N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de

la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

Sur l'existence des solutions pour certaines équations différentielles fractionnaires dans des espaces de Banach

Présenté par: Tamma Safa
Lemmouchi Nacira

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Hariz Baker Ourabi	MCA	Président	Univ. El Oued
Beloul Said	MCA	Rapporteur	Univ. El Oued
Nisse Lamine	Prof	Examinateur	Univ. El Oued

Année universitaire 2018 – 2019

*** Dédicace***

dédie le fruit d'années d'efforts Pour le chef-d'oeuvre merveilleux de Dieu de tout fatigué de la paume des mains, les gens qui méritent mon respect et mon amour

** Ma chère mère**

À la chose la plus précieuse que j'ai, à ceux qui m'enseignent les principes de la science et de la connaissance

Cher Père

A leurs yeux, ma joie et leur joie dans ma vie, mes soeurs et frère ***"Meriem, Chames Edhia, Chaima, Hania, Ikhlas, Taher "***

À mes chèrs amis ***"Kaouthar, Amina, Marwa, Hana, Hafsa*** et ***Samira"****, l'ami qui a supporté avec moi les difficultés de notre travail*

Nacira

mes professeurs et enseignants

qui ont suivi mes études et mes études tout au long de ma carrière académique mes collègues de l'université, en particulier une deuxième année Mathématique appliquée à ***"Université Echahid Hamma Lakhdar d'El OUED"*** *tous ceux-ci j'ai consacré ce mémoire.*

Safa Tamma

*** Dédicace***

dédie le fruit d'années d'efforts Pour le chef-d'oeuvre merveilleux de Dieu de tout fatigué de la paume des mains, les gens qui méritent mon respect et mon amour

** Ma chère mère**

À la chose la plus précieuse que j'ai, à ceux qui m'enseignent les principes de la science et de la connaissance

Cher Père

*A leurs yeux, ma joie et leur joie dans ma vie, mes soeurs et frères**" Nadjat, Fatima, Zina, Salima, Said, Houcine "***

*À mes chèrs amis **"Karima, Mouna, Rabia, Ahlam, Salma, Samia, Dalal "**, l'ami qui a supporté avec moi les difficultés de notre travail*

Safa

mes professeurs et enseignants

*qui ont suivi mes études et mes études tout au long de ma carrière académique mes collègues de l'université, en particulier une deuxième année Mathématique appliquée à **"Université Echahid Hamma Lakhdar d'El OUED"** tous ceux-ci j'ai consacré ce mémoire.*

Nacira Lemmouchi

Remerciements

Avant toute chose, nous tenons à remercier " **Allah** " le tous puisant, pour nous avoir donné la force et la patience.

Nous exprimons notre profonde gratitude et nos remerciements :

À notre encadreur de mémoire **Dr. Beloul Said** Maitre de Conférence à l'université Echahid Hamma Lakhder d'El Oued, pour avoir accepté de nous encadrer, pour son enseignement, son support, ses encouragements, sa patience qu'il n'a cessé de nous apporter tout au long de ce travail.

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous on fait en acceptant de siéger à notre soutenance.

Un remerciement spécial et sincère aux **Prof. Nisse Lamine**, **Dr.Hadj Ammar Tedjani**,et **Dr.Guedda Lamine** de l'université Echahid Hamma Lakhder d'El Oued pour Son aide et sa sympathie.

Cette page n'aurait probablement pas pu s'écrire sans l'appui moral des membres de nos familles.

Nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux vont également au nos camarades de la promotion 2019 de Mathématiques et nos amis pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal.

Finalement, Nous réservons une mention particulière à toutes les personnes qui nous ont apporté le soutien et l'aide attendu.

Table des matières

Notations

$\mathbb{R}$	: l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{N}$	: l'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{C}$	: l'ensemble des nombres complexes.
$C([a,b],\mathbb{R})$	: l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
$conv\Omega$	: l'enveloppe convexe fermé d'un ensemble Ω.
$\vert\ .\ \vert$	: valeur absolue ou module.
$\Vert.\Vert_\infty$	: $=\sup\{\Vert x(t)\Vert : t\in I\}$.
$AC([a,b])$	: l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$.
$AC^n([a,b])$	: $\left\{f:\Omega\to\mathbb{C} : f^{(k)}\in C([a,b]), k=0\dots n-1, f^{(n-1)}\in AC([a,b])\right\}$.
$\Gamma(\alpha)$	: fonction Gamma.
$B(p,q)$	: fonction Bêta.
I^α	: intégrale fractionnaire.
${}^{RL}D^\alpha$	: Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.
${}^{c}D^\alpha$	: Dérivée fractionnaire de Caputo.

Introduction générale

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Selon une thèse d'histoire des mathématiques récente, la question des dérivées fractionnaires fût abordée dès 1695 par Leibnitz dans une lettre à L'Hospital, mais lorsque celui-ci lui demande qu'elle pourrait être la dérivée d'ordre un demi de la fonction x, Leibnitz répond que cela même à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences. Plus de 300 ans après, on commence seulement à venir à bout des difficultés. Des nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier Euler (1730), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847),...etc. Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non-entiers.

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Notons que cette théorie a de nombreuses applications dans la description de nombreux évènements dans le monde réel. Par exemple, les équations différentielles fractionnaires sont souvent applicables dans lingénierie, la physique, la chimie, la biologie, ...etc.

Nous nous intéressons à étudier certaines équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Notre objectif est de présenter quelques résultats d'existence de solutions pour quelques classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire. Pour obtenir l'existence des solutions, des conditions suffisantes seront considérées dans l'étude des différentes classes des problèmes aux limites associés aux équations différentielles d'ordre fractionnaire de cette thèse. La démarche suivie consiste à ramener la recherche de l'existence (sous des conditions convenables) de ces solutions à la recherche de l'existence des points fixes d'opérateurs appropriés moyennant la fonction de Green en appliquant différentes alternatives non linéaires dans les espaces de Banach, pour montrer l'existence des points fixes de ces opérateurs qui sont les solutions de nos problèmes. Cette méthode est basée sur de célèbres théorèmes du point fixe tels que, le théorème de point fixe de Mönch.

Dans ce mémoire, ces études en donnant résultats d'existence des solutions pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire, moyennant la dérivée fractionnaire de Caputo dans des espaces de Banach de dimension infini. Cette étude se fera principalement à l'aide de théorème de point fixe de Mönch combiné avec la technique de la mesure de non compacité

Ce mémoire comprend quatre chapitres.

Le premier chapitre intitulé "Préliminaires", contient un ensemble de définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite de cette étude.

Le deuxième chapitre intitulé "Problème aux limites pour des équations fractionnaires", on traitera l'existence des solutions pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Caputo.

Le troisième et quatrième chapitre intitulé "Problème aux limites avec des conditions intégrales", on s'intéresse à l'existence des solutions pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire toujours de type Caputo.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre contient certaines notions et quelques outils utilisées tout au long de ce mémoire concernant la topologie faible et l'analyse fonctionnelle.

1.1 Espaces de Banach

1.1.1 Espaces métriques

On dispose sur $\mathbb{R}$ de la distance usuelle

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$
$$(x, y) \longmapsto d(x, y) =\mid x - y \mid .$$

On l'utilise pour définir la convergence des suites et la continuité des fonctions. Le but ici est de généraliser cette notion.

Définition 1.1.1 *Une distance sur un ensemble E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ telle que*

1. $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$ *(d est séparation).*
2. $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x),$ *(symétrie).*
3. $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$ *(inégalité triangulaire).*

Le couple (d, E) est appellé un espace métrique.

Proposition 1.1.1 (seconde inégalité triangulaire)

$$\forall x, y, z \in E, \mid d(x,y) - d(y,z) \mid \leq d(x,z).$$

Définition 1.1.2 *Soit (E,d) un espace métrique et A une partie de E. On dit que A est bornée si et seulement si*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \textit{tel que} \quad \forall (x,y) \in A^2, \quad \textit{on a} \quad d(x,y) \leq M.$$

Définition 1.1.3 *Dans un espace métrique (E,d), on appelle boule ouverte (resp. boule fermé) de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$, le sous-ensemble*

$$B(a,r) = \{x \in E, d(a,x) < r\} \quad (resp. B_f(a,r) = \{x \in E, d(a,x) \leq r\}).$$

Définition 1.1.4 *Soit A une partie non vide et bornée de E.*

On appelle diamètre de A le nombre $\delta(A)$ tel que

$$\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} d(x,y).$$

Remarque 1.1.1

$$\delta(\emptyset) = 0.$$

Pour $A \neq B, \delta(A \cup B) = \sup\{d(a,b) \quad a \in A, b \in B\}$.

