiquement stable** : s'il est stable et si

$$\exists \eta > 0 : \|y_0\| < \eta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, y_0)\| = 0$$

4. **marginalelement stable** : s'il est stable sans être asymptotiquement stable.

Exemple 1.4.2. Le point d'équilibre $(0,0)$ est asymptotiquement stable pour le système différentiel

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -3y \end{cases}$$

car on peut montrer que sa solution vérifiant la condition $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ est $\varphi(t) = (x_0 \cdot \exp(-t), y_0 \cdot \exp(-3t))$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

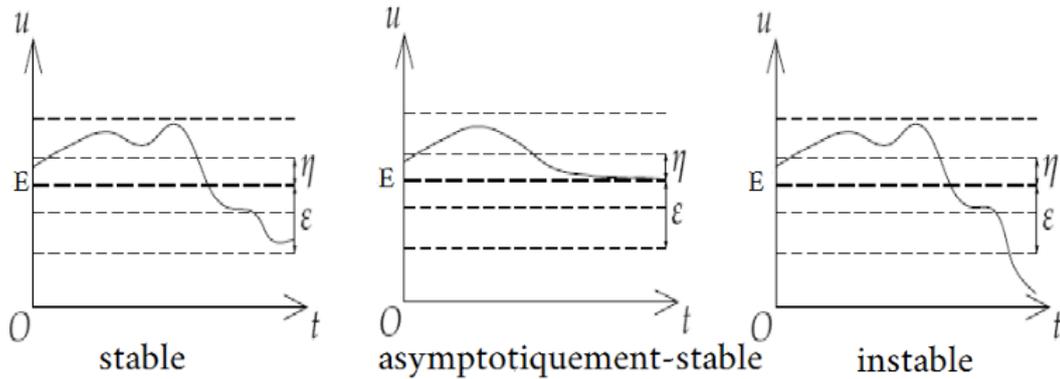
$$\|\varphi(t)\| < \varepsilon \implies |x_0| \cdot \exp(-t) < \varepsilon \text{ et } |y_0| \cdot \exp(-3t) < \varepsilon,$$

et comme $\exp(-t), \exp(-3t) \leq 1$, il suffit de prendre $\eta = \varepsilon$ d'où le point d'équilibre $(0,0)$ est stable. D'autre part, si $|x_0| \leq 2$ et $|y_0| \leq 2$, on a $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = (0,0)$.

1.4.3 Stabilité asymptotique globale

Définition 1.4.3. Si le système est asymptotiquement stable quelque soit le vecteur d'état initial y_0 , alors le point d'équilibre est globalement asymptotiquement (ou exponentiellement) stable.

Les dessins qui suivent illustrent les notions qui viennent d'être introduites :



1.4.4 Stabilité dans le cas linéaire

Pour le système différentiel linéaire

$$y'(t) = A.y(t) \quad (1.8)$$

où $A \in M_m(\mathbb{R})$ est une matrice constante. On s'intéresse au point d'équilibre $E = 0$.

Théorème 1.4.1. *le point d'équilibre $E = 0$ du système linéaire (1.8) est*

1. stable, si A est diagonalisable et ses valeurs propres ont des parties réelles négatives ou nulles.
 2. asymptotiquement stable, si toutes les valeurs propres de A ont leur partie réelle strictement négative.
 3. instable, si l'une au moins des valeurs propres de A est de partie réelle strictement positive.
- voir [12].

Remarque 1.4.2. *Le cas 1) peut être exprimé autrement : le point d'équilibre $E = 0$ du système linéaire (1.8) est stable si pour toute valeur propre λ de la matrice A , on a*

1. $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ et
2. $\operatorname{Re}(\lambda) = 0 \implies \dim \ker(A - \lambda I) = p$,

où p est l'ordre de multiplicité de la racine λ du polynôme $\det(XI - A)$.

Exemple 1.4.3. Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

C'est équivalent au système linéaire $Y' = A.Y$, tel que $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si λ est une valeur propre de la matrice A , alors

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

ce qui donne $\lambda = \pm i$, c'est à dire que $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$, donc le point d'équilibre $(0,0)$ de ce système n'est pas asymptotiquement stable.

1.4.5 Stabilité dans le cas non linéaire

Dans le cas non linéaire on utilise :

Linéarisation autour d'un équilibre

Supposons que E est un point d'équilibre pour le système différentiel

$$y'(t) = f(y(t)), \quad (1.9)$$

et que f est différentiable en E . Pour approcher la fonction $f(y(t))$, formons au voisinage de E sa matrice Jacobienne,

$$Df(E) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq m};$$

où les dérivées partielles sont calculées au point E , L'approximation affine de f s'écrit sous la forme :

$$f(y) = f(E) + Df(E) \cdot (y - E) = Df(E) \cdot u$$

où $u = y - E$, ce qui montre qu'au voisinage de E nous avons

$$u' = y' - E' = f(y) = Df(E) \cdot u,$$

car $f(E) = 0$.

Définition 1.4.4. On appelle système linéarisé autour de E associé au système nonlinéaire (1.9) le système linéaire

$$u' = Df(E) \cdot u . \quad (1.10)$$

Théorème 1.4.2. Si le système (1.9) est linéarisable autour de E , alors

1. le point d'équilibre E est stable si et seulement si l'origine est stable pour le système linéarisé.
2. le point d'équilibre E est asymptotiquement stable si, et seulement si, l'origine est asymptotiquement stable pour le système linéarisé.

voir [12].

1.4.6 Théorème de Lyapunov

On considère toujours $f(0) = 0$ et on regarde le point d'équilibre 0.

Définition 1.4.5. Soient U un voisinage de 0 dans Ω et $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable sur $U \setminus \{0\}$ telle que

- $V(0) = 0$ et $\forall u \neq 0, V(u) > 0$.
- $V'(u) := \langle f(u), \nabla V(u) \rangle \leq 0, \forall u \in U \setminus \{0\}$.

On appelle une telle fonction **fonction de Lyapunov**.

L'utilité des fonctions de Lyapunov réside dans le résultat suivant :

Théorème 1.4.3. (Lyapunov) S'il existe une fonction de Lyapunov pour l'équation

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1.11)$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $y_0 \in \Omega$.

alors le point d'équilibre 0 est stable.

Le théorème précédent ne fournit qu'une condition suffisante, mais permet souvent de conclure quand la méthode de linéarisation ne s'applique pas.

voir [4] ou [10].

Théorème 1.4.4. (*minima relatif*) Soient N un espace vectoriel normé réel, W un ouvert de N et $f : W \subset N \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en un point $\omega \in W$, et leurs dérivées partielles secondaires existent et continues en ω .

s'il existe un voisinage V de ω $V \subset W$, et f vérifie ce que suit :

$$1- Df(\omega) = 0 \quad \text{i.e} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n : \frac{\partial f(\omega)}{\partial x_i} = 0$$

$$2- \forall h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in V; h \neq 0 : D^2f(\omega)(h, h) > 0 \quad \text{i.e}$$

$$\forall h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in V; h \neq 0 : \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f(\omega)}{\partial x_i \partial x_j} > 0$$

Alors f admet en ω un minimum local (ou relatif)

Chapitre 2

Applications au système de Lotka-Volterra

2.1 Existence de solutions

2.1.1 Existence Locale

En posant $u = (x, y)$, le système (1) devient

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \\ u(0) = (x_0, y_0) \end{cases} \quad \text{avec } f(x, y) = (x(a - by), y(-c + dx))$$

où $(a, b, c, d > 0)$ et $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, $x_0, y_0 > 0$

Soit $v(x_0, y_0) \subset C([0, T], \mathbb{R}^2)$, un voisinage de (x_0, y_0) tel que :

$$v(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < \alpha \text{ et } |y - y_0| < \beta\} : \alpha > 0, \beta > 0$$

muni de la norme : $\|u\| = \|(x, y)\| = |x| + |y|$.

