



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

Étude d'un problème de contact dynamique
entre un corps piézoélectrique et une base
conductrice

Présenté par: Atoussi Ichrak
Zemali Amira

Soutenu publiquement le: 19/06/2019
Devant le jury composé de:

Ghendir Aoun
Abdellatif
Douib Bachir

MAA

MAA

Aissaoui Adel

MCA

Président

Encadreur

Examineur

Univ. El Oued

Univ. El Oued

Univ. El Oued

DÉDICACES

Nous dédions ce travail à :

Nos chers parents

Nos frères et nos surs

Nos amies

Et à tous nous familles.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, nous remercions le Dieu, notre créateur de nous avoir données les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.

Nous adressons le grand remerciement à notre encadreur **Dr. Bachir Douib** qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses directives du début à la fin de ce travail.

Comme je tiens à remercier vivement **Dr. Ghendir Aoun Abdellatif** pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à **Dr. Aissaoui Adel** d'avoir accepter de juger mon travail.

D'ailleurs, nous remercions chaleureusement tous les membres de nos familles surtout nos parents pour leur effort et leur fatigue, nos professeurs dès la primaire jusqu'à l'universitaire.

Enfin que tous ceux qui n'ont pas été mentionnés et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail reçoivent mes remerciements.

TABLE DES MATIÈRES

Notations	v
Introduction	1
1 MODÉLISATION DU CONTACT PIÉZOÉLECTRIQUE	4
1.1 Cadre physique	4
1.2 Modèle mathématique	7
1.2.1 Lois de comportement des matériaux électro-viscoélastiques	8
1.3 Lois de contact sans frottement	9
1.4 Conditions électriques à la surface de contact	10
2 Outils Mathématiques	12
2.1 Espaces fonctionnels	12
2.2 Espaces liés aux opérateurs de déformation et de divergence	16
2.2.1 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	19
2.3 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	22
2.3.1 Lemme de type Gronwall	24
2.4 Énoncés de certains théorèmes	26
3 Étude d'un Problème électro-viscoélastique sans frottement	27
3.1 Formulation mécanique du problème	27
3.2 Formulation variationnelle	32

3.3 Existence et unicité de la solution	33
Conclusion	43
Bibliographie	44

si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω ,
Γ	la frontière de Ω supposée régulière,
$\Gamma_i (i = \overline{1, 3}, a, b)$	une partie mesurable de la frontière Γ ,
$\text{mes } \Gamma_1$	la mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de Γ ,
ν	la normale unitaire sortante à Γ ,
v_ν, v_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v ,
σ_ν, σ_τ	les composantes normale et tangentielle du champ tensoriel σ ,
$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$,
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$,
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$,
\mathcal{H}	l'espace $L^2_s(\Omega)^{d \times d}$,
\mathcal{H}_1	l'espace $\{\sigma \in \mathcal{H} / \text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j}) \in H\}$,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ ,
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)^d$,
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$,
H'_Γ	l'espace dual de H_Γ ,
W	l'espace $\{\zeta \in H^1(\Omega) / \zeta = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}$,
\mathcal{W}	l'espace $\{D = (D_i) / D_i \in L^2(\Omega), D_{i,i} \in L^2\}$,
$\gamma : H_1 \longrightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si H est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes :

- $(\cdot, \cdot)_H$ le produit scalaire de H ,
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ le produit de dualité entre H et H' ,
- $\|\cdot\|_H$ la norme de H ,
- $x_n \longrightarrow x$ la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .
- $x_n \rightharpoonup x$ la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$, on note par

- $C(0, T; H)$ l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ dans H ,
- $C^1(0, T; H)$ l'espace des fonctions continument dérivables sur $[0, T]$ dans H ,
- $L^p(0, T; H)$ l'espace de Lebesgue,
- $\|\cdot\|_{L^p(0, T; H)}$ la norme de $L^p(0, T; H)$,
- $W^{k, p}(0, T; H)$ l'espace de Sobolev,
- $\|\cdot\|_{W^{k, p}(0, T; H)}$ la norme de $W^{k, p}(0, T; H)$.

Autre notations :

- \dot{u}, \ddot{u} les dérivées première et seconde de u par rapport au temps,
- $\nabla \varphi$ le gradient de φ ,
- $\text{Div } \sigma$ divergence de σ ,
- $\text{div } D$ divergence du vecteur D ,
- $\varepsilon(u)$ le tenseur de déformation,
- \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d ,
- I_d le tenseur identité du second ordre sur \mathbb{R}^d ,
- Λ^n puissance n de l'opérateur Λ ,
- C une constante générique strictement positive,
- p.p. presque partout.

Les travaux sur les matériaux dits actifs se sont considérablement multipliés au cours des dix dernières années; ils se caractérisent par leur capacité à fournir une action mécanique sous l'effet d'un couplage, généralement réversible, de type électromécanique (matériau piézoélectrique), magnéto-élastique (matériau magnétostrictif) ou bien encore thermo-élastique (alliage à mémoire de forme). L'intérêt est en effet de développer des matériaux, ou des structures dites intelligentes dans de nombreuses branches de l'industrie.

La piézoélectricité traduit l'aptitude que présentent certains cristallins à se polariser sous l'action d'une contrainte mécanique (effet direct) ou bien à se déformer lorsqu'il leur est appliqué un champ électrique (effet inverse). La piézoélectricité ne peut se manifester, ni pour des corps conducteurs, ni pour des corps à haut degré de symétrie, autrement dit, tous les matériaux piézoélectriques sont anisotropes. Ceci signifie qu'ils possèdent des propriétés physiques variant selon la direction considérée. Bien qu'ayant été prédit par Coulomb et découvert par Becquerel en 1879, l'effet piézoélectrique n'a été correctement expliqué par expérimentation qu'en 1880 par les frères Jacques et Pierre Curie. Par la suite le formalisme de la piézoélectricité a été développé par P. Duhem, F. Pockels et particulièrement par W. Voigt en 1894.

Les matériaux piézoélectriques sont des matériaux intelligents (adaptatifs); ils ont surtout trouvé application dans le contrôle des vibrations dans les domaines de l'automobile (injecteurs), l'aérospatiale, le contrôle de forme (ailes d'avion, miroirs des télescopes) ainsi que dans le contrôle en acoustique des nuisances sonores : le quartz

est largement utilisé dans le domaine des télécommunications en tant que filtre contrôleur ou générateur de fréquence. Actuellement, il y a de nouvelles applications dans le domaine de la médecine, du suivi de grossesse aux problèmes cardiaques en passant par l'examen du tube digestif, le principe est le même que celui du sonar. Dans la plupart des systèmes de la mécanique des structures, il existe des situations dans lesquelles un corps (piézoélectrique) déformable entre en contact avec d'autres corps : dans un contexte médical, la modélisation correcte de l'interaction entre les outils de chirurgie et les organes est de première importance pour réaliser des simulations réalistes.

Ainsi, ce travail se donne pour objectif l'étude d'un problème de contact entre une structure piézoélectrique et une fondation, il est évident que le caractère de ce contact peut jouer un rôle fondamental dans le comportement de la structure : sa déformation, son mouvement, la distribution des efforts, etc Avant l'application de forces sur un corps, la surface de contact réelle sur laquelle les corps se touchent est inconnue ; par ailleurs, les conditions de frontière sur cette surface inconnue fait intervenir des efforts et des déplacements inconnus. En conséquence, les modèles mathématiques de contact impliquent des systèmes d'inégalités ou d'équations non linéaires (non linéarités géométriques ou matérielles). L'abondance de ce type de problèmes a fait prendre un essor considérable mais relativement récent à l'étude mécanique, mathématique et numérique de la Mécanique du Contact, engendrant de nombreux ouvrages sur le sujet. Signorini fut le premier à énoncer un problème de contact entre un corps déformable et une fondation rigide. Ce problème fut résolu pour la première fois par Fihera. La Théorie Mathématique de la Mécanique du Contact débute avec Duvaut et Lions, qui présentèrent des formulations variationnelles des problèmes de contact et des résultats d'existence et d'unicité.

Notre travail, qui s'inspire de l'article [6], représente une contribution à l'analyse d'un problème de contact en tenant compte de l'effet piézoélectrique du matériau. Sous l'hypothèse de petite transformation nous étudions un processus est supposé être électriquement statique, c'est-à-dire que tous les effets du rayonnement sont négligés et mécaniquement dynamiques, pour de matériau électro- viscoélastiques. Les conditions aux limites sont de compliance normale et sans frottement. Les conditions électriques sont introduites dans le cas où la fondation est conductrice. Notre étude de phénomène

de contact comprend les étapes suivantes : la modélisation mathématique, l'analyse variationnelle incluant de résultat d'existence et d'unicité de la solution.

Cet mémoire se compose de trois chapitres : Le premier chapitre introduit des notations générales de la mécanique nécessaire pour une bonne compréhension de la suite du problème traité. Nous commençons par le cadre physique et les modèles mathématiques utilisées. Dans le deuxième chapitre nous rappelons les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées. Ensuite nous passons aux résultats fondamentaux d'analyse non linéaire, concernant les équations variationnelles, les équations et les inéquations d'évolution, les lemmes de Gronwall et de certains théorèmes très utiles dans notre travail. Enfin on a consacré le dernier chapitre pour étudier un problème de compliance normale entre un corps électro-viscoélastique et une fondation conductrice sans frottement ; nous présentons une formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution faible, en utilisant les techniques de point fixe et de monotonie.

CHAPITRE 1

MODÉLISATION DU CONTACT PIÉZOÉLECTRIQUE

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique des milieux continus où nous allons introduire le cadre physique utilisé dans ce mémoire; il est destiné à rappeler l'équation de mouvement de Cauchy, et décrire les lois de comportement électroviscoélastique. Par ailleurs, nous précisons dans ce chapitre les conditions aux limites de contact sans frottement.