Définition 1.1.5 *Soit (E,d) un espace métrique, A et B deux parties de E et $x \in E$.*

On définie la distance entre x et A par :

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x,y).$$

On définie la distance entre A et B par :

$$d(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x,y).$$

Définition 1.1.6 (Topologie des espaces métriques)

1. *Une partie U de E est un ouvert de E si*

$$\forall x \in U, \exists r > 0, B(x,r) \subset U.$$

2. *Une partie F de E est un fermé de E si et seulement si son complémentaire F^c est un ouvert dans E.*

Définition 1.1.7 ***(Le voisinage).*** *Soit V une partie de E, et soit x un point de E, on dit que V est une voisinage de x si*

$$\exists \varepsilon > 0, \quad B(x,\varepsilon) \subset V.$$

Suites dans les espaces métriques

Définition 1.1.8 ***(Convergence).***

Soit (E,d) un espace métrique et soit $(x_n)_n \in E$ une suite de points de E. Soit $x \in E$. On dit que $(x_n)_n \in E$ converge vers x si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Définition 1.1.9 ***(Suite de Cauchy).***

Une suite $(x_n)_n \in E$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} \quad telque \quad n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.1.2

1. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Remarque 1.1.2 *Il est aisé de voir que toute suite convergente est de Cauchy. L'inverse n'est pas forcément vérifié, Puisqu'il existe des suite de Cauchy qui ne convergent pas.*

Exemple 1.1.1 *Dans $E =]-1,1[$, la suite $(1-\frac{1}{n})_n$ est de Cauchy puisque la méme suite converge vers 1 dans $\mathbb{R}$, mais $1 \notin E$.*

Définition 1.1.10 ***(Espace métrique complet).*** *On dit que l'espace métrique (E,d) est complet si toute suite de Cauchy est convergente dans E.*

La Continuité dans les espaces métriques

Définition 1.1.11 *Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow E'$ est une application, on dit que f est continue en $a \in E$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E, d(x, a) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Remarque 1.1.3 *Une application f est continue sur E si et seulement si elle est continue en tout point a de E.*

Définition 1.1.12 (Applications lipschitziennes)
Une application $f : (E, d_E) \longrightarrow (E', d_{E'})$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante $k \geq 0$ telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, d_{E'}(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y).$$

Remarque 1.1.4 *Si la constante $k < 1$ et si $E = E'$, on dit que f est une contraction.*

1.1.2 Espaces de Banach

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ représente le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.13 (Espace vectoriel) *On définit sur un ensemble non vide E deux opérations, l'addition $(+)$ des éléments E et la multiplication $(\cdot)$ par un scalaire. Si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *$(E, +)$ est un groupe abelian,*
2. *$\forall (x, y) \in E \times E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a :*

$*$ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

$*$ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

$*$ $\alpha(\beta.x) = (\alpha\beta).x$,

$*$ $1.x = x$,

on dit que E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, et noté par $(E, +, \cdot)$.

Définition 1.1.14 (Norme)

Soit E un espace vectoriel. Une norme sur E est une application de E dans $\mathbb{R}_+$ habituellement notée $\|.\|$ vérifiant pour tous x, y dans E et tout α dans $\mathbb{K}$:

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \ \|x\|$ *(homogénéité),*
- $\|x + y\| \ \leqslant \ \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.1.15 ***(Espace vectoriel normé).*** *Un espace vectoriel E muni d'une norme $\|.\|$, noté $(E, \|.\|)$ sera appelé un espace vectoriel normé.*

Remarque 1.1.5 *Tout espace vectoriel normé complet est dit espace de Banach.*

Définition 1.1.16 ***(L'adhérence).*** *Soit A une partie de E et $x \in E$. On dit que x est un point adhérent de A si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

On appelle l'adhérence de A dans E et on note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents de A.

Proposition 1.1.3 *Soit A une partie de E et x élément de E. Alors x est un élément de $\overline{A}$ si et seulement si x est une limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des éléments de A.*

Proposition 1.1.4 *Soit A une partie de E, alors A est fermé dans E si et seulement si $\overline{A} = A$.*

Définition 1.1.17 ***(L'intérieur).*** *Soit A une partie de E. On dit que $x \in E$ est un point interieur de A si*

$$\exists r > 0, B(x, r) \subset A.$$

On appelle intérieur de A et on note par $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs de A.

Remarque 1.1.6 *On appelle également frontière de A l'ensemble $\partial A = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$.*

Définition 1.1.18 ***(La limite).*** *Soient* $(E, \|.\|)$ *et* $(E', \|.\|)$ *deux espaces vectoriels normes, A une partie de E et* $f : A \longrightarrow E'$ *une fonction.*
Soit $a \in \overline{A}$*. On dit que f admet une limite en a s'il existe* $l \in E'$ *tel que,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ telque \ \ \forall x \in B(a, \delta) \cap A \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon.$$

Si f admet une limite en a, cette limite est nécessairement unique.

1.1.3 Compacité et Convexité

Définition 1.1.19 ***(Compacité).*** *Un ensemble A de E est compact si de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite converge vers un élément de A.*

Définition 1.1.20 ***(Autre définition d'ensemble compact).*** *Soit A un ensemble d'un espace norme E, A est dit compact si de tout recouvrement de A par des ouverts de A on peut extaire un sous-recouvrement fini, i.e.,*

$$\forall V_j, j \in J \ (ouverts)\,;\, U \subset \bigcup_{j \in J} V_j, \exists V_{j(k)}, j(k) = 1, 2, ..., n \ tell \ que \ U \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{j(k)}.$$

Proposition 1.1.5

1. *Si A est compact, alors A est fermé et borné.*
2. *Si A est de dimension finie, alors A est compact si et seulement si A est fermé et borné.*

On peut en fait énoncer un résultat bien plus général qui souligne la différence entre la dimension finie et la dimension infinie.

Théorème 1.1.1 *La boule unité fermée de V est compacte si et seulement si V est de dimension finie.*

Définition 1.1.21 *Un ensemble A de E est faiblement compact si de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite converge faiblement vers un élément de A.*

Définition 1.1.22 *On dit qu une partie A de E est relativement compact (faiblement relativement compact) si et seulement si $\overline{A}$ est compact (faiblement compact).*

Soient E et E' deux espaces de Banach, Ω une partie non vide de E.

Définition 1.1.23 (L'application compacte) *Une application $f : \Omega \subseteq E \longrightarrow E'$ est dite compacte si et seulement si elle est continue et l'image de tout ensemble borne X de Ω est un ensemble relativement compact de E', c'est-à-dire, $\overline{f(X)}$ est un compact.*

Définition 1.1.24 (Convexité)

Une sous-ensemble X d'un espace vectoriel normé E est dit Convexe si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in X, \forall \lambda \in [0, 1], \quad (1 - \lambda)x + \lambda y \in X.$$

Autrement dit, un ensemble est convexe s'il contient tout segment passant par deux de ses points.

Exemple 1.1.2 *Soit $\|.\|$ une norme sur l'espace vectoriel E. Pour tout $x \in E$ et $r \geq 0$, la boule centrée en x et de rayon r (ouverte ou fermée) est convexe :*

$$B(0, r) := \{y \in E / \|x\| \leq r\}.$$

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| &\leq \lambda \|x\| + (1 - \lambda)\|y\| \\ &\leq (\lambda + 1 - \lambda)\|x\| \\ &\leq r. \end{aligned}$$

Définition 1.1.25 (L'enveloppe convexe et fermée) *Soit Ω un ensemble d'un espace vectoriel norme E. L'enveloppe convexe et fermé d'un ensemble Ω est le plus petit convexe fermé contenant à Ω i.e.*

$$conv\Omega = \cap \{K \subset E : K \supset \Omega, K \text{ est convexe et ferme}\}.$$

Théorème 1.1.2 ***(Ascoli-Arzela).*** *[17, 9] Soit (E, d) un espace métrique compact, (E', d') un espace métrique complet. Une partie A de $C(E, E')$ est relativement compacte si et seulement si*

1. *l'ensemble A est uniformément borné, i.e. il existe une constante $K > 0$. Tel que*
$$\|f(x)\| \leqslant K \text{ pour tout } x \in E \text{ et tout } f \in A.$$
2. *A est équicontinue,i.e., pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*
$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \varepsilon \quad \forall x_1, x_2 \in E \quad et \quad \forall f \in A.$$
3. *Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x) = \{f(x); f \in A\}$ est relativement compact.*

1.2 Musures de non-compacité

Considérons E est un espace de Banach avec la norme $\|.\|$. On note par M_E la famille de tous les sous-ensembles bornés non vides de E et par N_E sa sous-famille constituée de tous les ensembles relativement compacts.

Définition 1.2.1 *[4, 5] On dit que l'application $\gamma : M_E \to \mathbb{R}_+$ est une mesure de non-compacité dans E si elle satisfait aux conditions suivantes :*

1. *La famille $\ker \gamma = \{X \in M_E : \gamma(X) = 0\}$ est non vide et $\ker \gamma \subset N_E$.*
2. *$X \subset Y \Rightarrow \gamma(X) \leq \gamma(Y)$.*
3. *$\gamma(\overline{X}) = \gamma(X)$.*
4. *$\gamma(convX) = \gamma(X)$.*
5. *$\gamma(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\gamma(X) + (1-\lambda)\gamma(Y)$ pour $\lambda \in [0, 1]$.*
6. *Si $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est une suite imbriquée. d'ensembles fermés de M_E tel que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(X_n) = 0$, alors l'ensemble d'intersection $X_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ est non vide.*

La famille $\ker \gamma$ d'écrit dans 1 est appelée le noyau de la mesure de non-compacité γ.
On remarque l'ensemble d'intersection X_∞ est un membre du noyau $\ker \gamma$. En effet, puisque $\gamma(X_\infty) \leq \gamma(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\gamma(X_\infty) = 0$. Cela donne $X_\infty \in \ker \gamma$.
Plus les propriétés des mesures de non-compacité .
Dans la suite, nous allons utiliser des mesures de non-compacité ayant des propriétés

supplémentaires. A savoir, une mesure est dite sous-linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

1. $\gamma(\lambda X) = |\lambda|\gamma(X), \quad \lambda \in \mathbb{R}$.
2. $\gamma(X+Y) \leq \gamma(X) + \gamma(Y)$.