$\forall u_1, u_2 \in v(x_0, y_0)$ on a :

$$\begin{aligned}
 \|f(u_1(t)) - f(u_2(t))\| &= \|(x_1(a - by_1), y_1(-c + dx_1)) - (x_2(a - by_2), y_2(-c + dx_2))\| \\
 &= \|(a(x_1 - x_2) + b(x_1y_1 - x_2y_2), -c(y_1 - y_2) + d(y_1x_1 - y_2x_2))\| \\
 &\leq a|x_1 - x_2| + b|x_1y_1 - x_2y_2| + c|y_1 - y_2| + d|y_1x_1 - y_2x_2| \\
 &\leq a|x_1 - x_2| + c|y_1 - y_2| + (b + d)|x_1y_1 - x_2y_1 + x_2y_1 - x_2y_2| \\
 &\leq a|x_1 - x_2| + c|y_1 - y_2| + (b + d)|y_1||x_1 - x_2| + (b + d)|x_2||y_1 - y_2| \\
 &\leq (a + (b + d)|y_1|)|x_1 - x_2| + (c + (b + d)|x_2|)|y_1 - y_2| \\
 &\leq (a + (b + d)(\beta + |y_0|))|x_1 - x_2| + (c + (b + d)(\alpha + |x_0|))|y_1 - y_2|, \\
 &\quad \text{car : } |x| \leq \alpha + |x_0|, |y| \leq \beta + |y_0| \\
 &\leq k_1|x_1 - x_2| + k_2|y_1 - y_2|, \text{ tel que :} \\
 &\quad k_1 = a + (b + d)(\beta + |y_0|), k_2 = c + (b + d)(\alpha + |x_0|) \\
 &\leq k(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|), \text{ tel que : } k = \max(k_1, k_2) \\
 &\leq k\|u_1(t) - u_2(t)\|
 \end{aligned}$$

Alors f est localement lipschitzienne, donc le système (1) admet une unique solution maximale $u \in C([0, T], \mathbb{R}^2)$ d'après le théorème (1.3.1).

2.1.2 Positivité des solutions

Proposition 2.1.1. 1) Si $x_0 = 0$, donc $\forall t \in [0, T)$, $x(t) = 0$.

2) s'il existe $t_0 < T$ tel que $x(t_0) = 0$, alors $\forall t \in [0, T)$, $x(t) = 0$.

3) si $x_0 > 0$, donc $\forall t \in [0, T)$, $x(t) > 0$.

Par la même méthode pour y .

Preuve

1) Si $x_0 = 0$ le système (1) devient :

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = y(-c + dx) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$x'(t) = 0 \Rightarrow \int_0^t x'(s) ds = \int_0^t 0 ds \Rightarrow x(t) - x(0) = 0 \Rightarrow x(t) = x_0 = 0.$$

D'où $y'(t) = -cy \Rightarrow y = y_0 e^{-ct}$. Alors la solution de système (1) est $(0, y_0 e^{-ct})$, donc $\forall t \in [0, T), x(t) = 0$.

On voit ainsi que les ensembles de la forme $\{0\} \times]0, y_0]$ sont des trajectoires.

2) S'il existe $t_0 < T$ tel que $x(t_0) = 0$, alors la trajectoire associée coupe l'axe des ordonnées, ce qui est interdit par le corollaire 1.3.3.

3) Supposons que $x_0 > 0$ et $\exists t_1 \in]0, T) : x(t_1) = 0$, alors d'après le 2ème cas a devancé $x_0 = 0$ alors contradiction, donc $\forall t \in [0, T), x(t) > 0$.

Même démonstration pour y .

2.1.3 Existence Globale

Pour l'existence globale, on utilise la proposition suivante

Proposition 2.1.2. Soit $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x, y > 0$ par :

$$H(x, y) = dx - c \ln x + by - a \ln y \quad \text{où } (a, b, c, d > 0)$$

Alors H est une intégrale première pour le système (1), i.e. si $(x(t), y(t))$ est solution de (1) sur $[0, T)$, alors

$$\forall t \in [0, T); H(x(t), y(t)) = cste$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned} (1) &\implies \frac{x'}{y'} = \frac{x(a - by)}{y(-c + dx)} \\ (\text{après séparation des variables}) &\implies \frac{x'(-c + dx)}{x} = \frac{y'(a - by)}{y} \\ &\implies -c \frac{x'}{x} + dx' = a \frac{y'}{y} - by' \\ &\implies \int_0^t \left(-c \frac{x'(s)}{x(s)} + dx'(s)\right) ds = \int_0^t \left(a \frac{y'(s)}{y(s)} - by'(s)\right) ds \\ &\implies [-c \ln(x(s)) + dx(s)]_0^t = [a \ln(y(s)) - by(s)]_0^t \\ &\implies -c \ln x + dx = a \ln y - by + cste \\ &\implies H(x(t), y(t)) = cste \end{aligned}$$

Proposition 2.1.3. *On tout point $M(x, y)$ le gradient de H est perpendiculaire au champ de vecteur $u' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ où (x, y) est une solution de système (1).*

En effet

On a le gradient de H : $\nabla H(x, y) = \left(\frac{\partial H(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \right) = \left(d - \frac{c}{x}, b - \frac{a}{y} \right)$.

alors on obtient :

$$\begin{aligned} \langle u', \nabla H(u) \rangle &= (ax - bxy)\left(d - \frac{c}{x}\right) + (-cx + dxy)\left(b - \frac{a}{y}\right) \\ &= adx - ac - bdx y + bcy + ac + bdx y - adx \\ &= 0. \end{aligned}$$

D' où le gradient de H est perpendiculaire au champ de vecteur $(x', y')^t$ pour le système (1).

La connaissance de cette intégrale première nous permet de montrer que (x, y) sont bornées :

2.1.4 la bornitude de solution maximale

Lemme 2.1.1. *La solution maximale $(x(t), y(t))$ est bornée.*

Preuve : Cela provient de la coercivité de l'intégrale première. Il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que

$$\forall x > A, \quad c \ln x < \frac{dx}{2} \quad \text{et} \quad \forall y > B, \quad a \ln y < \frac{by}{2}$$

D'autre part :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall x, y > 0 \quad \begin{cases} dx \geq c \ln x + \alpha \\ by \geq a \ln y + \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx - c \ln x \geq \alpha & \dots\dots(01) \\ by - a \ln y \geq \alpha & \dots\dots(02) \end{cases}$$

On a :

$$\forall x > A; \quad c \ln x < \frac{dx}{2} \Rightarrow \forall x > A; \quad dx - c \ln x > \frac{dx}{2} \quad \dots\dots(03)$$

$$(02) \quad \text{et} \quad (03) \Rightarrow \forall x > A; \quad dx - c \ln x + by - a \ln y = H(x, y) > \alpha + \frac{dx}{2}.$$

$$\text{Et on a : } \forall y > B; \quad a \ln y < \frac{by}{2} \Rightarrow \forall y > B; \quad by - a \ln y > \frac{by}{2} \dots\dots(04)$$

$$(01) \quad \text{et} \quad (04) \Rightarrow \forall y > B; \quad \forall x > A : dx - c \ln x + by - a \ln y = H(x, y) > \alpha + \frac{by}{2}.$$

Alors :

$$\forall x > A, \forall y > B : \begin{cases} \frac{2}{d}(H(x, y) - \alpha) > x \\ \frac{2}{b}(H(x, y) - \alpha) > y \end{cases}$$

On déduit que :

$$\forall t \in [0, T]: \begin{cases} 0 < x(t) < \max\{A, \frac{2}{d}(H(x_0, y_0) - \alpha)\} \\ 0 < y(t) < \max\{B, \frac{2}{b}(H(x_0, y_0) - \alpha)\} \end{cases} \quad \text{car : } H(x, y) = \text{cste} = H(x_0, y_0)$$

Alors la solution maximale $(x(t), y(t))$ est **bornée**.