1.1 Cadre physique

Nous considérons un corps matériel piézoélectrique déformable qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ avec une frontière Lipschitzienne Γ , partitionnée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , correspondant aux conditions aux limites mécaniques tel que $\text{mes } \Gamma_1 > 0$. D'autre part, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ est divisée en deux parties disjointes et mesurables Γ_a et Γ_b correspondant aux conditions aux limites électriques telle que $\text{mes } \Gamma_a > 0$. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité f_2 et dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0 et des charges électriques de densité volumiques q_0 . On suppose que f_2 et f_0 varient très lentement par rapport au temps. Le corps est soumis à l'action de potentiel nul sur la partie Γ_a de la frontière

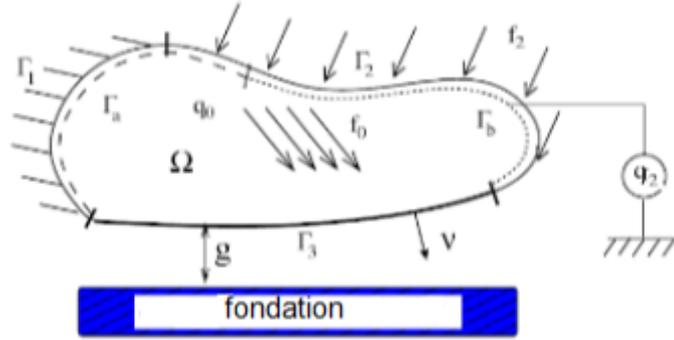


FIGURE 1.1 – Corps piézoélectrique en contact avec une fondation

ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2 , agissent sur la partie Γ_b . Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Le corps est en contact sans frottement avec une fondation conductive sur la partie Γ_3 . Nous supposons que le matériau peut être endommagé durant le contact. On étudie l'évolution de ces propriétés dans l'intervalle de temps $[0, T]$, sous l'hypothèse des petites transformations. Nous désignons par \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) ; "·" et $|\cdot|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d . Ainsi, nous avons

$$u \cdot v = u_i v_i, \quad \|v\| = (v \cdot v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d,$$

$$\sigma \cdot \tau = \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad \|\tau\| = (\tau \cdot \tau)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d,$$

avec la convention de l'indice muet.

Pour un vecteur v , nous notons par v_ν et v_τ les composantes normale et tangentielle à la frontière définies par

$$\begin{cases} v_\nu = v \cdot \nu, \\ v_\tau = v - v_\nu \cdot \nu. \end{cases} \quad (1.1)$$

Nous désignons par $\sigma = \sigma(x, t)$ le champ des contraintes, par $u = u(x, t)$ le champ des déplacements et par $\varepsilon(u)$ le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport

à $x \in \bar{\Omega}$ et $t \in [0, T]$.

Pour un champ des contraintes σ nous dénotons par σ_ν et σ_τ les composantes normale et tangentielle à la frontière données par

$$\begin{cases} \sigma_\nu = (\sigma\nu) \cdot \nu, \\ \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \cdot \nu. \end{cases} \quad (1.2)$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\sigma\nu) \cdot v = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau \cdot v_\tau, \quad (1.3)$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire, dans l'établissement de formulation variationnelle de problème mécanique de contact.

En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps ; par exemple

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2},$$

où \dot{u} désigne le champ des vitesses et \ddot{u} désigne le champ des accélérations. Pour le champ des vitesses \dot{u} les notations \dot{u}_ν et \dot{u}_τ représentent respectivement les vitesses normale et tangentielle à la frontière, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dot{u}_\nu = \dot{u} \cdot \nu, \\ \dot{u}_\tau = \dot{u} - \dot{u}_\nu \cdot \nu. \end{cases}$$

Rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (1.4)$$

En outre, le champ électrique est défini par la relation suivante

$$E(\varphi) = -\nabla\varphi = -(\varphi_{,i}). \quad (1.5)$$

Nous allons maintenant décrire le modèle mathématique associé au cadre physique que nous avons vu au paragraphe précédent.

1.2 Modèle mathématique

Le modèle mathématique étudié dans ce mémoire, décrit l'évolution du corps occupant Ω . Les fonctions inconnues du problème sont le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ de déplacement électrique $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. On sait qu'en général, l'évolution d'un corps matériel est décrite par l'équation de mouvement de Cauchy

$$\text{Div } \sigma + f_0 = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.6)$$

où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la densité de masse ; ici "Div" représente l'opérateur divergence pour les tenseurs $\text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j})$. Le processus d'évolution défini par (1.6) s'appelle processus dynamique. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple, dans le cas où le champ des vitesses \dot{u} varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho \ddot{u}$ peut être négligé. Dans ce cas, le processus s'appelle quasistatique et l'équation (1.6) devient

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T).$$

L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacement électrique

$$\text{div } D = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.7)$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\text{div } D = (D_{i,i})$, et q_0 représente la densité des charges électriques volumiques.

Puisque le corps est encastré sur Γ_1 , le champ des déplacements s'annule

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T). \quad (1.8)$$

La condition aux limites en tractions est

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (1.9)$$

le potentiel électrique s'annule sur la partie Γ_a de la frontière

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T). \quad (1.10)$$

Tandis que sur Γ_b , une charge électrique de densité q_2 est prescrite,

$$D \cdot \nu = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T). \quad (1.11)$$

Ce modèle piézoélectrique (1.6)-(1.11) sera complété ultérieurement par les conditions aux limites sur la surface de contact Γ_3 .

1.2.1 Lois de comportement des matériaux électro-viscoélastiques

Un matériau est dit électro-viscoélastique s'il possède une loi de comportement de la forme

$$\begin{cases} \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}\varepsilon(u) - \mathcal{E}^*E(\varphi), \\ D = \mathcal{E}\varepsilon(u) + \beta E(\varphi). \end{cases} \quad (1.12)$$

Dans laquelle l'opérateur \mathcal{A} est l'opérateur de viscosité à champ électrique nul, \mathcal{B} est l'opérateur d'élasticité pas forcément linéaire à champ électrique nul, $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ le tenseur piézoélectrique à champ constant ou nul, $\beta = (\beta_{ij})$ le tenseur de la permittivité électrique à déformation nulle et $E(\varphi) = -\nabla\varphi$ représente le champ électrique. Par ailleurs $\mathcal{E}^* = (e_{ijk}^*)$ où $e_{ijk}^* = e_{kij}$, dénote le transposé du tenseur \mathcal{E} tel que

$$\mathcal{E}\sigma \cdot v = \sigma \cdot \mathcal{E}^*v, \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}^d, v \in \mathbb{R}^d. \quad (1.13)$$

Un exemple de la loi électro-viscoélastique non linéaire est le suivant :

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \frac{1}{\alpha}(\varepsilon - P_K\varepsilon) - \mathcal{E}^*E(\varphi), \quad (1.14)$$

où \mathcal{A} est un tenseur d'ordre quatre. Ses composantes a_{ijkl} s'appellent "coefficients de viscosité", $K \subset \mathbb{S}^d$ est un convexe fermé non vide et $P_K : \mathbb{S}^d \rightarrow K$ est l'opérateur de projection de \mathbb{S}^d sur K . L'opérateur d'élasticité est donné par :

$$\mathcal{B}(\varepsilon) = \frac{1}{\alpha}(\varepsilon - P_K\varepsilon),$$

et \mathcal{E} est un tenseur d'ordre trois. Ses composantes e_{ijk} s'appellent "coefficients piézoélectriques".

Finalement, afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps, il faut préciser les conditions aux limites sur Γ_3 ; c'est l'objet des conditions de contact et des lois sans frottement que nous décrirons dans le paragraphe suivant :

1.3 Lois de contact sans frottement

Dans un contact parfait, où sans frottement, l'action mécanique transmissible par obstacle entre deux solides ne peut être en tout point que normale au contact (perpendiculaire au plan tangent commun du contact). Ceci se traduit par la relation

$$\sigma_\tau = 0. \quad (1.15)$$

Qui signifie que la contrainte tangentielle est nulle. Si ce n'est pas le cas, on dit que le mouvement tangentielle se produit avec frottement ce qui nous oblige à introduire une loi de frottement qui prend en considération la composante tangentielle avec les autres variables du système.

Contact avec compliance normale

Dans ce cas, la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue a priori. La contrainte normale σ_ν satisfait la condition dite de compliance normale.

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g), \quad (1.16)$$

où u_ν est le déplacement normal, g représente l'interstice entre le corps et la fondation et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale. Cette condition indique que la fonction exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration $u_\nu - g$. Si le corps repose sur la fondation l'interstice est nul, $g = 0$. Comme exemple de la fonction p_ν nous pouvons considérer,

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+ \quad (1.17)$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par :

$$p_\nu = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha \end{cases} \quad (1.18)$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (1.16) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle dépasse α la fonction se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

1.4 Conditions électriques à la surface de contact

Dans ce paragraphe nous allons énoncer les conditions de contact électrique, associées aux problèmes électro-mécaniques, sur la partie Γ_3 de la surface. Nous supposons que la fondation est électriquement et son potentiel est maintenu à φ_0 : La condition électrique sur Γ_3 est donnée par :

$$D \cdot \nu = k\psi(u_\nu - g)\phi_L(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.19)$$

où ψ et φ sont des fonctions données qui seront décrites ultérieurement. Cette condition représente une condition régularisée qui peut être obtenue à partir des considérations suivantes : Lorsqu'il n'y a pas de contact en un point sur la surface (*i.e.* $u_\nu < g$) ; l'interstice entre le corps et la base est supposé être isolant (disons qu'il est rempli d'air) et la composante normale du champ de déplacement électrique s'annule pour qu'il n'y ait aucune charge électrique libre sur la surface. Ainsi,

$$u_\nu < g \implies D \cdot \nu = 0. \quad (1.20)$$

Durant le processus de contact, (*i.e.* quand $u_\nu \geq g$) la composante normale du champ de déplacement électrique ou la charge électrique libre est supposé être proportionnelle à la différence de potentiel entre la surface du corps et la fondation, avec une constante positive k comme facteur de proportionnalité. Ainsi,

$$u_\nu \geq g \implies D \cdot \nu = k(\varphi - \varphi_0). \quad (1.21)$$

Combinons (1.20) et (1.21) pour obtenir

$$D \cdot \nu = k\chi_{[0, \infty[}(u_\nu - g)(\varphi - \varphi_0), \quad (1.22)$$

où $\chi_{[0, \infty[}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, \infty[$; qui est donnée par :

$$\chi_{[0, \infty[}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ 1 & \text{si } r \geq 0. \end{cases}$$

La condition (1.22) décrit le contact électrique parfait et elle est en quelque sorte semblable à la condition bien connue de contact de Signorini. Les deux conditions peuvent être considérées comme des sur-idéalisations dans plusieurs applications.