Une mesure de non-compacité sous-linéaire γ satisfaisant la condition

$$\gamma(X \cup Y) = \max\{\gamma(X), \gamma(Y)\},$$

et tel que $\ker \gamma = N_E$ est dit régulier.

Proposition 1.2.1 *[17] invariance sous traslation :*

$$\gamma\left(B + x_0\right) = \gamma(B).$$

Définition 1.2.2 (Distance de Hausdorff) *La distance de Hausdorff entre deux ensembles non-vide fermés et bornés Ω_1 et Ω_2 est définie par :*

$$H(\Omega_1, \Omega_2) = \max\left\{\sup_{x\in\Omega_1} d(x, \Omega_2), \sup_{x\in\Omega_2} d(x, \Omega_1)\right\}.$$

Notons que $H(\Omega_1, \Omega_2) > 0$ et $H(\Omega_1, \Omega_2) = 0 \Leftrightarrow \Omega_1 = \Omega_2$.

Soit E un espace métrique et Ω un sous ensemble non vide, borné de E.

1.2.1 Mesure de Kuratowski

Définition 1.2.3 *[4] La mesure de non-compacité de Kuratowski, de l'ensemble Ω, notée $\alpha(\Omega)$ est l'inf des nombres $d > 0$, tel que Ω admet un recouvrement fini par des ensembles de diamètre inférieur à d, i.e.,*

$$\alpha(\Omega) = \inf\left\{d > 0, \Omega = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i \quad \textit{tel que} \quad \delta(\Omega_i) \leq d\right\}.$$

1.2.2 Mesure de Hausdorff

Avant de donner la définition de la mesure de non-compacité de Hausdorff, rappelons d'abord la notion de ε-réseau dans le cas où $(E, \|.\|)$ est un espace normé. Ici, on note par $B_E = B(0,1)$.

Définition 1.2.4 *[3] Soit E un espace normé. Un ensemble $S \subset E$ est appelé un ε-réseau de Ω si*

$$\Omega \subset S + \varepsilon\overline{B}_E = \left\{s + \varepsilon b, s \in S, b \in \overline{B}_E\right\}.$$

Définition 1.2.5 *La mesure de non-compacité de Hausdorff de l'ensemble Ω, notée $\chi(\Omega)$ est l'inf des nombres ε tels que Ω a un ε-réseau fini dans E.*

Remarque 1.2.1 *Dans le cas où Ω est un sous-ensemble non vide et non borné, alors*

$$\alpha(\Omega) = \chi(\Omega) = \infty.$$

Les deux mesures de non-compacité de Kuratowski et de Hausdorff sont liées entre elles par les inégalités suivantes :

Théorème 1.2.1 *Soient α et χ les mesures de non-compacité de Kuratowski et de Hausdorff et Ω un sous ensemble d'un espace de Banach E. Alors*

$$\chi(\Omega) \leq \alpha(\Omega) \leq 2\chi(\Omega).$$

La mesure de non compacité de Kuratowski ou de Hausdorff sont invariantes par le passage à la fermeture et l'enveloppe convexe, ce qu'affirme le théorème suivant :

Théorème 1.2.2 *Soient Ψ une mesure de non-compacité* (Kuratowski ou de Hausdorff) *et Ω un sous ensemble d'un espace de Banach E. Alors*

$$\Psi(\Omega) = \Psi(\overline{\Omega}) = \Psi(conv\Omega).$$

où $\overline{\Omega}$ est la fermeture de Ω.

Définition 1.2.6 (γ-contraction d'ensemble)
Soient E et E' deux espaces des Banach.
Soit $f : E \longrightarrow E'$ une application continue et bornée (i.e., f transforme les bornés de E en des bornés de E').

1. *On dit que f est une γ-contraction d'ensembles s'il existe $k \geq 0$, tel que*
$$\gamma(f(\Omega)) < k\gamma(\Omega), \qquad \forall\ \Omega \in M_E.$$
2. *f est appelée γ-contraction stricte d'ensembles (ou contraction stricte d'ensembles) si*
$$0 \leq k < 1.$$
3. *f est dite condensante si*
$$\gamma(f(\Omega)) < \gamma(\Omega),$$
pout tout Ω borné et non relativement compact ($\gamma(\Omega) > 0$).

Lemme 1.2.1 *[9] Soit C un sous-ensemble borné, fermé et convexe dans d'espace du Banach $C(J, E)$, pour tout V de C borné et équicontinu, on a $\gamma(V(x))$ est continu et que*
$$\gamma\left(\int_J x(s)ds : x \in V\right) \leq \int_J \gamma(V(x))dx,$$
où $V(s) = \{x(s) : x \in V, s \in J\}$ et $J = [a, b]$.

Lemme 1.2.2 *[17] Si $V \subset C(J, E)$ est un ensemble borné et équicontinu, alors*

i. la fonction $v : t \longmapsto \gamma(V(t))$ est continue sur J, et $\gamma_c = \sup\limits_{1 \leqslant t \leqslant T}(\gamma(V(t))$.

ii.
$$\gamma\left(\int_1^T x(s)ds : x \in V\right) \leq \int_1^T \gamma(V(s))ds, \text{ où } V(s) = \{x(s) : x \in V\}, s \in J.$$

1.3 Théorèmes de point fixe

Dans cette section on presente la théorème de Darbo et quelqune de ses généralisations qui étude l'existence du point fixe des applications continues sur un sous-ensembles non vides, bornés, fermés et convexes des espaces de Banach.

Maintenant nous rappelons le théorème de point fixe suivant qui est une version du point fixe classique théorème pour les applications lipschitziennes dans le contexte des mesures de non-compacité.

1.3.1 Théorème de Darbo

Théorème 1.3.1 *[6, 9] Soit Ω un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'espace Banach E et $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ est une fonction continue et γ est un mesure de non-compacité définie dans E. Supposons qu' il existe une constante $k \in [0, 1[$ telle que*

$$\gamma(TX) \leqslant k\gamma(X).$$

pour tout X sous-ensemble fermé dans Ω. Alors T admet un point fixe dans Ω.

Définition 1.3.1 *[2] Soit (E, d) un espace métrique, et $f : E \to E$ une application, on dit qu'un point $x \in E$ est un point fixe de f si et seulement si $f(x) = x$.*

1.3.2 Théorème de Mönch

Théorème 1.3.2 *[14, 9] Soit Ω un sous-ensemble fermé, borné et convexe de espace de Banach, tel que $0 \in \Omega$, et soit T une application continue de Ω dans Ω.Si l'implication :*

$$V = \overline{conv}T(V) \ ou \ V = T(V) \cup \{0\} \Rightarrow \gamma(V) = 0.$$

est vérifiée pour tout sous-ensemble V de Ω, alors T admet un point fixe dans Ω.

1.4 Calcul Fractionnaire

1.4.1 Intégrale fractionnaire

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler(α) :
La fonction Gamma(α) est définie par l'intégrale suivante :

Définition 1.4.1 ***(fonction Gamma).*** *On appelle fonction Gamma eulérienne (ou intégrale eulérienne de seconde espèce) la fonction notée* Γ *définie par :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

où α *est un nombre complexe quelconque tel que* $Re(\alpha) > 0$.

Proposition 1.4.1 *Nous avons la relation suivante :*

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

En particulier, nous avons

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.4.2 ***(fonction Bêta).*** *La fonction* $B(p, q)$ *est la fonction Bêta (ou intégrale eulerienne de première espèce), défini par :*

$$B(p, q) = \int_0^1 (1 - t)^{p-1} t^{q-1} dt \quad p > 0, q > 0.$$

Proposition 1.4.2 *La fonction Bêta est reliée aux fonctions Gamma par la relation suivante pour tout* $p, q > 0$, *on a*

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}.$$

Définition 1.4.3 *[10]la transformée de Laplace de la fonction* f *pour variable reél* $t \in \mathbb{R}$ *définie par :*

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^{+\infty} \exp(-st) f(t) dt, \qquad s \in \mathbb{C}.$$

Définition 1.4.4 *[10] On peut reconstituer* f *à partir de sa transformée* F *à l'aide de la transformée de Laplace inverse.*

$$f(t) = L^{-1}\{F(s); t\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(st) F(s) ds \quad c = \mathrm{Re}(s) > c_0.$$

Définition 1.4.5 *L'orsque le produit* $f(x - t)g(t)$ *est intégrable sur tout intérvalle* $[0, x]$ *de* $\mathbb{R}_+$, *le produit de convolution de* f *et* g *est défnie par :*

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x - t)g(t) dt = \int_0^x g(t) f(x - t) dt.$$

Proposition 1.4.3

- *La transformée de Laplace d'une dérivée d'ordre entier est*

$$\begin{aligned} L\left\{f^{(n)}(t);s\right\} &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \end{aligned}$$

- *La transformée de Laplace est linéaire on suppose que* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$L\{\lambda f(t) + g(t); s\} = \lambda L\{f(t); s\} + L\{g(t); s\} = \lambda F(s) + G(s).$$

- *Si les transformées de Laplace de* f *et* g *existent, alors la transformée de Laplace du produit de convolution vérifie :*

$$L\{f(t) * g(t); s\} = L\{f(t); s\}L\{g(t); s\} = F(s)G(s).$$

- *Linéarité de la transformée inverse de Laplace.*

$$L^{-1}\{\lambda f(s) + g(s); t\} = \lambda L^{-1}\{f(s); t\} + L^{-1}\{g(s); t\} = \lambda f(t) + g(t).$$

Définition 1.4.6 (Intégral Fractionnaire) *[10, 13] L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction* $f \in C([a, b])$ *d'ordre* $\alpha \in \mathbb{R}_+$, *est définie par*

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} f(t) dt.$$

Proposition 1.4.4 *Nous avons les propriétés suivantes :*

i) $I^0 f(t) = f(t)$.

ii) $I^\alpha I^\beta f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t)$.

iii) l'opérateur intégral I^α *est linéaire.*

$$I^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda I^\alpha f(t) + I^\alpha g(t), \alpha \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{C}.$$

iiii) $\frac{d}{dt}(I^\alpha f)(t) = I^{\alpha-1} f(t)$.