Remarque 2.1.1. On déduit d'après le théorème (1.3.4) que $T = +\infty$.

Alors les solutions maximales $(x(t), y(t))$ du système de Lotka-Volterra sont définies $\forall t \geq 0$.

2.2 Comportement au voisinage d'un point d'équilibre

Les points d'équilibre du système (1) :

$$(1) \Rightarrow X' = f(X) : X = (x, y); f(x, y) = (x(a - by), (-c + dx))$$

$$f(X) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(a - by) = 0 \\ y(-c + dx) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{ou} \quad y = \frac{a}{b} \\ y = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{c}{d} \end{cases}$$

Alors on a deux points d'équilibre du système (1) qui sont : $O(0, 0)$ et $\omega(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$

2.2.1 Étude de l'équilibre $O(0, 0)$

On a

$$\begin{cases} x'(t) = x(a - by) = f_1(x, y) \\ y'(t) = y(-c + dx) = f_2(x, y) \end{cases} \quad \text{tel que } f(x, y) = (f_1, f_2)$$

La fonction f est différentiable en $O(0, 0)$ et

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } Df(0,0) = A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow -(a - \lambda)(c + \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = a > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -c < 0.$$

Une valeur propre est de partie réelle strictement positive, le théorème (1.4.1 et 1.4.2) s'applique et l'équilibre $O(0,0)$ est instable. On peut même affiner le résultat et dire que la direction x est instable alors que la direction y est asymptotiquement stable.

2.2.2 Étude de l'équilibre $\omega(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$

On pose $x = g + \frac{c}{d}$ et $y = h + \frac{a}{b}$. Alors $(x, y) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b}) \Leftrightarrow (g, h) = (0, 0)$

$$\begin{aligned} (1.6) \quad & \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} g' = (g + \frac{c}{d})(a - b(h + \frac{a}{b})) \\ h' = (h + \frac{a}{b})(-c + d(g + \frac{c}{d})) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} g' = -bh(g + \frac{c}{d}) \\ h' = dg(h + \frac{a}{b}) \end{cases} \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} g' = -bh(g + \frac{c}{d}) \\ h' = dg(h + \frac{a}{b}) \end{cases} \Leftrightarrow G' = F(G) : F(g, h) = (-bh(g + \frac{c}{d}), dg(h + \frac{a}{b}))$$

La fonction F est différentiable sur \mathbb{R}^2 . Alors la linéarisation du système (2.2) est le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} G'(t) = DF(0)G(t) \\ G(0) = G_0 \quad \text{telque :} \end{cases} \quad \text{On pose :} \quad \begin{cases} F_1(g, h) = -bh(g + \frac{c}{d}) \\ F_2(g, h) = dg(h + \frac{a}{b}) \end{cases}$$

$$DF(g, h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial g} & \frac{\partial F_1}{\partial h} \\ \frac{\partial F_2}{\partial g} & \frac{\partial F_2}{\partial h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bh & -bg - \frac{bc}{d} \\ dh + \frac{da}{b} & dg \end{pmatrix}$$

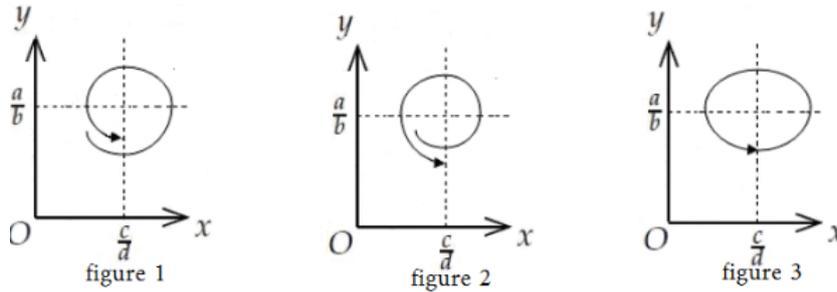
$$\text{d'où } DF(0,0) = B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{cb}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + ac = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i\sqrt{ac} \text{ et } \lambda_2 = -i\sqrt{ac}$$

λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures.

Dans ce cas, le principe de linéarisation ne s'applique pas.

Il y a trois comportements possibles des orbites du système (1) à savoir :



On recherche une fonction de Lyapunov.

Étape 1. La fonction H_1 admet en $O(0,0)$ un minimum local.

$H_1 : D_{H_1} =]-\frac{c}{d}, +\infty[\times]-\frac{a}{b}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. tel que : $H_1(x, y) = H(x + \frac{c}{d}, y + \frac{a}{b})$.

$$H_1(x, y) = dx - c \ln(x + \frac{c}{d}) + by - a \ln(y + \frac{a}{b}) + a + c$$

On a H_1 est différentiable en $O(0,0)$.

$$\frac{\partial H_1(x, y)}{\partial x} = d - \frac{c}{x + \frac{c}{d}} \text{ et } \frac{\partial H_1(x, y)}{\partial y} = b - \frac{a}{y + \frac{a}{b}}$$

$$\frac{\partial H_1(0,0)}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial H_1(0,0)}{\partial y} = 0$$

Et on a

$$\frac{\partial^2 H_1(x, y)}{\partial x^2} = \frac{c}{(x + \frac{c}{d})^2}, \quad \frac{\partial^2 H_1(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H_1(x, y)}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 H_1(x, y)}{\partial y^2} = \frac{a}{(y + \frac{a}{b})^2}$$

Alors les dérivées partielles secondaires de H_1 existent dans D_{H_1} et sont continues en O .