Pour la rendre plus réaliste, nous régularisons la condition (1.22) par la condition (1.19) dans laquelle ψ est une fonction régulière qui va être décrite ci-dessous et ϕ_L est une fonction de troncation,

$$\phi_L(s) = \begin{cases} -L & \text{si } s < -L, \\ s & \text{si } -L \leq s \leq L, \\ L & \text{si } s > L, \end{cases} \quad (1.23)$$

où L est une constante positive très grande. De cette façon, la différence $\varphi - \varphi_0$ est remplacé par $\phi_L(\varphi - \varphi_0)$: Notons que cette troncation ne pose aucune limitation pratique sur l'application du modèle puisque L peut être arbitrairement grand et donc dans les applications $\phi_L(\varphi - \varphi_0) = \varphi - \varphi_0$.

Les raisons de la régularisation (1.19) de (1.22) sont mathématiques.

Premièrement, nous avons besoin d'éviter les discontinuités dans les charges électriques lorsque le contact est établi et donc nous régularisons la fonction $k\chi_{[0,\infty[}$ dans (1.22) par une fonction Lipschitzienne : Un choix possible est l'exemple suivant :

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > 0, \\ k\delta r & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{1}{\delta}, \\ k & \text{si } r > \frac{1}{\delta}, \end{cases} \quad (1.24)$$

où $\delta > 0$ est un paramètre assez grand. Ce choix veut dire que durant le processus du contact, la conductivité électrique augmente avec le contact à travers les aspérités de la surface, et se stabilise quand la pénétration $u_\nu - g$ atteint la valeur $\frac{1}{\delta}$.

Deuxièmement, nous avons besoin du terme $\phi_L(\varphi - \varphi_0)$ pour rendre le terme $\varphi - \varphi_0$ borné.

Notons que lorsque $\psi \equiv 0$ dans (1.19) nous obtenons

$$D \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.25)$$

ce qui découple les problèmes électriques et mécaniques sur la surface de contact. La condition (1.25) modélise le cas où l'obstacle est un isolant parfait et a été utilisée dans [8, 18]. La condition (1.19) à la place de (1.25) ; introduit un couplage fort entre les conditions aux limites mécaniques et électriques et mène vers un nouveau modèle mathématique, non standard.

CHAPITRE 2

OUTILS MATHÉMATIQUES

Dans ce chapitre, nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire, et donnons quelques propriétés nécessaires dans la suite. Partout dans ce chapitre Ω est un domaine borné et lipschitzien de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, de frontière Γ représentable localement comme le graphe d'une fonction lipschitzienne sur un ouvert de \mathbb{R}^{d-1} , Ω étant situé localement d'un seul côté de Γ . Par ailleurs, nous considérons une partition Γ en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 d'un côté et une partition de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ en deux parties ouvertes Γ_a et Γ_b d'un autre côté, telles que $\text{mes } \Gamma_1 > 0$ et $\text{mes } \Gamma_a > 0$.

2.1 Espaces fonctionnels

Dans cette section nous donnons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles qui nous aident à comprendre les propriétés des espaces appropriés à la mécanique. Nous allons définir les espaces de fonctions continues, continûment différentiables, les fonctions p-intégrables et les espaces de Sobolev.

Fonctions continues et continûment différentiables

L'espace des fonctions uniformément continues sur Ω est noté par $C(\overline{\Omega})$ et il est un espace de Banach pour la norme donnée par :

$$|v|_{C(\bar{\Omega})} = \sup\{|v(x)|, x \in \bar{\Omega}\}.$$

Toute fonction uniformément continue est bornée et possède une unique extension continue sur $\bar{\Omega}$. Pour tout entier k , l'espace $C^k(\bar{\Omega})$ donné par

$$C^k(\bar{\Omega}) = \{v \in C(\bar{\Omega}) / D^\alpha v \in C(\bar{\Omega}) \text{ pour } |\alpha| \leq k\},$$

est l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$ dont les dérivées d'ordre au plus k sont également continues sur $\bar{\Omega}$. Il est aussi un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$|v|_{C^k(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha v|_{C(\bar{\Omega})}.$$

L'espace $C^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables :

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\bar{\Omega}).$$

Nous pouvons maintenant parler de l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur l'ensemble à support compact inclus dans, défini par

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) / \text{supp } v \subset \Omega\},$$

où $\text{supp } v = \overline{\{v \in C^\infty(\Omega) / v(x) \neq 0\}}$ est le support de la fonction v . Si $\text{supp } v$ est un sous ensemble propre de Ω , on dit que v est une fonction à support compact dans Ω .

Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 2.1.1. (*Espace de Lebesgue*). Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble :

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / v \text{ Lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ et } |v|^p \text{ Lebesgue intégrable sur } \Omega\}.$$

C'est un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

si $p = \infty$ et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, alors on définit $\|v\|_{L^p(\Omega)}$ par

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{supess } (v) = \inf\{c : |v(x)| \leq c\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

Espace de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_H$ un produit scalaire sur H c'est-à-dire $(\cdot, \cdot)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\| \cdot \|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\| u \|_H = (u, u)_H^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

et on rappelle que $\| \cdot \|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|(u, v)_H| \leq \| u \|_H \| v \|_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (2.2)$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme défini par (2.1). Soit H' l'espace dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme :

$$\| \eta \|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{| \langle \eta, v \rangle_{H' \times H} |}{\| v \|_H},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ représente la dualité entre H' et H .

Espace de Sobolev

L'espace de Sobolev ont été introduit au début du siècle et ont permis de résoudre bon nombre de problème concernant les équations aux dérivées partielles sans réponse jusque là.

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / \partial_i u \in L^2(\Omega) \ i = 1, \dots, d\}.$$

On note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espaces de Hilbert pour le produite scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée :

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \text{ et on écrit } \| u \|_{H^1(\Omega)}^2 = \| u \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On a le résultats suivant :

Théorème 2.1.1.

$$C^1(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème 2.1.2. (Rellich)

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

Théorème 2.1.3. (trace de Sobolev)

Il existe une application linéaire et continue $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\delta u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 2.1.1. L'espaces $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représentent l'espaces de fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle dT . L'application δ s'appelle application de trace, elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \mapsto u|_{\Gamma}$ définir pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 2.1.2. On note que l'application de trace $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compact.

Définition 2.1.2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par :

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_{\alpha} \in L^p(\Omega), \text{ tel que } v_{\alpha} = D^{\alpha}u\}.$$

Remarque 2.1.3. Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^{\alpha}u$ et v_{α} .

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^{\alpha}u \|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \| D^{\alpha}u \|_{L^{\infty}(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

2.2 Espaces liés aux opérateurs de déformation et de divergence

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques u et σ :

$$\left\{ \begin{array}{l} H = \{u = (u_i) / u_i \in L^2(\Omega)\} = (L^2(\Omega))^d, \\ \mathcal{H} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\} = (L^2_s(\Omega))^{d \times d}, \\ H_1 = \{u = (u_i) / u_i \in H^1(\Omega)\} = (H^1(\Omega))^d, \\ \mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} / \sigma_{ij,j} \in H\}. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Les espaces H, \mathcal{H}, H_1 et \mathcal{H}_1 sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u, v)_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \\ (u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} = (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, \text{Div } \tau)_H, \end{array} \right. \quad (2.4)$$

respectivement, où $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$ et $\text{Div} : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

Les normes sur les espaces H, \mathcal{H}, H_1 et \mathcal{H}_1 sont notées par $\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$, respectivement.

Puisque la frontière Γ est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour désigner la trace γv de v sur Γ . Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par $H_{\Gamma} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Désignons par H'_{Γ} le dual de H_{Γ} , et (\cdot, \cdot) le produit de dualité entre H'_{Γ} et H_{Γ} . Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, il existe un élément $\sigma\nu \in H'_{\Gamma}$ tel que :

$$(\sigma\nu, \gamma v)_{H'_{\Gamma} \times H_{\Gamma}} = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_H \quad \forall v \in H_1. \quad (2.5)$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\sigma\nu, \gamma v)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1. \quad (2.6)$$

Donc, pour σ assez régulier nous avons la formule de Green suivante :

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_H = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1, \quad (2.7)$$

Nous introduisons à présent un sous-espace fermé de H_1 , dont la définition est donnée ci-après

$$V = \{v \in H_1 / v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1\}. \quad (2.8)$$

Inégalité de Korn. Soit $\text{mes } \Gamma_1 > 0$. Alors il existe une constante $C_k > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$\|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \geq C_k \|v\|_{H_1} \quad \forall v \in V. \quad (2.9)$$

Nous considérons sur l'espace V , le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V, \quad (2.10)$$

et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée, i.e.

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V. \quad (2.11)$$

Par l'inégalité de Korn et (2.4), il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert.

En effet, d'après (2.4)

$$(u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}.$$

Alors

$$\|v\|_{H_1} = \left(\|v\|_H^2 + \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant (2.9), il résulte

$$C_k \|v\|_{H_1} \leq \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \leq \|v\|_{H_1}. \quad (2.12)$$

Alors $\|\cdot\|_{H_1}$ équivalent $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

En outre, d'après (2.9) et (2.11) et le théorème de trace de Sobolev, on trouve qu'il existe une constante $C_0 > 0$ dépendante uniquement de Ω, Γ_1 et Γ_3 telle que :

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V. \quad (2.13)$$

Dans ce qui suit, nous définissons les espaces de Sobolev associés aux inconnus électriques (Le champ des déplacements électriques D et le potentiel électrique φ) de problème électro-mécanique qui va être introduit dans cette thèse. Soit les espaces

$$\begin{cases} W = \{\xi \in H^1(\Omega) / \xi = 0 \text{ sur } \Gamma_a\} \\ \mathcal{W} = \{D = (D_i) / D_i \in L^2(\Omega), D_{i,i} \in L^2(\Omega)\}, \end{cases}$$

où $\text{div } D = (D_{i,i})$. Ces espaces W et \mathcal{W} sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$(\varphi, \xi)_W = (\nabla \varphi, \nabla \xi)_H, \quad (D, E)_\mathcal{W} = (D, E)_H + (\text{div } D, \text{div } E)_{L^2(\Omega)}. \quad (2.14)$$

Soient $\|\cdot\|_W$ et $\|\cdot\|_\mathcal{W}$ les normes associées; c'est-à-dire

$$\|\xi\|_W = \|\nabla \xi\|_H, \quad \|D\|_\mathcal{W}^2 = \|D\|_H^2 + \|\text{div } D\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.15)$$

Puisque $\text{mes } \Gamma_a > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est satisfaite, ainsi,

$$\|\nabla \xi\|_H \geq C \|\xi\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \xi \in W, \quad (2.16)$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend que de Ω et Γ_a . Il s'ensuit de (2.16), que $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_W$ sont des normes équivalentes sur W et donc $(W, \|\cdot\|_W)$ est un espace réel de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante \tilde{C}_0 dépendant uniquement de Ω , Γ_a et Γ_3 telle que

$$\|\zeta\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{C}_0 \|\zeta\|_W, \quad \forall \zeta \in W. \quad (2.17)$$

Aussi, rappelons que lorsque $D \in \mathcal{W}$ est une fonction régulière, la formule de Green est satisfaite

$$(D, \nabla \xi)_H + (\text{div } D, \xi)_H = \int_\Gamma D \cdot \nu \xi da \quad \forall \xi \in H^1(\Omega). \quad (2.18)$$

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le lecteur par exemple à [1, 9, 12].