1.4.2 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire, dans cette partie on va citer celles qui sont les plus utilisées dans les applications.

Dérivées fractionnaires au sens Riemann-Liouville

Définition 1.4.7 *[10, 13, 11] Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre α (avec $n-1 \leq \alpha < n$) au sens de* ***Riemann-Liouville*** *est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-\alpha} f(t)) = D^n I^{n-\alpha} f(t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

ici, $n = [\alpha]+1$ et $[\alpha]$ désignant la partie entière de α.

Définition 1.4.8 *On note l'operateur D^n, $n \in \mathbb{N}$ différentiation de l'opérateur d'ordre entier .i.e.,*

$$D^n = \frac{d^n}{dt^n}.$$

Proposition 1.4.5 *Nous donnons les propriétés suivantes*

1. *Composition avec l'intégrale fractionnaire*

i) *L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche pour intégral fractionnaire. Si f est continue alors*

$${}^{RL}D^{\alpha} \left(I^{\alpha} f(t)\right) = f(t),$$

mais.Si f est continue telle que $f^{(n-j)}(0)$ existent pour $j = 1, ..., n$ alors

$$I^{\alpha\, RL}D^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} f^{(n-j)}(0).$$

ii) *En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas*

$${}^{RL}D^{-\alpha_1} \left({}_a^{RL}D_t^{\alpha_2} f(t)\right) = {}^{RL}D^{\alpha_2-\alpha_1} f(t) - \sum_{k=1}^{n} \left[{}^{RL}D_t^{\alpha_2-k} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha_1-k}}{\Gamma(\alpha_1-k+1)},$$

avec $n-1 \leq \alpha_2 < n$.

2. *Composition avec les dérivées d'ordre entier. La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne commutent que, si* $f^{(k)}(a) = 0$ *pour tout* $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$$\frac{d^n}{dt^n}\left({}^{RL}D^{\alpha} f(t)\right) ={}^{RL} D^{n+\alpha} f(t),$$

mais

$${}^{RL}D^{\alpha}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) ={}^{RL} D^{n+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}.$$

3. *Pour l'opérateur différentiel fractionnaire Riemann-Liouville, la propriété d'interpolation correspondante lit*

$$\lim_{\substack{\alpha \to n \\ \alpha < n}} {}^{RL}D^{\alpha} f(t) = f^{(n)}(t).$$

$$\lim_{\substack{\alpha \to n-1 \\ \alpha > n-1}} {}^{RL}D^{\alpha} f(t) = f^{(n)}(t).$$

4. *c'est un opérateur linéaire* $\alpha \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{C}$

$${}^{RL}D^{\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda^{RL} D^{\alpha} f(t) +^{RL} D^{\alpha} g(t).$$

Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.4.9 *[10, 20, 13] Pour une fonction donnée* f *sur l'intervalle* $[a, b]$ *la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de **Caputo** de* f *, d'ordre* $\alpha > 0$ *est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \\ &= I^{(n-\alpha)} D^{(n)} f(t), \end{aligned} \tag{1.2}$$

ici $n = [\alpha] + 1$ *et* $[\alpha]$ *désignant la partie entière de* α.

Proposition 1.4.6 *Nous donnons les propriétés suivantes :*

1. *Si* f *est une fonction continue on a*

$${}^{c}D^{\alpha} I^{\alpha} f = f.$$

2. *On suppose que* $n-1<\alpha<n, m, n\in\mathbb{N}, \alpha\in\mathbb{R}$ *et soit la fonction* $f(t)$ *telle que* ${}^{c}D^{\alpha}f(t)$ *existe, alors*

$$ {}^{c}D^{\alpha}D^{m}f(t) = {}^{c}D^{\alpha+m}f(t) \neq D^{m c}D^{\alpha}f(t). $$

3. *Soit* $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ *et soit* $f(t)$ *telle que* ${}^{c}D^{\alpha}f(t)$ *existe alors, on a les propriétés suivantes pour l'opérateur de Caputo.*

$$ \lim_{\alpha\to n} {}^{c}D^{\alpha}f(t) = f^{(n)}(t). $$

$$ \lim_{\alpha\to n-1} {}^{c}D^{\alpha}f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0). $$

4. *La dérivation fractinnaire de Caputo est un opérateur. Soit* $n-1<\alpha<n, n\in\mathbb{N}, \alpha, \lambda\in\mathbb{C}$ *lineaire*

$$ {}^{c}D^{\alpha}(\lambda f(t)+g(t)) = \lambda^{c}D^{\alpha}f(t) +^{c} D^{\alpha}g(t). $$

Lemme 1.4.1 *[17] Si* $x\in AC^{n}([0,1])$*,alors La Dérivée de Caputo* ${}^{c}D^{\alpha}f(t)$ *existe presque par tout sur [0,1], où* $AC^{n}([0,1]) = \{x\in AC^{n-1}([0,1]), x^{n-1}\text{est absolument continu}\}$*, et* n *est le plus petit entier supérieur ou égal à* α

Lemme 1.4.2 *[13] Soit* $\alpha>0$*, alors l'équation différentielles,*

$$ {}^{c}D^{\alpha}f(t) = 0. $$

admet les solutions

$$ f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1}t^{n-1}. $$

telque : $c_i\in\mathbb{R}, i=0,1,2,...,n-1, n=[\alpha]+1.$

Preuve. supposons que ${}^{c}D^{\alpha}f(t)=0$,

d'après la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo on obtient

$$ I^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} f(t) = 0, $$

c'est à dire :

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds=0,$$

puisque $\Gamma(n-\alpha-1)\neq 0$, on a

$$\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds=0,$$

et par suite

$$t^{n-\alpha-1}*f^{(n)}(s)=0.$$

On applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'égalité

$$L\left(t^{n-\alpha-1}*f^{(n)}(t)\right)(s)=L(0)(s)=0$$

posant $F(s)=L(f)(s)$ on obtient

$$\frac{\Gamma(n-\alpha)}{s^{n-\alpha}}\left(s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n}s^{n-k}f^{(k-1)}(0)\right)=0,$$

alors

$$s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n}s^{n-k}f^{(k-1)}(0)=0.$$

donc

$$F(s)=\sum_{k=0}^{n}s^{-k}f^{(k-1)}(0)$$

on applique maintenant la transformée inverse de Laplace

$$L^{-1}(F(s))=L^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n}s^{-k}f^{(k-1)}(0)\right)(t)$$

il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}f(t) &= \sum_{k=0}^{n}f^{(k-1)}(0)L^{-1}\left(s^{-k}\right)(t),\\ &= \sum_{k=0}^{n}f^{(k-1)}(0).\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}.\end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $i=k-1$ on trouve

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}t^i,$$

pour $c_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$,

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i,$$

Supposons maintenant que :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i,$$

on applique l'opérateur de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo aux deux membres de l'égalité :

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha f(t) &= {}^cD^\alpha \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i^c D^\alpha t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i I^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dt} \right)^n t^i. \end{aligned}$$

puisque $(0 \leqslant i \leqslant n-1 < n)$ on a

$${}^cD^\alpha f(t) = 0.$$

Ce qui achève la démonstration. ∎

Lemme 1.4.3 *[11] Soit $\alpha > 0$, alors*

$$I^{\alpha c} D^\alpha f(t) = f(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1}.$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n = [\alpha] + 1.$

Preuve. On a d'aprés (1.2)

$${}^cD^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} f^{(n)}(t)$$

Appliquant aux deux membre de l'égalité

$$I^{\alpha c} D^\alpha f(t) = I^\alpha I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = I^n \frac{d^n}{dt^n} f(t). \tag{1.3}$$

on a par (1.1)

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^\alpha f(t) &= \left(\frac{d^n}{dt^n} \right) \left(I^{n-\alpha} f(t) \right), \\ {}^{RL}D^n f(t) &= \left(\frac{d^n}{dt^n} \right) \left(I^{n-n} f(t) \right), \\ &= \frac{d^n}{dt^n} f(t). \end{aligned}$$

donc (1.3) devient :

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}f(t) = I^{nRL}D^{n}f(t),$$

on a

$$I^{nRL}D^{n}f(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} f^{(n-j)}(0) = I^{\alpha c}D^{\alpha}f(t).$$

on pose $k = n - j$,

$$\begin{aligned} I^{\alpha c}D^{\alpha}f(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k}}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^{k} \\ &= f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k, \end{aligned}$$

avec $c_k = -\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. ■

Théorème 1.4.1 *[10, 11] Soient, $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$, alors la relation entre l'opérateur de Riemann-Liouville et de Caputo est :*

$${}^{c}D^{\alpha}f(t) = {}^{RL}D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0).$$

Exemple 1.4.1 *La différentiation de la fonction constante pour l'opérateur de Caputo est*

$${}^{c}D^{\alpha}k = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{n-\alpha-1} k^{(n)} dx = 0.$$

Alors ${}^{c}D^{\alpha}k = 0, \quad k = const.$

Et pour Riemann-Liouville

$${}^{RL}D^{\alpha}k = \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \neq 0, \quad k = const.$$

Chapitre 2

Problème aux limites pour des équations fractionnaires

Dans ce chapitre, on s'intéresse au résultat d'existence des solutions pour un problème aux limites.