$\forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2; h \neq 0 :$

$$D^2 H_1(0, 0)(h, h) = h_1^2 \frac{\partial^2 H_1(0, 0)}{\partial x^2} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 H_1(0, 0)}{\partial x \partial y} + h_2 h_1 \frac{\partial^2 H_1(0, 0)}{\partial y \partial x} + h_2^2 \frac{\partial^2 H_1(0, 0)}{\partial y^2},$$

$$D^2 H_1(0, 0)(h, h) = h_1^2 \frac{d^2}{c} + h_1 h_2 \times (0) + h_2 h_1 \times (0) + h_2^2 \frac{b^2}{a} = \frac{h_1^2 d^2}{c} + \frac{h_2^2 b^2}{a} > 0.$$

Alors d'après le théorème (1.4.4) H_1 admet un minimum en o :

$$H_1(0, 0) = H\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right).$$

Étape 2. La fonction V est une fonction de Lyapunov .

$$V : D_{H_1} =]-\frac{c}{d}, +\infty[\times]-\frac{a}{b}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : V(x, y) = H_1(x, y) - H\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right).$$

D'après ce qui précède on déduit que :

$$\forall (x, y) \in D_{H_1} =]-\frac{c}{d}, +\infty[\times]-\frac{a}{b}, +\infty[: H_1(x, y) \geq H\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$$

Alors :

i) $V(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)?$

On a $(x, y) = (0, 0) \Rightarrow V(x, y) = 0$ évident .

$$V(x, y) = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)?$$

Supposons que : $\exists (x_1, y_1) \in D_{H_1} - \{(0, 0)\} : V(x_1, y_1) = 0.$

On a d'après la définition de H_1 , $\forall (x, y) \in D_{H_1}; V(x, y) \geq 0.$

Donc $V(x_1, y_1)$ est une valeur minimum de $V.$

$$\text{Alors : } \begin{cases} \frac{\partial V(x_1, y_1)}{\partial x} = b - \frac{a}{y_1 + \frac{a}{b}} = 0 \\ \frac{\partial V(x_1, y_1)}{\partial y} = d - \frac{c}{x_1 + \frac{c}{d}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad \text{contradiction,}$$

d'où : $V(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$

ii) $\forall (x, y) \in D_{H_1} - \{(0, 0)\}; V(x, y) > 0$ car : $H\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ est une valeur minimum de H_1 au point $(0, 0).$

iii) $\forall (x, y) \in D_{H_1}$:

$$\begin{aligned}
 V'(x, y) &= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \\
 &= \left(d - \frac{c}{x + \frac{c}{d}}\right)x' + \left(b - \frac{a}{y + \frac{a}{b}}\right)y' \\
 &= \left(d - \frac{c}{x + \frac{c}{d}}\right)(-by(x + \frac{c}{d})) + \left(b - \frac{a}{y + \frac{a}{b}}\right)(dx(y + \frac{a}{b})) \\
 &= \left(\frac{dx}{x + \frac{c}{d}}\right)(-by(x + \frac{c}{d})) + \left(\frac{by}{y + \frac{a}{b}}\right)(dx(y + \frac{a}{b})) \\
 &= -dbxy + dbxy = 0.
 \end{aligned}$$

Alors V est une fonction de Lyapunov, donc le point $(0, 0)$ est stable par rapport au système (2.2). D'où l'équilibre $\omega(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ est stable.

Par conséquent le deuxième figure n'a pas lieu.

2.3 Étude globale des solutions

2.3.1 Périodicité des solutions

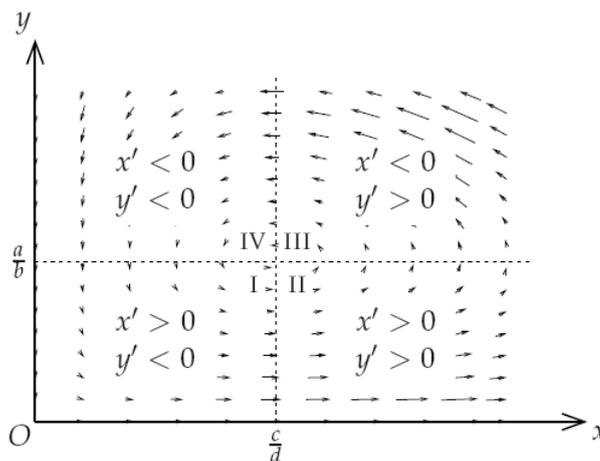
D'après ce qui précède il reste deux cas : est ce que les orbites de système de Lotka-Volterra sont périodiques, ou stables non périodiques ?

Le théorème qui suit répond à cette question.

Théorème 2.3.1. *Les solutions du système de Volterra-Lotka sont périodiques.*

Preuve :

On a dessiné sur le schéma suivant le champ des vecteurs pour le système de Lotka-Volterra. Celui-ci délimite le quart de plan en quatre zones, notées I, II, III et IV, dans lesquelles x et y sont monotones.



En effet :

$$\begin{aligned}
 \text{I} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid x < \frac{c}{d} \text{ et } y < \frac{a}{b}\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid -c + dx < 0 \text{ et } a - by > 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid y(-c + dx) < 0 \text{ et } x(a - by) > 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid x' > 0 \text{ et } y' < 0\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid x > \frac{c}{d} \text{ et } y < \frac{a}{b}\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid -c + dx > 0 \text{ et } a - by > 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid y(-c + dx) > 0 \text{ et } x(a - by) > 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid x' > 0 \text{ et } y' > 0\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{III} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid x > \frac{c}{d} \text{ et } y > \frac{a}{b}\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid -c + dx > 0 \text{ et } a - by < 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid y(-c + dx) > 0 \text{ et } x(a - by) < 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid x' < 0 \text{ et } y' > 0\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IV} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid x < \frac{c}{d} \text{ et } y > \frac{a}{b}\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid -c + dx < 0 \text{ et } a - by < 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid y(-c + dx) < 0 \text{ et } x(a - by) < 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid x' < 0 \text{ et } y' < 0\}.
 \end{aligned}$$

Dans les quatre zones x et y sont monotones .

Notre preuve consiste à suivre une trajectoire à travers de ces zones pour montrer qu'elle est périodique.

Soit donc (x_0, y_0) le point initial, qu'on suppose - sans perte de généralité - dans la zone I.

On note $(x(t), y(t))$ la solution de (1) qui part de (x_0, y_0) .

Étape 1. La solution parcourt les quatre zones successivement.

- Dans I on a : x croissante et y décroissante , et comme $y(t) \neq 0$ pour tout $t > 0$, il existe $t_1 > 0$ à partir duquel $M(t) = M(x(t), y(t))$ quitte la zone I et rentre dans la zone II.

En effet si $M(t)$ reste dans I pour tout temps, alors x et y sont bornés. Comme ils sont monotones, ils convergent tous-deux vers des limites respectives x_∞, y_∞ . D'après (1), on en déduit que x' et y' convergent aussi; leur limite ne peut être que 0 : en effet si x' tend vers $\neq 0$, alors x est équivalent à t , donc ne peut converger. En conséquence, toujours grâce à (1), (x_∞, y_∞) est un point stationnaire.

Or, comme x croît, $x_\infty > 0$ et puisque y décroît, $y_\infty < \frac{a}{b}$. On aboutit donc à une contradiction, puisque les deux seuls points stationnaires sont $(0, 0)$ et $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

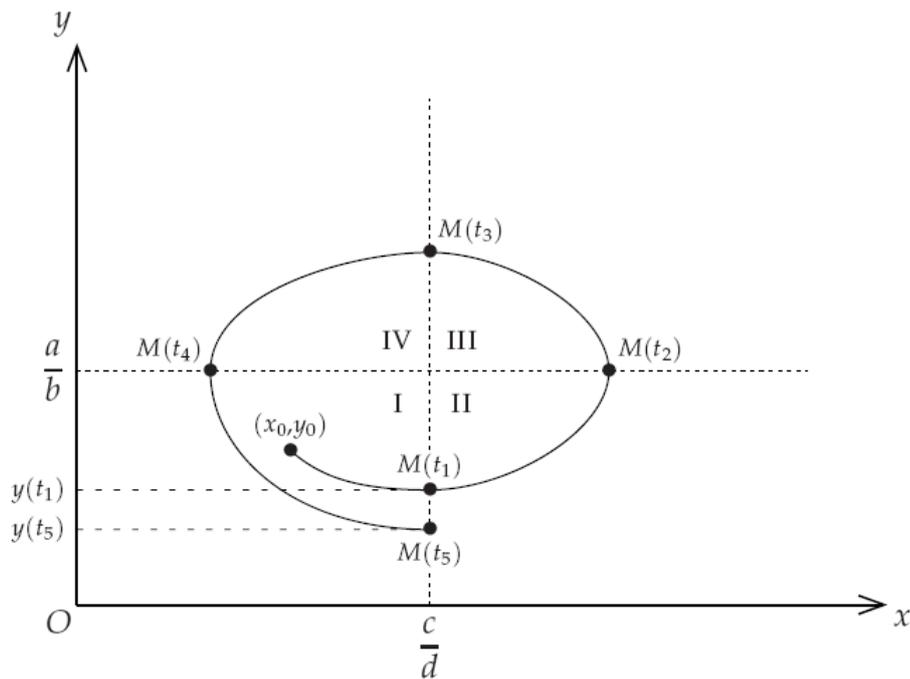
Ainsi, $M(t)$ sort de la zone I. C'est, bien-sûr, dans la zone II qu'elle entre, puisque y décroît.