Triplet de Gelfand

Dans cette section nous rappelons la définition d'un Triplet de Gelfand. Pour cela on va commencer par un rappel sur le théorème de représentation de Riesz-Fréchet

Théorème 2.2.1. (*Théorème de représentation de Riesz-Fréchet*) Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual. Alors, pour tout $\phi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H.$$

On a de plus

$$\|\phi\|_{H'} = \|f\|_H$$

pour une démonstration, voir ([9], pages 81-82). L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' . Soit maintenant H un espace de Hilbert réel tel que V dense dans H et l'injection $V \subset H$ est continue. On identifie H et H' . Soit V' le dual de V , on peut alors prolonger H dans V' grâce au procédé suivant : étant donné $f \in H$, l'application $v \in V \mapsto (f, v)_H$ est une forme linéaire continue sur H et a fortiori sur V ; on la note $Tf \in V'$ de sorte que

$$\langle Tf, v \rangle_{V' \times V} = (f, v), \quad \forall f \in H, \quad \forall v \in V.$$

On vérifie que $T : H \rightarrow V'$ possède les propriétés suivantes

- (1) $\|Tf\|_{V'} \leq C \|f\|_H \quad \forall f \in H.$
- (2) T est injective.
- (3) $T(H)$ est dense dans V' .

En général T n'est pas surjective de H sur V' . A l'aide de T on prolonge H dans V' et on a le schéma

$$V \subset H = H' \subset V', \tag{2.19}$$

où les injections canoniques sont continues et denses. Ce triplet est appelé Triplet de Gelfand. On dit que H est l'espace pivot.

2.2.1 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Ce paragraphe est destiné à rappeler les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel. Soit

$0 < T < \infty$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $C([0, T]; X)$ et $C^1([0, T]; X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ avec valeurs dans X , respectivement, avec les normes

$$\|x\|_{C([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|_X,$$

$$\|x\|_{C^1([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|_X + \max_{t \in [0, T]} \|\dot{x}(t)\|_X.$$

Nous notons par $C_c([0, T]; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X .

Définition 2.2.1. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous-ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que $\|u_n(t) - u(t)\|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, pour tout $t \in [0, T]/E$.

Définition 2.2.2. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite fortement dérivable en $t_0 \in (0, T)$ s'il existe un élément $\frac{du}{dt}(t_0) \in X$ appelé la dérivée forte de u en t_0 , tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (u(t_0 + h) - u(t_0)) - \frac{du}{dt}(t_0) \right\|_X = 0.$$

Définition 2.2.3. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c([0, T]; X)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \|u_n(t) - u(t)\|_X dt = 0.$$

Théorème 2.2.2. (Bochner) Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ mesurable et intégrable si et seulement si $t \rightarrow \|u(t)\|_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est intégrable. Dans ce cas

$$\left\| \int_0^T u(t) dt \right\|_X \leq \int_0^T \|u(t)\|_X dt.$$

Soit $1 \leq p < \infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $u : [0, T] \rightarrow X$ mesurables, telles que l'application $t \rightarrow \|u(t)\|_X$ appartient à $L^p(0, T)$. On sait que $L^p(0, T; X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\begin{cases} \|u\|_{L^p(0, X; T)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty(0, X; T)} = \inf \{ c > 0 / \|u(t)\|_X < c \text{ p.p. } t \in (0, T) \} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Proposition 2.2.1. 1. $L^p(0, T; X)$ ($1 \leq p \leq \infty$) est un espace de Banach.

2. Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$, alors $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

3. $L^r(0, T; X) \subseteq L^q(0, T; X)$, avec injection continue, $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

4. Si X est un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0, T; X)' = L^q(0, T; X), \quad \text{si } 1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0, T; X)' = L^\infty(0, T; X)$$

où $L^p(0, T; X)'$ représente le dual de l'espace $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 2.2.4. Soit $u, w \in L^1(0, T; X)$. La fonction w s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $(0, T)$ si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)w(t)dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, T)$$

$C_c^\infty(0, T)$ étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables à support compact dans $(0, T)$.

Nous écrivons $w = \dot{u}$ pour $n = 1$ et $w = u^{(n)}$ pour $n \geq 2$.

Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$ est l'espace des fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ telles que $u \in L^p(0, T; X)$ et $\dot{u} \in L^p(0, T; X)$. $W^{1,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0, T; X)} = \|u\|_{L^p(0, T; X)} + \|\dot{u}\|_{L^p(0, T; X)}.$$

En particulier, $W^{1,2}(0, T; X)$ est un espace de Hilbert pour la norme précédente.

Définition 2.2.5. Une fonction $u : [0; T] \rightarrow X$ est dite absolument continue si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_i, b_i) disjoints, inclus dans $[0; T]$, tels que $\sum_i (b_i - a_i) < \delta$ on a $\sum_i \|u(b_i) - u(a_i)\|_X \leq \varepsilon$.

Théorème 2.2.3. Soit $1 \leq p \leq \infty, X$ un espace de Banach réflexif et soit $u \in L^p(0, T; X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u \in W^{1,p}(0, T; X)$.
2. u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable, ayant la dérivée forte dans $L^p(0, T; X)$.
3. Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^p(0, T; X)$, telles que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

L'espace $W^{k,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \sum_{\alpha=1}^k \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

2.3 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans cette section nous rappelons quelques éléments d'analyse dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les équations et les inéquations variationnelles d'évolution paraboliques du première ordre qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques. Puis nous rappelons le théorème de point fixe de Banach.

Équations et inéquations variationnelles d'évolution

Nous commençons ce paragraphe par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert V muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et la norme associée $\|\cdot\|_V$ et V' l'espace dual de V en notant par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$ pour le produit de dualité entre V et V' .

Définition 2.3.1. *L'opérateur $A : V \rightarrow V'$ est dite :*

1. *monotone si*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_{V' \times V} \geq 0 \quad \forall u, v \in V;$$

2. *fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_{V' \times V} \geq m \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V;$$

3. de Lipschitz s'il existe $L > 0$

$$\|Au - Av\|_{V'} \leq L\|u - v\|_V \quad \forall u, v \in V.$$

4. est dite hemicontinu si pour toute suite numérique $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ telle que $\lambda_n \rightarrow \lambda$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a

$$\langle A(u + \lambda_n v), w \rangle_{V' \times V} \rightarrow \langle A(u + \lambda v), w \rangle_{V' \times V} \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

En utilisant la définition précédente, on a le résultat suivant :

Proposition 2.3.1. *Tout opérateur de Lipschitz est hemicontinu.*

Théorème 2.3.1. *Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur hemicontinu et monotone qui satisfait.*

$$\langle Av, v \rangle_{V' \times V} \geq \omega \|v\|_V^2 + \lambda, \quad \forall v \in V, \quad (2.20)$$

$$\|Av\|_{V'} \leq C_1 (\|v\|_V + 1), \quad \forall v \in V. \quad (2.21)$$

Pour des constantes $\omega > 0, C_1 > 0$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Étant donnée $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; V')$, alors il existe une fonction unique u satisfait

$$\begin{aligned} u &\in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V'), \\ \dot{u}(t) + Au(t) &= f(t) \text{ p.p. } t \in (0, T), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Théorème 2.3.2. *Soit V un espace de Hilbert. Soit $A : V \rightarrow V$ un opérateur Lipschitzien et fortement monotone. Alors, pour chaque $f \in V$, il existe un élément unique $u \in V$ tel que $Au = f$.*

Le théorème 2.3.2 montre que si $A : V \rightarrow V$ un opérateur Lipschitzien et fortement monotone défini sur un espace V de Hilbert, alors A est inversible. Les propriétés de son inverse, noté A^{-1} , sont données par le résultat suivant.

Proposition 2.3.2. *Soit V un espace de Hilbert. Soit $A : V \rightarrow V$ un opérateur Lipschitzien et fortement monotone. Alors, $A^{-1} : V \rightarrow V$ un opérateur Lipschitzien et fortement monotone.*

Les démonstration du théorème 2.3.2 et proposition 2.3.2 peuvent être trouver dans ([19] p 23 , 24).

Théorème du point fixe de Banach

Le théorème de point fixe de Banach va être utilisé plus tard dans cette thèse pour démontrer l'existence et l'unicité. Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_X$, $K \subset X$ une partie de X et soit $\Lambda : K \rightarrow X$ un opérateur défini sur K . On s'intéresse à l'existence d'une solution de l'équation

$$\Lambda u = u, \quad u \in K. \quad (2.22)$$

Une telle solution de (2.22) s'appelle un point fixe de Λ dans K .

Théorème 2.3.3. (Théorème du point fixe de Banach) *Soit K une partie non vide et fermé de l'espace de Banach X et soit $\Lambda : K \rightarrow K$ une contractante, i.e, $\exists k \in]0, 1[$ tel que*

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_X \leq k \|u - v\|_X, \quad u, v \in K.$$

Alors il exists un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda u = u$, i.e, Λ possède un point fixe unique dans K

Nous allons ainsi utiliser une version du théorème de point fixe de Banach que nous présentons ci-dessus.