2.1 Position du problème

On considére le problème suivant.

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) = f(t, x(t)) \quad ,0 \leq t \leq 1, \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ \quad x(0) + x'(0) = 0 \\ \quad x(1) + x'(1) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et ${}^cD^\alpha$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de Caputo.

Posant $f(t, x(t)) = h(t)$ pour donner la formule générale de la solution, c'est à dire on va tansformer notre problème au prolème d'existence d'un point fixe pour un certain opérateurs. En effet, considérons le problème

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) = h(t) \quad ,0 \leq t \leq 1, \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ x(0) + x'(0) = 0 \\ x(1) + x'(1) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

Lemme 2.1.1 *Une fonction $x \in C([0,1], \mathbb{R})$ est une solution de (2.2) si et seulement si*

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)ds \tag{2.3}$$

où G est la fonction Green donnée par

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(1-s)^{\alpha-1}(1-t)+(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-s)^{\alpha-2}(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)}, & s \leqslant t \\ \frac{(1-s)^{\alpha-1}(1-t)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-s)^{\alpha-2}(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)}, & t \leqslant s. \end{cases} \tag{2.4}$$

Preuve.

(I). D'après le lemme (1.4.3), nous pouvons réduire l'équation du problème (2.2) à une équation intégrale équivalente

$$x(t) = I^\alpha h(t) + c_0 + c_1 t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds + c_0 + c_1 t,$$

pour certaines constantes $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

D'autre part, par les relations $D^\alpha I^\alpha x(t) = x(t)$ et $I^\alpha I^\beta x(t) = I^{\alpha+\beta} x(t)$, pour $\alpha, \beta > 0$, $x \in L(0,1)$, nous avons :

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{d}{dt} I^\alpha h(t) + c_1 \\ &= D^1 I^{\alpha-1+1} h(t) + c_1 \\ &= D^1 I^1 I^{\alpha-1} h(t) + c_1 \\ &= I^{\alpha-1} h(t) + c_1. \end{aligned}$$

En tant que conditions aux limites du problème (2.2). Nous avons :

$$x(0) = c_0 \qquad x'(0) = c_1$$

et

$$x(1) = I^{\alpha}h(1) + c_0 + c_1 \qquad x'(1) = I^{\alpha-1}h(1) + c_1.$$

C'est :

$$c_0 + c_1 = 0,$$

$$c_0 + 2c_1 = -I^{\alpha}h(1) - I^{\alpha-1}h(1),$$

$$c_0 = I^{\alpha}h(1) + I^{\alpha-1}h(1),$$

et

$$c_1 = -I^{\alpha}h(1) - I^{\alpha-1}h(1).$$

Par conséquent, solution unique pour (2.2) est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}h(s)ds - \frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\ &- \frac{t}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}h(s)ds \\ &= \int_0^t \left(\frac{(1-s)^{\alpha-1}(1-t) + (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-s)^{\alpha-2}(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)}\right) h(s)ds \\ &+ \int_t^1 \left(\frac{(1-s)^{\alpha-1}(1-t)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-s)^{\alpha-2}(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)}\right) h(s)ds \\ &= \int_0^1 G(t,s)h(s)ds. \end{aligned}$$

(II). Soit x une fonction intégrale (2.3). Si nous désignons déferminée par la partie gauche de l'équation intégrale (2.3) par $y(t)$, puis en appliquant l'opérateur fractionnaire de Caputo de part et d'autre de l'équation intégrale (2.3), par la définition de la fonction $G(t,s)$, puisque

$$\begin{aligned} y(t) = &\int_0^1 G(t,s)h(s)ds \\ =&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\ +&\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}h(s)ds - \frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\ -&\frac{t}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}h(s)ds. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \frac{d}{dt} I^{\alpha} h(t) - I^{\alpha} h(1) - I^{\alpha-1} h(1) \\
&= D^1 I^{\alpha} h(t) - I^{\alpha} h(1) - I^{\alpha-1} h(1) \\
&= D^1 I^1 I^{\alpha-1} h(t) - I^{\alpha} h(1) - I^{\alpha-1} h(1) \\
&= I^{\alpha-1} h(t) - I^{\alpha} h(1) - I^{\alpha-1} h(1).
\end{aligned}$$

et

$$y''(t) = D^1 I^{\alpha-1} h(t) = D^1 I^{1-(2-\alpha)} h(t) = {}^{RL}D^{2-\alpha} h(t)$$
$${}^{c}D^{\alpha} y(t) = I^{2-\alpha} y''(t) = I^{2-\alpha\,RL} D^{2-\alpha} h(t) = h(t),$$

ici, utilisons la relation

$$I^s I^t g(t) = I^{s+t} g(t), D^s I^s g(t) = g(t), s > 0, t > 0, \quad g \in L(0,1)$$

et la relation

$$I^s D^s g(t) = g(t), s > 0, \quad g \in C([0,1]),$$

où ${}^{RL}D^s$ est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville. C'est, ${}^{c}D^{\alpha} x(t) = h(t)$.

Par ailleurs, on a

$$x(0) = \int_0^1 \left(\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \right) h(s) ds.$$

$$x'(0) = -\int_0^1 \left(\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \right) h(s) ds.$$

$$x(1) = \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) ds.$$

$$x'(1) = -\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) ds.$$

Donc

$$x(0) + x'(0) = 0, \qquad x(1) + x'(1) = 0,$$

ce qui implique que $x \in C([0,1])$ est une solution du problème (2.2)

qui complète la preuve. ■

2.2 Existence des Solutions

Nous considérons les hypothèses suivantes.

(A1) : Il existe des nombres réels positifs K et f_0 tels que

$$\|f(t, x(t)) - f(t, y(t))\|_\infty \leqslant K\|x - y\|_\infty.$$

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|f(t, 0)\| = f_0$$

(A2) : Pour tout sous-ensemble borné A de E, nous avons

$$\gamma(f(t, A)) \leqslant K\gamma(A),$$

où γ est une mesure de non compacité.

(A3) : Il existe $r_0 > 0$ tel que

$$M(Kr_0 + f_0) < r_0,$$

où $M = \sup\{\|G(t, s)\|, (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Théorème 2.2.1 *Sous les hypothèses* $(A1) - (A3)$*, le problème des valeurs limites* (2.1) *a une solution dons* E.

Preuve.

Soit l'opérateur

$$Tx(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds$$

et l'ensemble $D_{r_0} = \{x \in C([0, 1], E) : \|x\|_\infty \leqslant r_0\}$. D_{r_0} est un sous-ensemble fermé, borné et convexe. Nous allons montrer que T satisfait les hypothèses du théorème de Mönch. La preuve sera donnée en trois étapes.

Étape 1 : On va montrer que T est continue.

Soit $(x_n)_n$ une suite telle que $x_n \longrightarrow x$ dans $C([0, 1], E)$, alors pour chaque $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned}
\|T(x_n)(t) - T(x)(t)\| &= \left\| \int_0^1 G(t,s)\left[f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\right] ds \right\| \\
&\leqslant \int_0^1 \|G(t,s)\| \|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\| ds \\
&\leqslant M \int_0^1 \|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\| \, ds \\
&\leqslant MK \int_0^1 \|x_n(s) - x(s)\| \, ds \\
&\leqslant MK \int_0^1 \|x_n - x\|_\infty \, ds \\
&\leqslant MK \|x_n - x\|_\infty \\
\|T(x_n) - T(x)\|_\infty &\leqslant MK \|x_n - x\|_\infty .
\end{aligned}$$

Puisque $x_n \longrightarrow x$, pour chaque $t \in [0,1]$.

$$\|T(x_n) - T(x)\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

Étape 2 : Dans cette étape on va prouver que D_{r_0} est invariante par T, c'est-à- dire $T(D_{r_0}) \subset D_{r_0}$.

$$\begin{aligned}
\|T(x)(t)\|_\infty &= \left\| \int_0^1 G(t,s) f(s,x(s)) ds + \int_0^1 G(t,s) f(s,0) ds - \int_0^1 G(t,s) f(s,0) ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 G(t,s)(f(s,x(s)) - f(s,0)) ds + \int_0^1 G(t,s) f(s,0) ds \right\| \\
&\leqslant \int_0^1 \|G(t,s)\| \left(\|f(s,x(s)) - f(s,0)\| + \|f(t,0)\| \right) ds \\
&\leqslant \|G(t,s)\| \left(K\|x - 0\| + \|f(s,0)\| \right) \\
&\leqslant M(Kr_0 + f_0) \\
&< r_0.
\end{aligned}$$

Alors, $T(x) \in D_{r_0}$, pour tout $x \in D_{r_0}$. Par conséquent $T(D_{r_0}) \subset D_{r_0}$.