- Dans II on a : x et y croissante et comme elles sont bornées d'après le lemme (2.1.1) , il existe $t_2 > t_1$ à partir duquel $M(t) = M(x(t), y(t))$ quitte la zone II et rentre dans la zone III.

Ici encore x et y sont monotones et bornées (attention, dans cette zone, il faut invoquer le lemme (2.1.1)). Par le même raisonnement qu'à l'étape précédente, on prouve l'existence d'un instant $t_2 > t_1$ à partir duquel $M(t)$ quitte la zone II pour la zone III.

Les points suivants se démontrent de même :

- . il existe $t_3 > t_2$ à partir duquel $M(t) = M(x(t), y(t))$ quitte la zone III et rentre dans la zone IV.
- . il existe $t_4 > t_3$ à partir duquel $M(t) = M(x(t), y(t))$ quitte la zone IV et rentre dans la zone I.
- . il existe $t_5 > t_4$ à partir duquel $M(t) = M(x(t), y(t))$ quitte la zone I et rentre dans la zone II.



Étape 2. Les points $M(t_1)$ et $M(t_5)$ sont confondus.

Par définition, on a déjà $x(t_1) = x(t_5) = \frac{c}{d}$. De plus, comme $M(t_1), M(t_5)$ sont des points d'une même trajectoire, alors :

$$H(x(t_1), y(t_1)) = cste = H(x(t_5), y(t_5)).$$

D'où $H(x(t_1), y(t_1)) = H(x(t_5), y(t_5)) \dots (*)$

$$(*) \Rightarrow by_1 - a \ln(y_1) = by_5 - a \ln(y_5) \dots (**) \quad \text{car : } x(t_1) = x(t_5) .$$

Soit h une fonction telle que

$$h :]0, \frac{a}{b}[\rightarrow \mathbb{R}; h(y) = by - a \ln(y).$$

$$\text{On a } h'(y) = b - \frac{a}{y} = \frac{by-a}{y}$$

y	0	$\frac{a}{b}$
$h'(y)$	-	
$h(y)$	$+\infty$	$h(\frac{a}{b})$

Comme h est strictement décroissante , alors h est injective .

Donc : (**) $\Rightarrow y(t_1) = y(t_5)$

Alors : $M(t_5) = M(t_1)$

Étape 3. Les solutions sont périodiques

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\tilde{x}(t) = x(t_1 + t) \quad \text{et} \quad \tilde{y}(t) = y(t_1 + t)$$

et

$$\bar{x}(t) = x(t_5 + t) \quad \text{et} \quad \bar{y}(t) = y(t_5 + t)$$

Et comme (\tilde{x}, \tilde{y}) et (\bar{x}, \bar{y}) vérifient le même problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases} \quad (x(0), y(0)) = (x_1, y_1)$$

où $x_1 = \tilde{x}(0) = \frac{c}{d} = x(t_5) = \bar{x}(0)$ et $y_1 = \tilde{y}(0) = y(t_5) = \bar{y}(0)$.

D'où $(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0)) = (\bar{x}(0), \bar{y}(0))$.

Alors d'après corollaire (1.3.3) $(x(t_1 + t), y(t_1 + t)) = (x(t_5 + t), y(t_5 + t))$

D'où $\forall t \in \mathbb{R}_+$:

$$(x(t_1 + t + (t_5 - t_1)), y(t_1 + t + (t_5 - t_1))) = (x(t + t_5), y(t + t_5)) = (x(t_1 + t), y(t_1 + t))$$

$$\forall s \in \mathbb{R}_+, M(s + (t_5 - t_1)) = M(s)$$

Et par suite la solution est périodique, de période $(t_5 - t_1)$.

Remarque 2.3.1. *Le caractère autonome du système différentiel (1) est essentiel. Dans le cas contraire, le deuxième "tour" peut être effectué à une vitesse différente du premier, si bien que les solutions ne sont pas périodiques alors que les trajectoires sont des courbes fermées.*

Pour prouver le théorème (2.3.1), on peut montrer dans un premier temps que les trajectoires sont des courbes fermées (il s'agit d'étudier la géométrie des lignes de niveau de H). Ensuite on utilisera une argumentation voisine de celle décrite plus haut, pour conclure à la périodicité des solutions.

2.3.2 Moyenne sur une période

On définit les moyennes de x et y sur une période $[0, T]$ comme suit :

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad \text{et} \quad \langle y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

Proposition 2.3.1. On a $\langle x \rangle = \frac{c}{d}$ et $\langle y \rangle = \frac{a}{b}$.

Preuve :

$$\begin{cases} x'(t) = x(a - by) \\ y'(t) = y(-c + dx) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{b} \frac{x'}{x} + \frac{a}{b} \\ x = \frac{1}{d} \frac{y'}{y} + \frac{c}{d} \end{cases}$$

Alors :

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{c}{d} + \frac{1}{d} \frac{y'(t)}{y(t)} \right) dt \quad \text{et} \quad \langle y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b} \frac{x'(t)}{x(t)} \right) dt$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \left[\frac{c}{d} t + \frac{1}{d} \ln(y(t)) \right]_0^T \quad \text{et} \quad \langle y \rangle = \frac{1}{T} \left[\frac{a}{b} t - \frac{1}{b} \ln(x(t)) \right]_0^T.$$

D'où $\langle x \rangle = \frac{c}{d}$ et $\langle y \rangle = \frac{a}{b}$.

Remarque 2.3.2. Si, dans le modèle de Lotka-Volterra, on ajoute un prédateur commun aux deux espèces (chasse ou pêche), on transforme (1) en

$$\begin{cases} x'(t) = x(a - by) - ex \\ y'(t) = y(-c + dx) - fy \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x'(t) = x(\bar{a} - by) \\ y'(t) = y(-\bar{c} + dx) \end{cases} \quad \text{tel que} \quad \bar{a} = a - e, \bar{c} = c + f.$$

On retrouve donc un système du type Lotka-Volterra. Les moyennes de x et y sur une période sont donc

$$\langle x \rangle = \frac{\bar{c}}{d} = \frac{c + f}{d} \quad \text{et} \quad \langle y \rangle = \frac{\bar{a}}{b} = \frac{a - e}{b}$$

Considérons maintenant l'explication de Volterra pour le problème initial, concernant l'augmentation des poissons prédateurs. Pêcher réduit l'augmentation du nombre des proies, ceci signifie que la constante a dans l'équation initiale diminue et devient $a - e$ pour un certain

$e > 0$. Au même temps, le taux de diminution de la population des prédateurs devient plus grand (au lieu de c on a $c + f$ avec $f > 0$). Par contre, les constantes d'interaction a et b ne changent pas.