Pour cela, nous rappelons que les puissances de l'opérateur Λ sont définies récursivement par

$$\Lambda^n = \Lambda (\Lambda^{n-1}) \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Théorème 2.3.4. *Sous les mêmes conditions du Théorème 2.3.3, on suppose que Λ^n est une contractante pour un certain entier $n \geq 2$. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .*

Les démonstrations du théorème 2.3.3, 2.3.4 peuvent être trouver dans [13].

2.3.1 Lemme de type Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Pour avoir plus de détails sur le rappels figurant dans ce paragraphe, on pourra consulter

par exemple [16]. Notons par ailleurs que dans certains paragraphes de ce mémoire, nous allons utiliser de versions " presque partout " de ces lemmes.

Lemme 2.3.1. *Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ soit $a \geq 0$ une constante, et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que*

1. *Si*

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\psi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

2. *Si*

$$\psi(t) \leq m(t) + a \cdot \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s)ds \leq e^{aT} \cdot \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

pour le cas particulier $m = 0$ la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 2.3.1. *Soient $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq a \cdot \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Le corollaire 2.3.1 est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. On suppose deux solutions, en notant par ψ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ψ sous la forme

$$\psi(t) \leq \int_0^t n(s)\psi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$. En appliquant corollaire 2.3.1 donne immédiatement la nullité de ψ .

2.4 Énoncés de certains théorèmes

Théorème 2.4.1. (Cauchy-Lipschitz) Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $(0, T)$, qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X, \text{ p.p. } t \in (0, T); \\ (b) \text{ il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que} \\ F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X. \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ tel que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad \text{p.p. } t \in (0, T),$$

$$x(0) = x_0.$$

Théorème 2.4.2. Dans le cas où l'espace $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ est un espace de Hilbert et si la fonction u appartient à l'espace $W^{1,2}(0, T; H)$, alors

1. la fonction $t \rightarrow \frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2$ est une fonction absolument continue sur l'intervalle $]0, T[$.
2. $\frac{d}{dt} \frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 = (\dot{u}(t), u(t))_H$ p.p. $t \in]0, T[$.
3. $\frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 = \frac{1}{2}\|u(0)\|_H^2 + \int_0^t (\dot{u}(s), u(s))_H ds \quad \forall t \in]0, T[$.

CHAPITRE 3

ÉTUDE D'UN PROBLÈME ÉLECTRO-VISCOÉLASTIQUE SANS FROTTEMENT

Dans ce chapitre nous étudions un problème dynamique sans frottement avec compliance normale pour une loi des comportement électro-viscoélastique entre un corps piézoélectrique et une fondation électriquement conductrice et déformable.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la première section, nous commençons à proposer et décrire notre problème puis nous introduisons des hypothèses très utiles pour la dernière section. Ensuite, dans la deuxième section, nous prouvons une formulation variationnelle du problème. Enfin, dans la troisième section, nous énonçons un théorème de l'existence d'une solution faible unique du problème, et nous le prouvons.

3.1 Formulation mécanique du problème

Nous nous plaçons dans le cadre physique de la fig 1.1. On considère que le corps est électro-viscoélastique, plus exactement on utilise une loi de comportement de la forme (1.12). En ce qui concerne le contact, on modélise par une compliance normale sans frottement.

Alors, le modèle classique pour ce processus est le suivant :

Problème \mathcal{P} . Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$, un potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ et un champ de déplacement électrique $D : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tels que

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}\varepsilon(u) - \mathcal{E}^*E(\varphi) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1)$$

$$D = \mathcal{E}\varepsilon(u) + \beta E(\varphi) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.2)$$

$$\text{Div } \sigma + f_0 = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.3)$$

$$\text{div } D - q_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.4)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.5)$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.6)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu (u_\nu - g) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.7)$$

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.8)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (3.9)$$

$$D \cdot \nu = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (3.10)$$

$$D \cdot \nu = k\psi (u_\nu - g) \phi_L(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.11)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.12)$$

Nous décrivons maintenant les notations dans (3.1)-(3.12) et fournissons quelques commentaires sur les égalités et les conditions aux limites. D'abord, les équations (3.1) et (3.2) représentent la loi constitutive électro-viscoélastique que nous avons introduite dans (1.12) où \mathcal{A} et \mathcal{B} sont les opérateurs de viscosité et d'élasticité, respectivement ; \mathcal{E} représente le tenseur piézoélectrique, \mathcal{E}^* est son transposé et β dénote le tenseur de permittivité électrique. Ensuite, les équations (3.3) et (3.4) sont les équations d'équilibre des champs de contrainte et du déplacement électrique, que nous avons déjà vu dans (1.6) et (1.7). Les conditions (3.5) et (3.6) sont les conditions aux limites de déplacement-traction, tandis que (3.9) et (3.11) représentent les conditions aux limites électriques que nous avons définie dans (1.10), (1.11) et (1.19). Rappelons par ailleurs que φ est la fonction de troncation définie par (1.25). Le contact avec compliance normale est modélisé par la condition (3.7) qui figure dans (1.16) et sans frottement est

décrit par la relation (3.8) qui peut être écrite sous la forme (1.15). Finalement, (3.12) est la condition initiale où u_0 est un champ de déplacement donné.

Nous listons maintenant les hypothèses sur les données du problème. L'opérateur de viscosité \mathcal{A} et l'opérateur d'élasticité \mathcal{B} sont supposés satisfaire les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ \mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ (b) \ \text{Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{A}(x, \xi_1) - \mathcal{A}(x, \xi_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\xi_1 - \xi_2\| \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (c) \ \text{Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{A}(x, \xi_1) - \mathcal{A}(x, \xi_2)) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\xi_1 - \xi_2\|^2 \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (d) \ \text{L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{S}^d. \\ (e) \ \text{L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ \mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ (b) \ \text{Il existe } L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{B}(x, \xi_1) - \mathcal{B}(x, \xi_2)\| \leq L_{\mathcal{B}} \|\xi_1 - \xi_2\| \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (c) \ \text{L'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{S}^d. \\ (d) \ \text{L'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Le tenseur piézoélectrique \mathcal{E} et le tenseur de permittivité électrique β satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ \mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ (b) \ \mathcal{E}(x, \tau) = (e_{ijk}(x)\tau_{jk}) \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (c) \ e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \beta : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ (b) \quad \beta(x, E) = (\beta_{ij}(x)E_j) \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \\ (c) \quad \beta_{ij} = \beta_{ji} \in L^\infty(\Omega). \\ (d) \quad \text{Il existe } m_\beta > 0 \text{ tel que } b_{ij}(x)E_iE_j \geq m_\beta \|E\|^2 \\ \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

La fonction de compliance normale p_ν , la masse volumique ρ et la fonction de conductivité électrique de surface ψ vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ (b) \quad \exists L_\nu > 0 \text{ tel que } |p_\nu(x, u_1) - p_\nu(x, u_2)| \leq L_\nu |u_1 - u_2| \\ \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (c) \quad \text{L'application } x \mapsto p_\nu(x, u) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}. \\ (d) \quad p_\nu(x, u) = 0 \text{ pour tout } u \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

$$\rho \in L^\infty(\Omega) \text{ Il existe } \rho^* > 0 \text{ tel que } \rho(x) \geq \rho^* \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad (3.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \psi : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ (b) \quad \exists L_\psi > 0 \text{ tel que } |\psi(x, u_1) - \psi(x, u_2)| \leq L_\psi |u_1 - u_2| \\ \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R} \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (c) \quad \exists M_\psi > 0 \text{ tel que } |\psi(x, u)| \leq M_\psi \quad \forall u \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (d) \quad \text{L'application } x \mapsto \psi(x, u) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}. \\ (e) \quad \psi(x, u) = 0 \quad \forall u < 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

On suppose que les forces volumiques f_0 et les tractions surfaciques f_2 satisfont la régularité

$$f_0 \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^d), \quad f_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d). \quad (3.20)$$

De même, la densité de charge volumique q_0 et surfacique q_2 satisfont

$$q_0 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_2)). \quad (3.21)$$

Finalement, nous donnons que l'interstice g , le coefficient de conductivité électrique k , le potentiel donné et le déplacement initial satisfont :

$$g \in L^2(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \quad (3.22)$$

$$k \in L^\infty(\Gamma_3), \quad k \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \quad (3.23)$$

$$\varphi_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad (3.24)$$

$$u_0 \in V, \quad v_0 \in L^2(\Omega)^d. \quad (3.25)$$

On donne une hypothèse de petitesse sur la fonction de conductivité ψ

$$\|k\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \frac{m_\beta}{M_\psi \tilde{C}_0^2}, \quad (3.26)$$

où les constantes positives M_ψ, m_β et \tilde{C}_0 sont définies dans (3.19), (3.16) et (2.17) respectivement.

Maintenant, On donne la fonction $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu (u_\nu - g) v_\nu da, \quad (3.27)$$

et la fonction $J : V \times W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$J(u, \varphi, \zeta) = \int_{\Gamma_3} k\psi (u_\nu - g) \phi_L (\varphi - \varphi_0) \zeta da, \quad (3.28)$$

soit la fonction $f : [0, T] \rightarrow V'$ défini par

$$\langle f(t), v \rangle_{V' \times V} = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v da, \quad (3.29)$$

et la fonction $q : [0, T] \rightarrow W$ par

$$(q(t), \zeta)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \zeta dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \zeta da, \quad (3.30)$$

pour tout $u, v \in V$; $\varphi, \zeta \in W$ et $t \in [0, T]$. Notons que les définitions de f et q sont basées sur le théorème de représentation de Riesz-Fréchet; de plus, compte tenu des hypothèses (3.17), (3.19) et (3.20), il s'ensuit que les intégrales que nous venons de voir dans (3.27) et (3.28) sont bien définies et

$$f \in L^2(0, T; V'), \quad (3.31)$$

$$q \in W^{1,2}(0, T; W). \quad (3.32)$$

Nous utiliserons le produit scalaire modifié sur $H = L^2(\Omega)^d$ donné par

$$((u, v))_H = (\rho u, v)_H \quad \forall u, v \in H, \quad (3.33)$$

et soit $\|\cdot\|_H$ la norme associée, c'est-à-dire

$$\|v\|_H = (\rho v, v)_H^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in H. \quad (3.34)$$

De (3.18), il vient que $\|\cdot\|_H$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur H . D'autre part, l'application d'inclusion de $(V, \|\cdot\|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et dense. Nous notons par V' le dual de V . Identifiant le dual de H avec lui même. Donc, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$V \subset H \subset V'.$$

La notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$ désigne le produit de dualité entre V' et V , on a

$$\langle u, v \rangle_{V' \times V} = ((u, v))_H = (\rho u, v)_H \quad \forall u \in H, v \in V. \quad (3.35)$$

3.2 Formulation variationnelle

En utilisant la formule de Green (2.7)

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1,$$

on trouve

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} \text{Div } \sigma \cdot v dx = \int_{\Gamma_1} \sigma \nu \cdot v da + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot v da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in V.$$

De la définition de l'espace V avec (3.3) et (3.6), on obtient

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx - \int_{\Omega} f_0 \cdot v dx + \int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot v dx = \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot v da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in V.$$

D'après les formules (1.3), (3.7) et (3.8) on a

$$\sigma \nu \cdot v = -p_{\nu}(u_{\nu} - g)v_{\nu}, \quad (3.36)$$

il vient que

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot v dx = \int_{\Omega} f_0 \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot v da - \int_{\Gamma_3} p_{\nu}(u_{\nu} - g)v_{\nu} da. \quad (3.37)$$

De (3.27), (3.29), (3.33) et (3.35) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle \rho \ddot{u}(t), v \rangle_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u, v) &= \langle f(t), v \rangle_{V' \times V} \\ \forall v \in V, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} ((\ddot{u}(t), v))_H + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u, v) &= \langle f(t), v \rangle_{V' \times V} \\ \forall v \in V, t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.39)$$

D'autre part, en utilisant la formule de Green (2.18)

$$(D, \nabla \zeta)_H + (\operatorname{div} D, \zeta)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D \cdot \nu \zeta da \quad \forall \zeta \in H^1(\Omega),$$

on a

$$\int_{\Omega} D \cdot \nabla \zeta dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} D \cdot \zeta da = \int_{\Gamma_a} D \cdot \nu \zeta da + \int_{\Gamma_b} D \cdot \nu \zeta da + \int_{\Gamma_3} D \cdot \nu \zeta da \quad \forall \zeta \in W.$$

De la définition de l'espace W avec (3.4), (3.9)-(3.11), nous trouvons

$$\int_{\Omega} D \cdot \nabla \zeta dx + \int_{\Omega} q_0 \cdot \zeta dx - \int_{\Gamma_b} q_2 \cdot \zeta da = \int_{\Gamma_3} k\psi(u_\nu - g)\phi_L(\varphi - \varphi_0)\zeta da \quad \forall \zeta \in W.$$

De (3.2), (3.28) et (3.30), on obtient

$$(D(t) \cdot \nabla \zeta)_H + (q(t), \zeta)_W = J(u, \varphi, \zeta) \quad \forall \zeta \in W. \quad (3.40)$$

Nous avons

$$(\beta \nabla \varphi(t), \nabla \zeta)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u(t)), \nabla \zeta)_H + J(u, \varphi, \zeta) = (q(t), \zeta)_W \quad \forall \zeta \in W, t \in (0, T). \quad (3.41)$$

Enfin, on obtient la formulation variationnelle du problème P

Problème \mathcal{P}_V . Trouver un champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$ et un potentiel électrique $\varphi : [0, T] \rightarrow W$ tels que

$$\begin{aligned} \langle \ddot{u}(t), v \rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A} \varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{B} \varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u(t), v) \\ = \langle f(t), v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} (\beta \nabla \varphi(t), \nabla \zeta)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u(t)), \nabla \zeta)_H + J(u(t), \varphi(t), \zeta) \\ = (q(t), \zeta)_W \quad \forall \zeta \in W, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0. \quad (3.44)$$

3.3 Existence et unicité de la solution

L'intérêt principal dans cette section est le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 3.3.1. *Sous les hypothèses (3.13)-(3.26), le problème \mathcal{P}_V admet une solution unique u, φ ayant la régularité. En outre, la solution vérifie :*

$$u \in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1([0, T]; H), \quad \ddot{u} \in L^2(0, T; V'), \quad (3.45)$$

$$\varphi \in W^{1,2}(0, T; W). \quad (3.46)$$

Les fonctions $\{u, \varphi, \sigma, D\}$, satisfaisant (3.1), (3.2) et (3.42), (3.43) s'appellent une solution faible du problème \mathcal{P} .

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad D \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{W}). \quad (3.47)$$

De plus, en utilisant (3.1), (3.2) combinée avec (3.42), (3.43) et la notation (3.28)-(3.30) il vient que $\rho \ddot{u} = \text{Div } \sigma(t) + f_0$, $\text{div } D = q_0(t)$ pour tout $t \in [0, T]$; de la régularité (3.20), (3.21)

$$\text{Div } \sigma \in L^2(0, T; H), \quad \text{div } D \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{W}). \quad (3.48)$$

La démonstration du théorème 3.3.1 sera faite en plusieurs étapes, elle est basée sur les résultats des inéquations variationnelles, les opérateurs monotones et les arguments du point fixe. Nous supposons dans la suite de cette section que (3.13)-(3.21) sont vérifiés.

Soit $\eta \in L^2(0, T; V')$. Dans la première étape, on considère le problème variationnel suivant.

Problème \mathcal{P}_η . Trouver le champ de déplacement $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ tel que :

$$\begin{aligned} \langle \ddot{u}_\eta(t), v \rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + \langle \eta(t), v \rangle_{V' \times V} &= \langle f(t), v \rangle_{V' \times V} \\ \forall v \in V, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$u_\eta(0) = u_0, \quad \dot{u}_\eta(0) = v_0. \quad (3.50)$$

Nous changeons \dot{u}_η par w_η , on obtient

$$\begin{aligned} \langle \dot{w}_\eta(t), v \rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(w_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + \langle \eta(t), v \rangle_{V' \times V} &= \langle f(t), v \rangle_{V' \times V} \\ \forall v \in V, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$w_\eta(0) = v_0. \quad (3.52)$$

Pour le démontrer, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.3.1. *Il existe une unique solution du problème \mathcal{P}_η qui satisfait (3.45)*

Démonstration. Nous définissons l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ par

$$\langle Aw, v \rangle_{V' \times V} = (\mathcal{A}(\varepsilon(w)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall w, v \in V. \quad (3.53)$$

Il résulte de (3.53) et (3.13) (b)

$$\|Aw - Av\|_{V'} \leq L_{\mathcal{A}} \|w - v\|_V \quad \forall w, v \in V, \quad (3.54)$$

l'inégalité (3.54) implique que l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ est de Lipschitz et ainsi est hémicontinu (voir la proposition 2.3.1).

Maintenant par (3.53) et (3.13)(c), on trouve

$$\langle Aw - Av, w - v \rangle_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} \|w - v\|_V^2 \quad \forall w, v \in V, \quad (3.55)$$

à savoir que $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur fortement monotone sur V . Maintenant, nous choisissons $v = 0_V$ dans (3.55), on obtient

$$\langle Aw, w \rangle_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} \|w\|_V^2 - \|A0_V\|_{V'} \cdot \|w\|_V.$$

En utilisant l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} a^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} b^2.$$

On obtient

$$\langle Aw, w \rangle_{V' \times V} \geq \frac{1}{2} m_{\mathcal{A}} \|w\|_V^2 - \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \|A0_V\|_{V'}^2 \quad \forall w \in V. \quad (3.56)$$

Donc

$$\langle Aw, w \rangle_{V' \times V} \geq \omega \|w\|_V^2 + \lambda \quad \forall w \in V, \quad (3.57)$$

avec

$$\omega = \frac{1}{2} m_{\mathcal{A}}, \quad \lambda = -\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \|A0_V\|_{V'}^2.$$

Alors, la condition (2.20) du théorème 2.3.1 est vérifiée. En plus, à l'aide de (3.54) nous déduisons que

$$\|Aw\|_{V'} \leq L_{\mathcal{A}} \|w\|_V + \|A0_V\|_{V'} \quad \forall w \in V. \quad (3.58)$$

On pose $C_1 = \max \{L_{\mathcal{A}}, \|A0_V\|_{V'}\}$, nous trouvons

$$\|Aw\|_{V'} \leq C_1 (\|w\|_V + 1) \quad \forall w \in V. \quad (3.59)$$

Alors, la condition (2.21) du théorème 2.3.1 est satisfaite. En outre, de (3.31), nous avons

$$f - \eta \in L^2(0, T; V').$$

Comme A est fortement monotone alors il est monotone, A est un opérateur hémicontinu puisque est de Lipschitz et d'après les deux inégalités (3.57), (3.59), nous remarquons que toutes les conditions du théorème 2.3.1 sont vérifiées, donc, nous concluons qu'il existe une unique fonction w_η qui satisfait

$$w_\eta \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{w}_\eta \in L^2(0, T; V'), \quad (3.60)$$

$$\dot{w}_\eta(t) + Aw_\eta(t) + \eta(t) = f(t) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (3.61)$$

$$w_\eta(0) = v_0. \quad (3.62)$$

Alors, il existe une unique fonction u_η qui satisfait

$$u \in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1(0, T; H), \quad \ddot{u} \in L^2(0, T; V'). \quad (3.63)$$

Nous définissons la fonction $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ par

$$u_\eta(t) = \int_0^t w_\eta(s) ds + u_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.64)$$

De (3.53), (3.60) et (3.64), nous déduisons que u_η est une solution unique du problème variationnel \mathcal{P}_η satisfait la régularité (3.45). \square

Dans la deuxième étape, nous utilisons le champ des déplacements u_η obtenu dans lemme 3.3.1 et nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème Q_η . Trouver un champ de potentiel électrique $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$

$$\begin{aligned} (\beta \nabla \varphi_\eta(t), \nabla \zeta)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u_\eta(t)), \nabla \zeta)_H + J(u_\eta(t), \varphi_\eta(t), \zeta) &= (q(t), \zeta)_W \\ \forall \zeta \in W, t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3.2. *Il existe une solution unique du problème Q_η et cela satisfait la régularité (3.46). De plus si φ_{η_1} et φ_{η_2} sont deux solutions de (3.65) correspondantes à $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T; V')$ alors il existe $C > 0$ tel que*

$$\|\varphi_{\eta_1}(t) - \varphi_{\eta_2}(t)\|_W \leq C \|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.66)$$