Étape 3 : $T(D_{r_0})$ est une partie bornée et équicontinue de D_{r_0}.

D'après l'**Étape 2** nous avons

$$T(D_{r_0}) = \{T(x) : x \in D_{r_0}\} \subset D_{r_0}.$$

Ainsi, pour chaque $x \in D_{r_0}$ nous avons $\|T(x)\|_\infty < r_0$, ce qui signifie que $T(D_{r_0})$ est bornée.

Pour l'équicontinuité de $T(D_{r_0})$. Soit $t_1, t_2 \in [0,1], t_1 < t_2$ et $x \in D_{r_0}$. Alors

$$
\begin{aligned}
\|Tx(t_2) - Tx(t_1)\| &= \left\| \int_0^1 G(t_2,s)f(s,x(s))ds - \int_0^1 G(t_1,s)f(s,x(s))ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 [G(t_2,s) - G(t_1,s)]f(s,x(s))ds \right. \\
&+ \int_0^1 (G(t_2,s) - G(t_1,s))f(s,0)ds \\
&- \left. \int_0^1 (G(t_2,s) - G(t_1,s))f(s,0)ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 [G(t_2,s) - G(t_1,s)](f(s,x(s)) - f(s,0))ds \right. \\
&+ \left. \int_0^1 (G(t_2,s) - G(t_1,s))f(s,0)ds \right\| \\
&\leqslant \int_0^1 \|[G(t_2,s) - G(t_1,s)](f(s,x(s)) - f(s,0))\|ds \\
&+ \int_0^1 \|(G(t_2,s) - G(t_1,s))f(s,0)\|ds \\
&\leqslant \|G(t_2,s) - G(t_1,s)\|\|f(s,x(s)) - f(s,0)\| \\
&+ \|G(t_2,s) - G(t_1,s)\|\|f(s,0)\| \\
&\leqslant \|G(t_2,s) - G(t_1,s)\|(Kr_0 + f_0).
\end{aligned}
$$

Comme $t_2 \longrightarrow t_1$, 1e second membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. donc $T(D_{r_0})$ est équicontinu.

Maintenant, soit A un sous-ensemble de D_{r_0} tel que :

$$A \subset \overline{\text{conv}}(T(A) \cup \{0\}).$$

A est borné et équicontinu. En plus, la fonction $t \to a(t) = \gamma(A(t))$ est continue sur $[0,1]$.

En utilisant $(A2)$, et les propriétés de la mesure γ on a pour tout $t \in [0,1]$,

$$a(t) = \gamma(A(t)) < \gamma(T(A)(t) \cup \{0\}) \leq \gamma(T(A)(t)),$$

car

$$\gamma(T(A) \cup \{0\}) = \max\{\gamma(T(A)), \gamma(\{0\})\}.$$

D'autre part on a

$$T(A)(t) = \left\{ \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s)) ds, x \in A \right\}.$$

Donc

$$a(t) < \gamma(T(A)(t)) = \gamma \left(\{ \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s)) ds, x \in A \} \right)$$

$$\begin{aligned} \gamma(T(A)(t))) &\leq \int_0^1 \|G(t,s)\| K \gamma(A(s)) ds \\ &\leq M \int_0^1 K.\ a(s) ds. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\|a\|_\infty \leq MK \|a\|_\infty.$$

Alors, $\|a\|_\infty = 0$, c'est à dire $a(t) = 0, \forall t \in [0,1]$, i.e $\gamma(A(t)) = 0$.

Donc, $A(t)$ est relativement compact dans E. Par le théorème d'Ascoli-Arzela, A est relativement compact dans D_{r_0} (car $A \subset D_{r_0}$ est borné et équicontinu). Puisque toutes les hypothèses du Théorème de Mönch sont satisfaites, l'application T admet par conséquent un point fixe qui est solution pour notre problème.

■

Remarque 2.2.1 *On peut arriver au même résultat du Théorème (2.2.1) sans l'hypothèse* $(A2)$.

En effet, dans la dernière étape de la preuve du Théorème (2.2.1), on a

$$T(A)(t) = \left\{ \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s)) ds, \ x \in A \right\}$$

donc :

$$\gamma(T(A)(t)) = \gamma \left(\{ \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s)) ds, x \in A \} \right)$$

$$\begin{aligned}\gamma(T(A)(t))) &\leq \int_0^1 \|G(t,s)\| K\gamma(A(s))ds \\ &\leq MK\gamma(A(s))\end{aligned}$$

On a :

$$\gamma(T(A)) \leq MK\gamma(A(s)).$$

On a $MK < 1$ *alors l'opérateur* T *est contraction. En conséquence de Théorème de Darbo, on en déduit que* T *a admet un point fixe solution du problème (2.1).*

2.3 Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats.

Considérons le problème des limites

$$^{c}D^{\frac{3}{2}}x(t) = \frac{\sin x}{(t+7)^2(3+\sin x)}$$

$$x(0) + x'(0) = 0$$

avec

$$x(1) + x'(1) = 0.$$

Nous posons

$$f(t,x) = \frac{\sin x}{(t+7)^2(3+\sin x)}.$$

$$\|f(t,x(t)) - f(t,y(t))\| = \left\|\frac{\sin x}{(t+7)^2(3+\sin x)} - \frac{\sin y}{(t+7)^2(3+\sin y)}\right\|$$

$$= \left\|\frac{\sin x(t+7)^2(3+\sin y) - \sin y(t+7)^2(3+\sin x)}{(t+7)^4(3+\sin x)(3+\sin y)}\right\|$$

$$= \left\|\frac{\sin x(3+\sin y) - \sin y(3+\sin x)}{(t+7)^2(3+\sin x)(3+\sin y)}\right\|$$

$$= \left\|\frac{3(\sin x - \sin y) + \sin x \sin y - \sin y \sin x}{(t+7)^2(3+\sin x)(3+\sin y)}\right\|$$

$$= \left\|\frac{3(\sin x - \sin y)}{(t+7)^2(3+\sin x)(3+\sin y)}\right\|$$

$$\leq \frac{3}{(7)^2(2)^2}\|\sin x - \sin y\|$$
$$\leq \frac{3}{196}\|x - y\|.$$

la fonction G est donnée par

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{(1-s)^{\frac{1}{2}}(1-t)+(t-s)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}+\dfrac{(1-s)^{-\frac{1}{2}}(1-t)}{\Gamma(\frac{1}{2})}, & s\leqslant t\\ \dfrac{(1-s)^{\frac{1}{2}}(1-t)}{\Gamma(\frac{3}{2})}+\dfrac{(1-s)^{-\frac{1}{2}}(1-t)}{\Gamma(\frac{1}{2})}, & t\leqslant s.\end{cases}$$

On a :

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|f(t,0)|=f_0=0,$$

et on a $K=\dfrac{3}{196}$,

$$M(Kr_0+f_0)<r_0.$$

On choisit $r_0=1$ est satisfait pour chaque $\alpha\in]1,2]$. Alors d'après le Théorème (2.2.1), le problème admet une solution sur $[0,1]$.

Chapitre 3

Problème aux limites avec des conditions intégrales

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions du problème aux limites avec des conditions intégrales.

3.1 position du problème

Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, on considré le problème suivant.

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) + f\left(t, x(t), {}^cD^\alpha x(t)\right) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, 1 < \alpha \leq 2 \\ ax(0) - bx'(0) = 0 \\ x(1) = \int_0^1 h(s)g(s, x(s))ds + \lambda, \end{cases} \tag{3.1}$$

où ${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo, $f : [0,1] \times C([0,1], E) \times E \longrightarrow E, g \in C([0,1], E), h \in C([0,1], E), a, b, \lambda \in \mathbb{R}_+, a + b > 0$ et $\frac{a}{a+b} < \alpha - 1$.

Définition 3.1.1 *Une fonction $x \in C([0,1], E)$ est dite solution de (3.1) si x satisfait l'équation (3.1). Pour prouver l'existence de solutions à (3.1), nous avons besoin des auxiliaires lemme suivants .*

Lemme 3.1.1 *Soient* $x, y \in C([0,1], E)$*. le problème*

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) = -k(t), & 0 \leq t \leq 1, 1 < \alpha \leq 2 \\ ax(0) - bx'(0) = 0 \\ x(1) = \int_0^1 h(s)y(s)ds + \lambda, \end{cases} \tag{3.2}$$

a une solution donnée par

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)k(s)ds + \frac{at+b}{a+b}\int_0^1 h(s)y(s)ds + \frac{at+b}{a+b}\lambda,$$

où G *est une fonction de Green donnée par*

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(at+b)(1-s)^{\alpha-1}}{(a+b)\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & s \leq t \\ \frac{(at+b)(1-s)^{\alpha-1}}{(a+b)\Gamma(\alpha)}, & t \leq s. \end{cases} \tag{3.3}$$

Preuve.

$$x(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}k(s)ds + c_0 + c_1 t.$$

$$x'(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}k(s)ds + c_1.$$

Par la condition aux limites dans (3.2) nous obtenons

$$ac_0 - bc_1 = 0,$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}k(s)ds + c_0 + c_1 = \int_0^1 h(s)y(s)ds + \lambda.$$

Par conséquent

$$c_0 = \frac{b}{a+b}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}k(s)ds + \int_0^1 h(s)y(s)ds + \lambda\right].$$

$$c_1 = \frac{a}{a+b}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}k(s)ds + \int_0^1 h(s)y(s)ds + \lambda\right].$$

Cela signifie que

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}k(s)ds + \frac{b}{a+b}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}k(s)ds + \int_0^1 h(s)y(s)ds + \lambda\right] \\ &+ \frac{at}{a+b}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}k(s)ds + \int_0^1 h(s)y(s)ds + \lambda\right] \\ &= \int_0^t \left[\frac{(at+b)(1-s)^{\alpha-1}}{(a+b)\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]k(s)ds + \int_t^1 \frac{(at+b)(1-s)^{\alpha-1}}{(a+b)\Gamma(\alpha)}k(s)ds \\ &+ \frac{at+b}{a+b}\int_0^1 h(s)y(s)ds + \frac{at+b}{a+b}\lambda \\ &= \int_0^1 G(t,s)k(s)ds + \frac{at+b}{a+b}\int_0^1 h(s)y(s)ds + \frac{at+b}{a+b}\lambda. \end{aligned}$$

La preuve est complète. ■

Lemme 3.1.2 *La fonction G satisfait*

$$0 \leq G(t,s) \leq \frac{(at+b)(1-s)^{\alpha-1}}{(a+b)\Gamma(\alpha)},$$

et $\max_{0\leq t\leq 1} G(t,s) = G(s,s), \quad s \in [0,1].$

Preuve.