Pour conclure, la densité des prédateurs devient $\frac{a - e}{b}$ donc plus petit et celle des proies $\frac{c + f}{d}$ plus grand. Si on arrête de pêcher, on constate ainsi une augmentation des prédateurs et une diminution des proies. Ceci explique bien le fait analysé par Volterra.

2.4 Calcul de la période

Si on effectue le changement de fonction inconnue

$$p(t) = \ln\left[\frac{d}{c}x(t)\right] \quad \text{et} \quad q(t) = \ln\left[\frac{b}{a}y(t)\right]$$

alors le système (1) devient :

$$\begin{cases} p' = a(1 - e^q) \\ q' = -c(1 - e^p) \end{cases}$$

si bien qu'en posant $G(p, q) = a(q - e^q) - c(p - e^p)$, il se met sous la forme

$$\begin{cases} p' = \partial_q G(p, q) \\ q' = \partial_p G(p, q) \end{cases} \quad (2.3)$$

un tel système est dit hamiltonien.

Le point d'équilibre correspondant à $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ est $(p_0, q_0) = (0, 0)$.

Théorème 2.4.1. On pose $F(r, \theta) = G(r \cos \theta, r \sin \theta) - G(p_0, q_0)$. Alors la période de (p, q) est donnée par

$$\tau = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\mathcal{F}(\theta)} \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}(\theta) = \frac{\partial_r F(g(\theta), \theta)}{g(\theta)}$$

où la fonction g est définie implicitement par $F(g(\theta), \theta) = 0$.

Preuve :

Étape 1. g est bien définie

Il suffit d'appliquer le théorème des fonctions implicites, après avoir vérifié que

$$F(r, \theta) = 0 \implies \partial_r F(r, \theta) \neq 0$$

Soit $(r, \theta) \neq 0$ tel que $F(r, \theta) = 0$; on pose $p = r \cos \theta$ et $q = r \sin \theta$.

Alors $\exists t, (p, q) = (p(t), q(t))$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \partial_r F(r, \theta) &= \cos \theta \partial_p G(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \partial_q G(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \frac{1}{r(t)} (q(t)p'(t) - p(t)q'(t)) \end{aligned}$$

où on a posé $r^2(t) = p^2(t) + q^2(t)$. Ainsi $\partial_r F(r, \theta) = 0$ signifie

$$af(q) + cf(p) = 0 \quad \text{avec} \quad f(x) = x(1 - e^x)$$

Comme f est strictement positive sur \mathbb{R}^* , nulle en 0, l'équation précédente n'a pas de solutions $(p, q) \neq (0, 0)$ donc $\partial_r F(r, \theta) = 0$ et le théorème des fonctions implicites s'applique.

Étape 2. $\theta' = \mathcal{F} \circ \theta$

On dérive $p(t)$ et $q(t)$:

$$p'(t) = r'(t) \cos(\theta(t)) - r(t) \sin(\theta(t)) \theta'(t)$$

$$q'(t) = r'(t) \sin(\theta(t)) + r(t) \cos(\theta(t)) \theta'(t)$$

En multipliant la première égalité par $\sin(\theta(t))$, la seconde par $\cos(\theta(t))$ et en ajoutant, on obtient :

$$\frac{1}{r(t)} (q(t)p'(t) - p(t)q'(t)) = r(t)\theta'(t)$$

d'où le résultat car $g(\theta(t)) = r(t)$.

Étape 3. Conclusion

Soit t_0 tel que $\theta(t_0) = 0$, alors $\theta(t + \tau) = 2\pi$. Le changement de variable $t = t(\theta)$ est admissible (car strictement croissant) :

$$\tau = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} dt = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\theta'(t(\theta))} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\mathcal{F}(\theta)}$$

Chapitre 3

Approximation numérique des solutions

3.1 Rappels sur les méthodes numériques

L'objet de ce paragraphe est de présenter brièvement les méthodes simples les plus utilisées pour la résolution numérique des équations différentielles ordinaires.

On renvoie [5], [7], [8]

3.1.1 Quelques méthodes classiques

On désire approcher la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)), & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

On suppose que la fonction f est lipschitzienne. Afin de construire une approximation numérique sur l'intervalle $[0, T]$, on introduit une subdivision

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$$

de pas $h_n = t_{n+1} - t_n$. Notre but est de trouver une suite $(u_n)_{0 \leq n \leq N}$ telle que u_n soit une approximation de $u(t_n)$. Toutes les méthodes présentées ici sont des méthodes de Runge-

Kutta ; leur point de départ est la formule suivante :

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} u'(t)dt = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(t))dt \quad (3.2)$$

Il suffit ensuite d'utiliser une formule d'intégration numérique pour approcher l'intégrale précédente :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(t))dt \simeq I(f \circ u, t_n, t_{n+1})$$

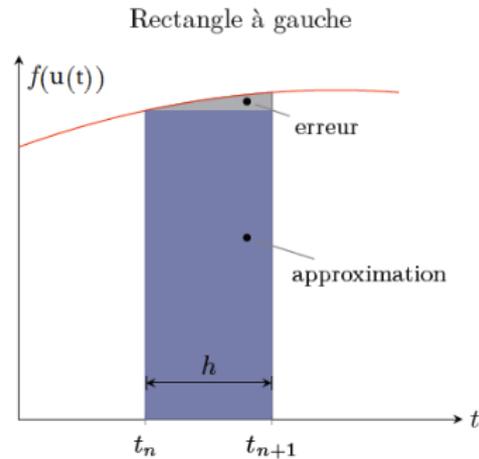
la méthode d'Euler explicite :

L'intégrale (3.2) peut s'approcher par La méthode des rectangles à gauche :

$$I(f \circ u, t_n, t_{n+1}) \simeq h_n f(u(t_n))$$

D'où le schéma itératif suivant

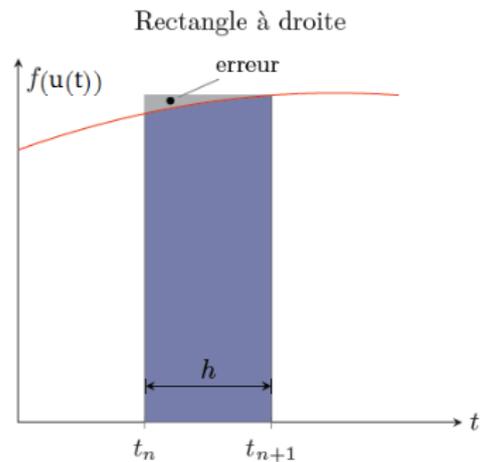
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h_n f(u_n) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.3)$$



la méthode d'Euler implicite :

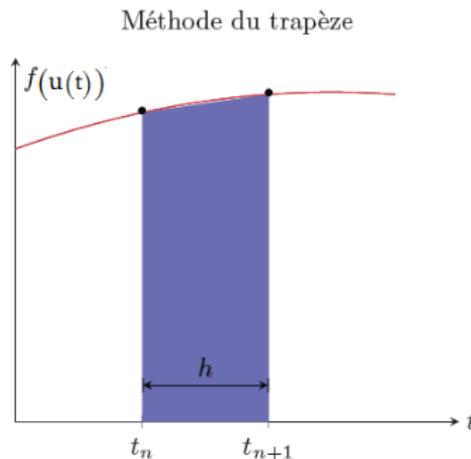
De la même façon, la formule des rectangles à droite fournit la méthode d'Euler implicite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h_n f(u_{n+1}) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.4)$$