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$. Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz-Fréchet pour définir un opérateur $A_\eta(t) : W \rightarrow W$ par

$$(A_\eta(t)\varphi, \zeta)_W = (\beta \nabla \varphi, \nabla \zeta)_W - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla \zeta)_W + (J(u_\eta(t), \varphi, \zeta)), \quad (3.67)$$

pour tout $\zeta, \varphi \in W$. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in W$ et nous utilisons les hypothèses (3.16)(d) et (3.28) pour trouver

$$\begin{aligned} & (A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \\ & \geq m_\beta \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 + \int_{\Gamma_3} k\psi(u_{\eta\nu}(t) - g) [\phi_L(\varphi_1 - \varphi_0) - \phi_L(\varphi_2 - \varphi_0)] (\varphi_1 - \varphi_2) da. \end{aligned}$$

Comme ϕ_L est 1-Lipshitzienne, en utilisant (3.19) et (2.17), nous obtenons

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq m_\beta \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 - \|k\|_{L^\infty(\Gamma_3)} M_\psi \tilde{C}_0^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2. \quad (3.68)$$

Il résulte de l'inégalité (3.68) et de l'hypothèse de petitesse (3.26) qu'il existe $c > 0$ tel que

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq c \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2. \quad (3.69)$$

D'autre part, en utilisant (3.16), (3.19) et (3.28) nous avons

$$\begin{aligned} & (A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \zeta)_W \\ & \leq C_\beta \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\zeta\|_W + \|k\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_{\Gamma_3} M_\psi \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\zeta\|_W da, \quad \forall \zeta \in W, \end{aligned} \quad (3.70)$$

où C_β est une constante positive qui dépend de β . Il s'ensuit de (3.70) et (2.17) que

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \zeta)_W \leq \left(C_\beta + M_\psi \tilde{C}_0^2 \|k\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \right) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\zeta\|_W,$$

ce qui implique que

$$\|A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2\|_W \leq \left(C_\beta + M_\psi \tilde{C}_0^2 \|k\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \right) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W. \quad (3.71)$$

Les inégalités (3.69) et (3.71) montrent que l'opérateur $A_\eta(t)$ est fortement monotone et de Lipschitz sur W ; donc, en utilisant le théorème 2.3.2 pour l'opérateur A_η , il s'ensuit qu'il existe un unique élément $\varphi_\eta(t) \in W$ tel que

$$A_\eta(t)\varphi_\eta(t) = q(t). \quad (3.72)$$

Nous combinons maintenant (3.67) et (3.72) pour déduire que $\varphi_\eta(t) \in W$ est l'unique solution de l'équation variationnelle (3.67) d'après la proposition 2.3.2.

Maintenant, on va démontrer que $\varphi_\eta \in W^{1,2}(0, T; W)$. Pour ceci nous considérons $t_1, t_2 \in [0, T]$ et, pour raison de simplifier, nous écrivons $\varphi_\eta(t_i) = \varphi_i, u_{\nu\eta}(t_i) = u_i, q(t_i) = q_i$, pour $i = 1, 2$. En utilisant (3.65), (3.15), (3.16) et (3.28) il résulte

$$\begin{aligned} m_\beta \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 &\leq C_\varepsilon \|u_1 - u_2\|_V \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W + \|q_1 - q_2\|_W \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \\ &\quad + \|k\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_{\Gamma_3} |\psi(u_1 - g) \phi_L(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_2 - g) \phi_L(\varphi_2 - \varphi_0)| |\varphi_1 - \varphi_2| da, \end{aligned} \quad (3.73)$$

où C_ε représente une constante positive qui dépend du tenseur piézoélectrique \mathcal{E} .

Nous utilisons les bornes $|\psi(u_i - g)| \leq M_\psi, |\phi_L(\varphi_i - \varphi_0)| \leq L$, les propriétés des fonctions ψ, ϕ_L et l'inégalité (2.13) et (2.17), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_3} |\psi(u_1 - g) \phi_L(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_2 - g) \phi_L(\varphi_2 - \varphi_0)| |\varphi_1 - \varphi_2| da \\ &\leq M_\psi \int_{\Gamma_3} |\varphi_1 - \varphi_2|^2 da + L_\psi L \int_{\Gamma_3} |u_1 - u_2| |\varphi_1 - \varphi_2| da \\ &\leq M_\psi \tilde{C}_0^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 + L_\psi L C_0 \tilde{C}_0 \|u_1 - u_2\|_V \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W. \end{aligned}$$

Nous remplaçons cette dernière inégalité dans (3.73) pour trouver

$$\begin{aligned} m_\beta \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W &\leq \left(C_\varepsilon + L_\psi L C_0 \tilde{C}_0 \|k\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \right) \|u_1 - u_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W \\ &\quad + M_\psi \tilde{C}_0^2 \|k\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Il s'ensuit maintenant de l'inégalité (3.73) et l'hypothèse de petitesse (3.26) que

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \leq C (\|u_1 - u_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W), \quad (3.75)$$

où C est une constante positive. Comme $q \in W^{1,2}(0, T; W)$ et $u_\eta \in C^1(0, T; H)$, l'inégalité (3.75) implique que $\varphi_\eta \in W^{1,2}(0, T; W)$. Soit maintenant $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T; V')$ et pour simplifier, notons $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i, u_{\eta_i} = u_i, i = 1, 2$. Nous utilisons (3.65) et en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (3.74) pour obtenir que

$$\begin{aligned} m_\beta \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W &\leq \left(C_\varepsilon + L_\psi L C_0 \tilde{C}_0 \|k\|_{L^\infty(I_3)} \right) \|u_1(t) - u_2(t)\|_V \\ &\quad + M_\psi \tilde{C}_0^2 \|k\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité, combinée à l'hypothèse (3.26) conduit à (3.66), ce qui achève la preuve. \square

Pour chaque $\eta \in L^2([0, T]; V')$ nous notons par u_η la solution du problème \mathcal{P}_η fournie dans le Lemme 3.3.1 et par φ_η la solution du problème Q_η fournie dans le Lemme 3.3.2. En outre, nous considérons maintenant l'opérateur $\Lambda : L^2(0, T; V') \rightarrow L^2(0, T; V')$ défini par

$$\langle \Lambda \eta(t), v \rangle_{V' \times V} = (\mathcal{B}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u_\eta(t), v) \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.76)$$

pour tout $v \in V$ et $t \in [0, T]$, nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.3.3. *Il existe un unique élément $\tilde{\eta} \in L^2(0, T; V')$ tel que $\Lambda \tilde{\eta} = \tilde{\eta}$.*

Démonstration. Soient $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T; V')$, soit $t \in [0, T]$ Pour simplifier, nous utilisons les notations $u_{\eta_i} = u_i, \dot{u}_{\eta_i} = \dot{u}_i$ et $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$, pour $i = 1, 2$; nous avons

$$\begin{aligned} \langle \Lambda \eta_1(t) - \Lambda \eta_2(t), v \rangle_{V' \times V} &= (\mathcal{B}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{B}\varepsilon(u_2(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_1(t) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_2(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + (j(u_1(t), v) - j(u_2(t), v)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle \Lambda \eta_1(t) - \Lambda \eta_2(t), v \rangle_V| &\leq |\mathcal{B}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{B}\varepsilon(u_2(t)), \varepsilon(v)| + |\mathcal{E}^* \nabla \varphi_1(t) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_2(t), \varepsilon(v)| \\ &\quad + |j(u_1(t), v) - j(u_2(t), v)|. \end{aligned}$$

Soit $u_1, u_2, v \in V$, nous utilisons (3.27) et (3.17), on obtient

$$\begin{aligned} |j(u_1, v) - j(u_2, v)| &= \left| \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_{1\nu} - g) - p_\nu(u_{2\nu} - g)) v_\nu da \right| \\ &\leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu(u_{1\nu} - g) - p_\nu(u_{2\nu} - g)| |v_\nu| da \\ &\leq L_\nu \int_{\Gamma_3} |u_{1\nu} - u_{2\nu}| |v_\nu| da. \end{aligned}$$

Notons que $|u_{1\nu} - u_{2\nu}| \leq \|u_1 - u_2\|, |v_\nu| \leq \|v\|$ p.p. sur Γ_3 , on obtient

$$|j(u_1, v) - j(u_2, v)| \leq L_\nu \int_{\Gamma_3} \|u_1 - u_2\| \|v\| da.$$

Nous utilisons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et (2.13) pour trouver

$$|j(u_1, v) - j(u_2, v)| \leq C_0^2 L_\nu \|u_1 - u_2\|_V \|v\|_V. \quad (3.77)$$

Nous rappelons que $\|\Lambda \eta_1(t) - \Lambda \eta_2(t)\|_{V'} = \sup_{\|v\| \leq 1} |\langle \Lambda \eta_1(t) - \Lambda \eta_2(t), v \rangle|$ et d'après (2.11), on obtient

$$\begin{aligned} \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_{V'} &\leq \|\mathcal{B}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{B}\varepsilon(u_2(t))\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{E}^*\nabla\varphi_1(t) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_2(t)\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + |j(u_1(t), v) - j(u_2(t), v)|. \end{aligned} \quad (3.78)$$

D'après l'inégalité (3.78) combinée avec les hypothèses (2.13), (3.14) sur \mathcal{B} et (3.15) sur \mathcal{E} , et aussi combinée avec (3.77), on obtient

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_{V'} \leq c(\|u_1 - u_2\|_V + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W).$$

En utilisant l'inégalité suivant $2ab \leq a^2 + b^2$, pour trouver

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_{V'}^2 \leq C(\|u_1 - u_2\|_V^2 + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2). \quad (3.79)$$

D'après (3.64) et Comme u_1 et u_2 ont la même valeur initiale, il s'ensuit que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.80)$$

Mettons $\eta = \eta_1, v = \dot{u}_1$ puis $\eta = \eta_2, v = \dot{u}_2$ dans (3.49) et en combinant les inégalités résultantes, nous trouvons

$$\begin{aligned} \langle \ddot{u}_1 - \ddot{u}_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \rangle_{V' \times V} + \langle A\dot{u}_1 - A\dot{u}_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \rangle_{V' \times V} + \langle \eta_1 - \eta_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \rangle_{V' \times V} = 0 \\ \text{p.p. } t \in [0, t]. \end{aligned}$$