D'aprés on peut voir facilement que

$$G(t,s) \leq \frac{(at+b)(1-s)^{\alpha-1}}{(a+b)\Gamma(\alpha)}.$$

Pour $0 \leq s \leq t \leq 1$, par (3.3) on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{a(1-s)^{\alpha-1}}{a+b} - \frac{\alpha-1}{(t-s)^{2-\alpha}}\right) \\ &\leq \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{a+b} - (\alpha-1)\right) < 0. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$G(s,s) > G(s,t) > G(1,s) = 0.$$

Donc, par la continuité de la fonction G par rapport à t on a $G(s,s) \geq G(t,s)$. ■

Lemme 3.1.3 *Une fonction x est une solution de (3.1) si et seulement si*

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)f\left(s, x(s), {}^c D^\alpha x(s)\right)ds + \frac{at+b}{a+b}\int_0^1 h(s)g(s,x(s))ds + \frac{at+b}{a+b}\lambda. \quad (3.4)$$

Preuve.

Selon le lemme (1.4.3), il est évident que la solution de équation différentiel fractionnaire (3.1) est la solution de l'équation intégrale (3.4). D'autre part, si $x \in C([0,1],E)$ est la solution (3.4), alors

$$\begin{aligned} x(t) = & -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s, x(s), {}^c D^\alpha x(s)\right) ds \\ & + \frac{at+b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f\left(s, x(s), {}^c D^\alpha x(s)\right) ds \\ & + \frac{at+b}{(a+b)} \left(\int_0^1 h(s) g(s, x(s)) ds + \lambda \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'(t) = & -\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} f\left(s, x(s), {}^c D^\alpha x(s)\right) ds \\ & + \frac{a}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f\left(s, x(s), {}^c D^\alpha x(s)\right) ds \\ & + \frac{a}{(a+b)} \left(\int_0^1 h(s) g(s, x(s)) ds + \lambda \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(0) = & \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f\left(s, x(s), {}^c D^\alpha x(s)\right) ds \\ & + \frac{b}{(a+b)} \left(\int_0^1 h(s) g(s, x(s)) ds + \lambda \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'(0) = & \frac{a}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f\left(s, x(s), {}^c D^\alpha x(s)\right) ds \\ & + \frac{a}{(a+b)} \left(\int_0^1 h(s) g(s, x(s)) ds + \lambda \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x(1) = & -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f\left(s, x(s), {}^c D^\alpha x(s)\right) ds \\ & + \frac{a+b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f\left(s, x(s), {}^c D^\alpha x(s)\right) ds \\ & + \frac{a+b}{(a+b)} \left(\int_0^1 h(s) g(s, x(s)) ds + \lambda \right). \end{aligned}$$

Donc :

$$ax(0) - bx'(0) = 0.$$

$$x(1) = \int_0^1 h(s) g(s, x(s)) ds + \lambda.$$

il est facile de voir que $x' \in AC([0,1])$ et $x \in AC^2([0,1])$. De Lemme (1.4.1) nous obtenons que ${}^cD^\alpha x(s)$ existe presque partout sur $[0,1]$. En notant que

$$\begin{aligned} x''(t) &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (t-s)^{\alpha-2} f\left(s, x(s), {}^c D^\alpha x(s)\right) ds\right) \\ &= -\frac{d}{dt} I^{\alpha-1} f\left(t, x(t), {}^c D^\alpha x(t)\right). \end{aligned}$$

$$x''(t) = -D^1 I^{\alpha-1} f\left(t, x(t), {}^c D^\alpha x(t)\right) = -{}^{RL}D^{2-\alpha} f\left(t, x(t), {}^c D^\alpha x(t)\right).$$

$${}^cD^\alpha x(t) = I^{2-\alpha} x''(t) = -I^{2-\alpha\, RL} D^{2-\alpha} f\left(t, x(t), {}^c D^\alpha x(t)\right) = -f\left(t, x(t), {}^c D^\alpha x(t)\right),$$

on peut conclure que ${}^cD^\alpha x(t) = -f\left(t, x(t), {}^c D^\alpha x(t)\right)$ et x est la solution de équations différentielles fractionnaires (3.1) La preuve est complète. ■

3.2 Existence des Solutions

Théorème 3.2.1 *Sous les hypothèses suivantes*

(A1) : Il existe des nombres réels positifs K et L tels que

$$\|f(t, x(t), u(t)) - f(t, y(t), v(t))\| \leq K\|x - y\| + L\|u - v\|.$$

(A2) : Pour tout sous-ensemble borné A et B de E nous avons

$$\gamma(f(t, A, B)) \leq K\gamma(A) + L\gamma(B),$$

où γ est une mesure de non-compacité.

(A3) : Il existe $N > 0$ tel que

$$\|g(t, x(t)) - g(t, y(t)\| \leq N\|x - y\|.$$

(A4) : Pour tout sous-ensemble borné C de E nous avons

$$\gamma(g(t, C)) \leq N\gamma(C).$$

(A5) : $\frac{K}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)} + NN_0 < 1$, où $N_0 = \int_0^1 h(s)ds$.

Preuve.

Transformons le problème (3.1) en un problème à point fixe. Considérons l'opérateur $T : C([0,1], E) \longrightarrow C([0,1], E)$ défini par

$$Tx(t) = \int_0^1 G(t,s)F(s)ds + \frac{at+b}{a+b}\int_0^1 h(s)y(s)ds + \frac{at+b}{a+b}\lambda, \ t \in [0,1].$$

Où $F, g \in C([0,1], E)$ tel que $F(t) = f(t, x(t), ^c D^\alpha x(t))$ et $y(t) = g(t, x(t))$. Clairement, le point fixe de l'opérateur T est la solution du problème (3.1).

Étape 1 : T est continue.

Soit (x_n) une suite telle que $x_n \longrightarrow x$ dans $C([0,1], E)$. Si $t \in [0,1]$ nous avons

$$\begin{aligned}
|T(x_n)(t) - T(x)(t)| &= \left| \int_0^1 G(t,s)(F_n(s) - F(s))ds + \frac{at+b}{a+b}\int_0^1 h(s)(y_n(s) - y(s))ds \right| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)||F_n(s) - F(s)|ds + \frac{at+b}{a+b}\int_0^1 |h(s)||y_n(s) - y(s)|ds \\
&\leq \frac{at+b}{a+b}|F_n(s) - F(s)| \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds \\
&+ |y_n(s) - y(s)| \frac{at+b}{a+b}\int_0^1 |h(s)|ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}|F_n(s) - F(s)| + N_0|y_n(s) - y(s)|,
\end{aligned}$$

où $F_n(s), F(s), y_n, y \in C([0,1], E)$ tels que $F_n(t) = f(t, x_n(t), ^c D^\alpha x_n(t))$ et, $F(t) = f(t, x(t), ^c D^\alpha x(t))$, $y_n(t) = g_n(t, x_n(t))$ et $y(t) = g(t, x(t))$.

Par $(A1)$ et $(A3)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|F_n(t) - F(t)\| &= \|f(t, x_n(t), ^c D^\alpha x_n(t)) - f(t, x(t), ^c D^\alpha x(t))\| \\
&\leq K\|x_n - x\| + L\|^c D^\alpha x_n(t) - ^c D^\alpha x(t)\| \\
&\leq K\|x_n - x\| + L\|f(t, x_n(t), ^c D^\alpha x_n(t)) - f(t, x(t), ^c D^\alpha x(t))\|
\end{aligned}$$

ensuite

$$\|F_n(t) - F(t)\| \leq \frac{K}{1-L}\|x_n - x\|,$$

et

$$\|y_n(t) - y(t)\| = \|g_n(t, x_n(t)) - g(t, x(t))\| \leq N\|x_n - x\|.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|T(x_n)(t)-T(x)(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\|F_n(s)-F(s)\|+N_0\|y_n(s)-y(s)\| \\
&\leq \frac{K}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)}\left\|x_n-x\right\|+N_0N\left\|x_n-x\right\|.
\end{aligned}$$

Alors

$$\|T(x_n)(t)-T(x)(t)\|_\infty \leq \left(\frac{K}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)}+N_0N\right)\left\|x_n-x\right\|_\infty.$$

Puisque $x_n \longrightarrow x$, pour chaque $t\in[0,1]$.

$$\left\|T\left(x_n\right)(t)-T(x)(t)\right\|_\infty \longrightarrow 0, \qquad \textit{quand} \quad n\longrightarrow\infty.$$

Par conséquent, T est continue.