La formule des trapèzes, quant à elle, est à l'origine de **la méthode de Crank-Nicolson** :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h_n}{2}(f(u_n) + f(u_{n+1}))$$



Enfin, on peut utiliser la formule de Simpson :

$$I(f(u(.)), t_n, t_{n+1}) \simeq \frac{h_n}{6}(f(u(t_n)) + 4f(u(t_n + \frac{h_n}{2})) + f(u(t_{n+1})))$$

après l'approximation de $u(t_n + \frac{h_n}{2})$ ou peut définir alors u_{n+1} comme suit :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h_n}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

où $k_1 = f(u_n)$, $k_2 = f(u_n + \frac{h_n}{2}k_1)$, $k_3 = f(u_n + \frac{h_n}{2}k_2)$, $k_4 = f(u_n + h_n k_3)$

On vient de décrire **la méthode de Runge-Kutta classique**.

Explication :

Les quatre méthodes décrites dans ce paragraphe, deux sont explicites : il s'agit des méthodes d'Euler explicite et de Runge-Kutta classique. Cela signifie qu'un simple calcul permet de déterminer u_{n+1} à partir de u_n . En revanche les méthodes d'Euler implicite et de Crank-Nicolson nécessitent la résolution d'une équation pour calculer u_{n+1} connaissant u_n . De telles méthodes sont dites **implicites** .

3.1.2 Notions de consistance et de stabilité

On peut écrire tous les schémas du paragraphe précédent sous la forme :

$$u_{n+1} = \Phi_{h_n}(u_n)$$

Exemple 3.1.1. *par exemples :*

1- la méthode d'Euler explicite : $\Phi_{h_n}(u_n) = u_n + h_n f(u_n)$

2- la méthode de Crank-Nicolson : $\Phi_{h_n}(u_n) = u_n + \frac{h_n}{2}(f(u_n) + f(u_{n+1}))$

3- la méthode de Runge-Kutta classique : $\Phi_{h_n}(u_n) = u_{n+1} = u_n + \frac{h_n}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$

Définitions :

Définition 3.1.1. (l'erreur de consistance locale) : On définit l'erreur de consistance locale ε_n comme l'erreur commise par le schéma sur la solution exacte $u(\cdot)$:

$$\varepsilon_n = u(t_{n+1}) - \Phi_{h_n}(u(t_n))$$

Définition 3.1.2. (La consistance) : On dit que la méthode est consistante d'ordre $p \in \mathbb{N}$ si l'erreur de consistance globale est d'ordre p par rapport à $h = \max_n h_n$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n| = O(h^p)$$

Définition 3.1.3. (La stabilité) : La stabilité se définit comme suit : soit v_n une suite vérifiant un schéma perturbé :

$$v_{n+1} = \Phi_{h_n}(v_n) + \mu_n$$

On dit qu'il y a stabilité si on peut maîtriser l'erreur commise :

$$\max_{0 \leq n \leq N} |u_n - v_n| \leq c(|u_0 - v_0| + \sum_{n=0}^{N-1} |\mu_n|)$$

Proposition 3.1.1. Si le schéma est à la fois consistant et stable alors il est convergent .

En effet : si on prend pour v_n la solution exacte $u(t_n)$, alors $\mu_n = \varepsilon_n$ par définition de l'erreur de consistance. Si on choisit $u_0 = u(0)$ pour initialiser la suite (u_n) , et que la méthode est consistante d'ordre p et stable, alors

$$\max_{0 \leq n \leq N} |u_n - u(t_n)| \leq ch^p$$

ce qui prouve la convergence.

3.2 Application au système de Lotka-Volterra

3.2.1 Visualisation des solutions numériques

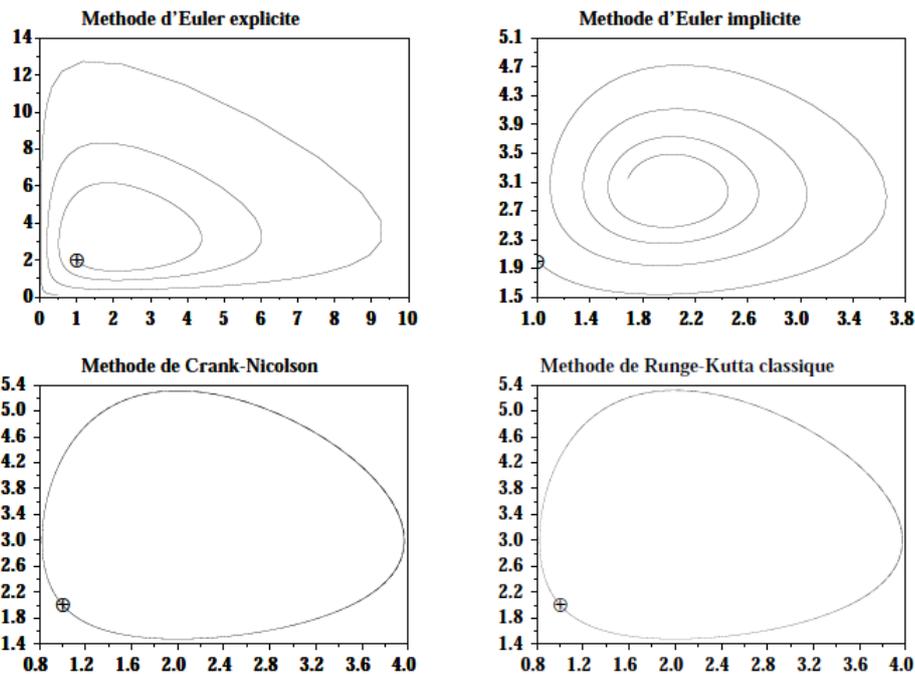
On a programmé les quatre méthodes à l'aide du logiciel scilab et on les a appliqué au système (1) pour les paramètres suivants :

$$a = 3, b = 1, c = 2 \quad \text{et} \quad d = 1$$

On a fixé la condition initiale à :

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 2$$

On calcule la solution exacte sur l'intervalle $[0, T]$ avec $T = 10$; le pas de discrétisation est constant $h = 0.05$. Les courbes suivantes représentent la solution numérique dans le plan de phase (x, y)



-le caractère \oplus repère la condition initiale :

Seul les deux dernières méthodes fournissent une solution apparemment périodique.

Les solutions numériques obtenues à l'aide des méthodes d'Euler sont des spirales.

Le paragraphe suivant se propose d'en faire l'étude dans le cas plus simple d'un système différentiel linéaire.

3.2.2 Étude théorique des schémas dans le cas linéaire

À une affinité près, linéarisé du système de Lotka-Volterra au voisinage du point d'équilibre intérieur s'écrit :

$$\begin{cases} x'(t) = -y \\ y'(t) = x \end{cases} \quad (3.5)$$

la solution exacte est

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{cases}$$

Les trajectoires de (3.5) sont des cercles d'équation $x^2 + y^2 = cste$. Il s'agit de savoir si les schémas numériques conservent cette propriété. Pour cela on calcule $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2$ en fonction de $x_n^2 + y_n^2$ pour chacun des schémas :

— **Euler explicite :**

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 &= (x_n + h(-y_n))^2 + (y_n + h(x_n))^2 \\ &= x_n^2 + h^2 y_n^2 - 2hx_n y_n + y_n^2 + h^2 x_n^2 + 2hx_n y_n \\ &= (1 + h^2)(x_n^2 + y_n^2) \end{aligned}$$

Donc $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (1 + h^2)(x_n^2 + y_n^2)$

— **Euler implicite :**

On a $x_{n+1} = x_n + h(-y_{n+1})$, $y_{n+1} = y_n + h(x_{n+1})$.