En vertu de (2.11), (3.18), (3.35), (3.55) et le théorème 2.4.2, l'équation précédente devient

$$\frac{(\rho^*)^2}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_H^2 + m_{\mathcal{A}} \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_V^2 \leq \|\eta_2(t) - \eta_1(t)\|_{V'} \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_V.$$

On intègre cette inégalité par rapport au temps et par l'inégalité de Young mène à

$$(\rho^*)^2 \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_H^2 + m_{\mathcal{A}} \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V^2 ds \leq \frac{1}{m_{\mathcal{A}}} \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds.$$

Par conséquence

$$\int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V^2 ds \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (3.81)$$

ce qui implique également, en utilisant (3.80), que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (3.82)$$

D'autre part, nous utilisons (3.66) et (3.82), pour trouver

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (3.83)$$

Alors, d'après (3.79), (3.82) et (3.83), en obtient

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_{V'}^2 \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds. \quad (3.84)$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_{V'}^2 &\leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds, \\ \|\Lambda^2\eta_1(t) - \Lambda^2\eta_2(t)\|_{V'}^2 &\leq C \int_0^t C \int_0^s \|\eta_1(r) - \eta_2(r)\|_{V'}^2 dr ds, \\ \|\Lambda^2\eta_1(t) - \Lambda^2\eta_2(t)\|_{V'}^2 &\leq C^2 \int_0^t \int_0^s \|\eta_1(r) - \eta_2(r)\|_{V'}^2 dr ds, \\ \|\Lambda^3\eta_1(t) - \Lambda^3\eta_2(t)\|_{V'}^2 &\leq C^3 \int_0^t \int_0^s \int_0^r \|\eta_1(l) - \eta_2(l)\|_{V'}^2 dl dr ds, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \|\Lambda^p\eta_1(t) - \Lambda^p\eta_2(t)\|_{V'}^2 &\leq C^p \underbrace{\int_0^t \int_0^s \dots \int_0^h}_{p \text{ integrals}} \|\eta_1(l) - \eta_2(l)\|_{V'}^2 dl \dots dr ds. \end{aligned}$$

On sait que : $\int_0^r ds = r$, $r \in [0, T]$,

et que $\int_0^s \int_0^r dr ds = \int_0^s r dr = \frac{s^2}{2}$,

et que $\int_0^t \int_0^s \int_0^r dl dr ds = \frac{t^3}{6} = \frac{t^3}{3!}$,

$$\int_0^t \int_0^s \dots \int_0^r dl \dots dr ds = \frac{t^p}{p!}.$$

Quand on note $p = n$; nous déduisons :

$$\|\Lambda^n\eta_1 - \Lambda^n\eta_2\|_{L^2(0,T;V')}^2 \leq \frac{(CT)^n}{n!} \|\eta_1 - \eta_2\|_{L^2(0,T;V')}^2. \quad (3.85)$$

D'après l'équivalence de Stirling $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C^n T^n}{n!} = 0$, l'inégalité précédente implique que pour n suffisamment grand Λ^n est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0, T; V')$ donc Λ a un point fixe unique. \square

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour prouver le théorème 3.3.1

Démonstration du théorème 3.3.1

Existence. Soit $\tilde{\eta} \in L^2(0, T; V')$ le point fixe de l'opérateur Λ et soit $u_{\tilde{\eta}}, \varphi_{\tilde{\eta}}$ les solutions des problèmes $\mathcal{P}_{\tilde{\eta}}, Q_{\tilde{\eta}}$ respectivement pour $\eta = \tilde{\eta}$ c'est-à-dire $u_{\tilde{\eta}} = u_{\tilde{\eta}}, \varphi_{\tilde{\eta}} = \varphi_{\tilde{\eta}}$. L'égalités $\Lambda\tilde{\eta} = \tilde{\eta}$ combinées avec (3.76) montrent que (3.42), (3.43) sont satisfaites. Ensuite, (3.44) et la régularité (3.45), (3.46) résulte de Lemme 3.3.1 et 3.3.2. Comme $u \in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1(0, T; H)$ et $\varphi \in W^{1,2}(0, T; W)$, il s'ensuit de (3.1), (3.2), (3.13), (3.14), (3.15) et (3.16) que $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ et $D \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{W})$. Maintenant les hypothèses (3.18), (3.20), (3.21) et la régularité $\ddot{u} \in L^2(0, T; V')$ impliquent que $\text{Div } \sigma \in L^2(0, T; H)$ et $\text{div } D \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{W})$.

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (3.76) et la solvabilité unique de problème \mathcal{P}_{η} et Q_{η} .

CONCLUSION

Cet mémoire est destinée à l'étude variationnelle d'un problème de contact entre un corps déformable et une fondation. Sous l'hypothèse des petites transformations, nous analysons un processus statique, i.e. que tous les effets du rayonnement sont négligés et mécaniquement dynamiques, pour un matériau électro-viscoélastique. Les conditions aux limites sont de compliance normale et sans frottement. Les conditions électriques sont introduites dans le cas où la fondation est conductrice. Notre étude de phénomène de contact comprend les étapes suivantes : la modélisation mathématique, l'analyse variationnelle incluant de résultat obtenus concernant l'existence et l'unicité d'une solution faible pour le problème étudié, en utilisant les techniques de point fixe de Banach et de monotonie.

- [1] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Y. Ayyad, Analyse Variationnelle de Problèmes Dynamiques, Presses Académiques Francophones, (2013).
- [3] M. Barboteu, J. R. Fernandez, Y. Ouafik, Numerical Analysis of A Frictionless Viscoelastic Piezoelectric Contact Problem, Mathematical Modelling and Numerical Analysis 42 (2008) 667-682.
- [4] M. Barboteu, M. Sofonea, Modelling and analysis of the unilateral contact of a piezoelectric body with a conductive support, Journal of Mathematical Analysis and Applications 358 (2009) 110-124.
- [5] M. Barboteu, M. Sofonea, Analysis and numerical approach of a piezoelectric contact problem, Annals of the Academy of Romanian Scientists, Series on Mathematics and its Applications 1 (2009) 7-31.
- [6] M. Barboteu, M. Sofonea, Solvability of a dynamic contact problem between a piezoelectric body and a conductive foundation, Applied Mathematics and Computation 215 (2009) 2978-2991.
- [7] R. C. Batra, J. S. Yang, Saint-Venants principle in linear piezoelectricity, Journal of Elasticity 38 (1995) 209-218.
- [8] P. Bisegna, F. Lebon, F. Maceri, The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support, in : J.A.C. Martins, Manuel D.P. Monteiro Marques (Eds.), Contact Mechanics, Kluwer, Dordrecht, 2002, pp. 347-354.

- [9] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, 1987.
- [10] M. Campo, J. R. Fernández, Á. D. Rodríguez-Arós, J. M. Rodríguez, Analysis of a Dynamic Viscoelastic-Viscoplastic Piezoelectric Contact Problem, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 51 (2017) 565-586.
- [11] O. Chau, J. R. Fernández, W. Han, M. Sofonea, Variational and numerical analysis of a dynamic frictionless contact problem with adhesion, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 156 (2003) 127-157.
- [12] G. Duvaut, J.L.Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod 1972.
- [13] W. Han, M. Sofonea, *Quasistatic contact problems in viscoelasticity and viscoplasticity*, *Studies in Advanced Mathematics*, vol. 30, American Mathematical Society, Providence, RI - Intl. Press, Sommerville, MA, (2002).
- [14] H. Hilber, T. Hughes, R. Taylor, Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 5 (1977) 283-292.
- [15] T. Ikeda, *Fundamentals of Piezoelectricity*, Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [16] I. R. Ionescu and M. Sofonea, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford, (1994).
- [17] Z. Lerguet, M. Shillor, M. Sofonea, A frictional contact problem for an electroviscoelastic body, *Electronic Journal of Differential Equations* 170 (2007) 1-16.
- [18] F. Maceri, P. Bisegna, The unilateral frictionless contact of a piezoelectric body with a rigid support, *Math. Comp. Modelling*, 28 (1998) 19-28.
- [19] M. Sofonea, A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, Cambridge University Press, New York, (2012).
- [20] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Taylor and Francis Group, New York, (2006).

Résumé

Notre travail représente une contribution à l'analyse d'un problème de contact en tenant compte de l'effet piézoélectrique du matériau. Sous l'hypothèse de petite transformation nous étudions un processus dynamique, pour de matériau électro-viscoélastique. Les conditions aux limites sont de compliance normale et sans frottement. Les conditions électriques sont introduites dans le cas où la fondation est conductrice. Notre étude de phénomène de contact comprend les étapes suivantes : la modélisation mathématique puis l'analyse variationnelle incluant de résultat d'existence et d'unicité de la solution faible du problème.

Mots clés : électro-viscoélastique, compliance normale, piézoélectrique, permittivité électrique, sans frottement, formule variationnelle, solution faible, point fixe.

Abstract

Our work represents a contribution to the analysis of a contact problem taking into account the piezoelectric effect of the material. Under the assumption of small transformation we study a dynamic process, for electro-viscoelastic material. The boundary conditions are of normal compliance and frictionless. The electrical conditions are introduced in the case where the foundation is conductive. Our study of contact phenomena includes the following steps : mathematical modeling and then the variational analysis including the existence and uniqueness result of the weak solution of the problem.

Key words : electro-viscoelastic, normal compliance, piezoelectric, electrical permittivity, frictionless, variational formula, weak solution, fixed point.

ملخص

يقدم عملنا مساهمة في تحليل مسألة التلامس مع الأخذ بالحسبان كهروضغطية المادة. تحت افتراض التحول الصغير، ندرس عملية ديناميكية، لمادة لزجة ومرنة تحت تأثير كهربائي. إن الشروط الحدية للمسألة تمثل في الامتثال الطبيعي وبدون احتكاك كما يتم إدخال الشروط الكهربائية في حالة كون قاعدة التلامس موصلة للكهرباء. تشمل دراستنا لظاهرة التلامس هذه المحطات التالية : النمذجة الرياضية ثم التحليل التغيري الذي يهتم بدراسة وجود ووحدانية الحل الضعيف للمسألة. كلمات مفتاحية : لزج ومرن تحت تأثير كهربائي، امتثال طبيعي، كهروضغطية، سماحية كهربائية، دون احتكاك، صيغة تغيرية، حل ضعيف، نقطة ثابتة.