Alors $x_n = x_{n+1} + hy_{n+1}$, $y_n = y_{n+1} - h(x_{n+1})$, d'où

$$(x_n^2 + y_n^2) = (1 + h^2)x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2.$$

Donc $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = \frac{1}{1 + h^2}(x_n^2 + y_n^2)$, par la même démarche on trouve :

— **Crank-Nicolson :** $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = x_n^2 + y_n^2$

— **Runge-Kutta** : $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = \left(1 - \frac{h^6}{72} + \frac{h^6}{576}\right)(x_n^2 + y_n^2)$

Il apparaît que seule la méthode de Crank-Nicolson conserve l'intégrale première $x^2 + y^2$. La méthode d'Euler explicite augmente sa valeur ($1 + h^2 > 1$) alors que pour la méthode d'Euler implicite le rayon du cercle diminue. Cela explique le comportement en spirale vu au paragraphe précédent (au moins au voisinage de l'équilibre). Enfin la méthode de Runge-Kutta ne conserve pas l'intégrale première, mais le coefficient multiplicateur est très proche de 1, donc on observe numériquement une solution périodique, tant que T n'est pas trop grand.

Conclusion

A la lumière de ce qui précède, nous avons vu que la modélisation mathématiques permettent la description qualitative et quantitative du comportement des populations de différentes espèces dans la nature. Cette technique peut être utilisée aussi comme un outil efficace pour l'étude de la stabilité de certains phénomènes (biologiques , écologique..). Du point de vue mathématique, l'étude du système Lotka-Volterra montre que

- Il admet une solution maximale positive, périodique.
- Le point d'équilibre $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ est stable et point d'équilibre $O(0, 0)$ est instable.
- Les portraits de phase sont fermés pour chaque point de départ (x_0, y_0) .

Pratiquement, Le modèle Lotka-Volterra est un modèle prédateur-proie classique de la dynamique du système qui permettra d'atteindre l'équilibre de la façons suivante : à mesure que la population de prédateurs augmente, la population de proies diminue, entraînant la chute de la population de prédateurs et le maintien de l'équilibre du système.

Ils existent d'autres approches pour le problème prédateur -proie, qui pourraient bien être des perspectives pour la suite de notre recherche scientifique.

Bibliographie

- [1] V. ARNOLD, *Equation différentielles ordinaires*. Éditions Mir-Moscou, 3eme édition 01/06/2012 .
- [2] ANIS BACHIR, *Modélisation stochastique et statistique de la dynamique des population*, Mémoire de magister en math. USTHB, 2014.
- [3] SYLVIE BENZONI, *Équations différentielles ordinaires*, (polycopie de cours), Univers.de Lyon, 11 mai 2007.
- [4] A. CHAMBERT-LOIR, S. FERMIGIER, V. MAILLOT, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation*. Masson, Paris, second edition 1997.
- [5] M. CROUZEIX, A. L. MIGNOT, *Analyse numérique des équations différentielles. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise*. Masson, Paris 1984.
- [6] PANAZZOLO DANIEL, *Systèmes dynamiques et application à la biologie : Le modèle proie-prédateur de Holling-Tanner*. Mémoire M2 Mathématiques Fondamentales, 2014
- [7] J.-P. DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles*. PUG, Grenoble 1996
- [8] E. HAIRER, G. WANNER, *Solving ordinary differential equations*. II, volume 14 of Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, second edition 1996.
- [9] E. HAIRER, S.P. NORSETT, G. WANNER, *Solving ordinary differential equations*. Springer-Verlag, Berlin, second edition 1993.
- [10] M. W. HIRSCH, S. SMALE, *Differential equations, Dynamical systems, and Linear algebra*. Academic Press, New York-London 1974. Pure and Applied Mathematics, Vol. 60.
- [11] TONY LELIEVRE, *Equations différentielles ordinaires*, (polycopie de cours) 2009-2010.

- [12] F. LIRET, *Maths à l'usage des étudiants en pratique*, Dunod, 2006.
- [13] P.MEIER, A.BONANOMI, D.MESSINA, *Les équations de Lotka-Volterra pour les systèmes des populations* , 11 mai 2006.
- [14] A. MUNNIER, *Théorie des équations différentielles ordinaires*, Institut élie Cartan 2006-2007.
- [15] J.D.MURRAY, *Mathematical biology* .Springer-Verlag ,Berlin ,second edition 1993
- [16] JEAN-PIERRE RAYMOND, *Systèmes différentiels (résumé de cours)*, Université Paul Sabatier.
- [17] MEBROUK RAHMANE, *Equations différentielles théorie et applications, sur les systèmes de Lotka Volterra*, bibliothèque de la faculté des sciences, 07 octobre 2012
- [18] KEVIN TRIBUT, YVAN DURON, *Modèles proie-prédateur*, ujf-grenoble.fr, 7 mai 2013.

ملخص

واحدة من أكثر التطبيقات البيئية استخداما لنظم المعادلات التفاضلية هي مشكلة الفريسة المفترسة. في الواقع المعادلات التفاضلية مفيدة للغاية في العديد من مجالات العلوم التطبيقية، ومع ذلك ترتبط معظم مشاكل الطبيعة بدالة مجهولة. في هذه المذكرة درسنا حالة تحتوي مجتمعين يتكونان من جنسين: الفريسة والمفترس. من المتوقع أن يؤثر كل منهما على تعداد الآخر. النموذج الرياضي لمثل هذه المشكلة هو الجملة التفاضلية المستقلة عن الزمن والمعروفة باسم نموذج **volterra Lotka** **كلمات وجمل مفتاحية** : فريسة – مفترسة , لوتكا-فولتيرا, حل أعظمي, حالة توازن, جملة تفاضلية مستقلة.

Abstract

One of the most widely used ecological applications of differential equation systems is the predator-prey problem. In fact differential equations are very useful in many fields of applied science. However, most of nature problems are related to an unknown function. In this thesis, we studied a case containing two populations consisting of two species: prey and predator. Each is expected to influence the size of the other. The mathematical model of such a problem is the classical autonomous differential system known as Lotka volterra.

Key words and phrases: Predator-prey, Lotka-Volterra, maximal solution, equilibrium point, autonomous differential system

Résumé

L'une des applications écologiques des systèmes d'équations différentielles les plus utilisées est le problème prédateur-proie. En fait les équations différentielles sont très utiles dans beaucoup des domaines des sciences appliquées. Cependant, la plupart des problèmes de la nature sont liés à une fonction inconnue. Dans ce mémoire, nous avons étudié un cas contenant deux populations formée de deux espèces: proies et prédatrices. C'est attendu que chacune exerce une influence sur la taille de l'autre. Le modèle mathématique d'un tel problème est le système différentiel autonome classique dite de Lotka volterra.

Phrases et mots clés: Prédateur-proie, Lotka-Volterra, solution maximale, point d'équilibre, système différentiel autonome.