Soit la constante r telle que

$$\frac{1}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)}(Kr+f^*)+N_0(Nr+g_0)+\lambda\leq r,$$

et $f^*=\sup\limits_{t\in[0,1]}\|f(t,0,0)\|$, $g_0=\sup\limits_{t\in[0,1]}\|g(t,0)\|$.
Définissons $B_r=\{x\in C([0,1],E):\|x\|\leq r\}$. Il est clair que B_r sous-ensemble est une borné, fermé et convexe de $C([0,1],E)$.

Étape 2 : T est borné donc on va monter que $T(B_r)\subset B_r$.

Soit $x\in B_r$ nous montrons que $T(x)\in B_r$. Si $t\in[0,1]$ alors $\|T(x)(t)\|$ c'est-à-dire que nous avons

$$\begin{aligned}
\|T(x)(t)\| = &\left\|\int_0^1 G(t,s)F(s)ds+\frac{at+b}{a+b}\int_0^1 h(s)y(s)ds+\frac{at+b}{a+b}\lambda\right\| \\
&\leq \frac{at+b}{a+b}\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\|F(s)\|ds+\frac{at+b}{a+b}\int_0^1 h(s)\|y(s)\|ds \\
&+\frac{at+b}{a+b}\lambda \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\|F(s)\|+N_0\|y(s)\|+\lambda.
\end{aligned}$$

Par $(A1)$ et $(A3)$, nous avons pour chaque $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\|F(t)\| &= \|f(t, x(t),^c D^\alpha x(t)) - f(t,0,0) + f(t,0,0)\| \\
&\leq \|f(t, x,^c D^\alpha x(t)) - f(t,0,0)\| + \|f(t,0,0)\| \\
&\leq K\|x\| + L\|^c D^\alpha x(t)\| + f^* \\
&\leq Kr + L\|F(t)\| + f^* \\
&\leq \frac{1}{1-L}(Kr + f^*),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

et

$$\begin{aligned}
\|y(t)\| &= \|g(t, x(t)) - g(t,0) + g(t,0)\| \\
&\leq \|g(t, x(t)) - g(t,0)\| + \|g(t,0)\| \\
&\leq N\|x\| + g_0 \\
&\leq Nr + g_0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Alors

$$\|Tx(t)\|_\infty \leq \frac{1}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)}(Kr + f^*) + N_0(Nr + g_0) + \lambda,$$

il en résulte que pour chaque $t \in [0,1]$ on a $\|Tx(t)\|_\infty \leq r$ ce qui implique que $T(B_r) \subset B_r$.

Étape 3 : $T(B_r)$ est borné et équicontinu.

Selon **Étape 2**, nous avons $T(B_r) = \{T(x) : x \in B_r\} \subset B_r$. Ainsi pour chaque $x \in B_r$ nous avons $\|T(x)\|_\infty \leq r$, ce qui signifie que $T(B_r)$ est borné.

Soient $t_1, t_2 \in [0,1], t_1 < t_2$ et $x \in B_r$, ensuite

$$\begin{aligned}
\|T(x)(t_2) - T(x)(t_1)\| &= \Bigg\| \int_0^1 G(t_2,s)F(s)ds + \frac{at_2+b}{a+b}\int_0^1 h(s)y(s)ds \\
&+ \lambda\frac{at_2+b}{a+b} - \int_0^1 G(t_1,s)F(s)ds \\
&- \frac{at_1+b}{a+b}\int_0^1 h(s)y(s)ds - \lambda\frac{at_1+b}{a+b}\Bigg\| \\
&= \Bigg\| \int_0^1 \left[G(t_2,s) - G(t_1,s)\right] F(s)ds \\
&+ \frac{a}{a+b}\int_0^1 h(s)y(s)(t_2-t_1)ds + \lambda\frac{a}{a+b}(t_2-t_1)\Bigg\| \\
&\leq \int_0^1 \left[G(t_2,s) - G(t_1,s)\right] \|F(s)\|ds \\
&+ \frac{a(t_2-t_1)}{a+b}\int_0^1 h(s)\|y(s)\|ds + \lambda\frac{a}{a+b}(t_2-t_1).
\end{aligned}$$

D'après (3.5) et (3.6) on a

$$\begin{aligned}
\|T(x)(t_2) - T(x)(t_1)\| \leq \frac{1}{1-L}(Kr+f^*)\int_0^1 \left[G(t_2,s) - G(t_1,s)\right] ds \\
+ \frac{a(Nr+g_0)}{a+b}\int_0^1 |h(s)|(t_2-t_1)ds + \lambda\frac{a}{a+b}(t_2-t_1).
\end{aligned}$$

En tant que $t_2 \longrightarrow t_1$, la partie droite de l'inégalité ci-dessus tend à vers zéro.

Donc $T(B_r)$ est équicontinu.

Soit $V \subset B_r$, telque $V = \{Tx, x \in B_r\}$ alors $V \subset \overline{\text{conv}}(T(V) \cup \{0\})$,

le sous-ensemble V est borné et équicontinu, par conséquent la fonction

$v \longmapsto v(t) = \gamma(V(t)) \in \mathbb{R}$ est continue sur $[0,1]$.

$$\begin{aligned}
v(t) = \gamma(V(t)) &\leqslant \gamma(T(V)(t) \cup \{0\}) \\
&\leqslant \gamma(T(V)(t)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(T(V)(t)) &= \gamma((Tx)(t),\ x \in V) \\
&= \gamma\left(\left\{\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s),{}^c D^\alpha x(s))ds + \frac{at+b}{a+b}\int_0^1 h(s)g(s,x(s))ds\right.\right. \\
&+ \left.\left.\frac{at+b}{a+b}\lambda,\ x \in V\right\}\right) \\
&\leq \gamma\left(\left\{\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s),{}^c D^\alpha x(s))ds,\ x \in V\right\}\right) \\
&+ \gamma\left(\left\{\frac{at+b}{a+b}\left(\int_0^1 h(s)g(s,x(s))ds + \lambda\right),\ x \in V\right\}\right) \\
&\leq \int_0^1 G(t,s)\gamma\left(f(s,x(s),{}^c D^\alpha x(s))\right)ds + \frac{at+b}{a+b}\int_0^1 h(s)\gamma\left(g(s,x(s))\right)ds.
\end{aligned}$$

Puis par Lemme de la mesure de non-compacité impliquent que, pour chaque $s \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\gamma(f(s,x(s),{}^c D^\alpha x(s)),\ x \in V) &\leq K\gamma(x(s),\ x \in V) + L\gamma({}^c D^\alpha x(s),\ x \in V) \\
&\leq \frac{K}{1-L}\gamma(x(s),\ x \in V).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\gamma(g(s,x(s)), x \in V) \leq N\gamma(x(s),\ x \in V),$$

ensuite

$$\begin{aligned}
\gamma(T(V)(t)) &\leq \frac{K}{1-L}\int_0^1 G(t,s)\gamma(x(s))ds + N\frac{at+b}{a+b}\int_0^1 h(s)\gamma(x(s))ds \\
&\leq \frac{K}{1-L}\int_0^1 G(t,s)\gamma(V(s))ds + N\frac{at+b}{a+b}\int_0^1 h(s)\gamma(V(s))ds \\
&\leq \frac{K}{(1-L)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{at+b}{a+b}(1-s)^{\alpha-1}v(s)ds + N\frac{at+b}{a+b}\int_0^1 h(s)v(s)ds \\
&\leq \left(\frac{K}{\Gamma(\alpha+1)(1-L)} + NN_0\right)v(s).
\end{aligned}$$

Donc

$$\|v\|_\infty \leq \left(\frac{K}{\Gamma(\alpha+1)(1-L)} + NN_0\right)\|v\|_\infty$$

$$\|v\|_\infty\left(1 - \frac{K}{\Gamma(\alpha+1)(1-L)} - NN_0\right) \leq 0,$$

nous obtenons $\|v\|_\infty = 0$, c'est-à-dire $v(t) = 0$, pour chaque $t \in [0,1]$, et ensuite $V(t)$ est relativement compact dans E. En vue du Théorème d'Ascoli-Arzela, V

est relativement compact dans B_r.

En appliquant maintenant le Théorème de Mönch, nous concluons que T admet un point fixe qui est une solution du problème (3.1). Ce complète la preuve.

■

Remarque 3.2.1 *Si on remplace les hypothèses (A2) et (A4) par la condition*

$$\frac{K + NN_0(1-L)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)(1-L)} < 1,$$

on peut obtenir le même résultas par l'utilisation du théorème de Darbo.

En effet, dans la dernière étape de la preuve du Théorème (3.2.1), on a

$$\begin{aligned}\gamma(f(s,x(s),{}^c D^\alpha x(s)),\ x\in V) &\le K\gamma(x(s), x\in V) + L\gamma({}^cD^\alpha x(s),\ x\in V)\\ &\le \frac{K}{1-L}\gamma(x(s),\ x\in V).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\gamma(g(s,x(s)),\ x\in V) \le N\gamma(x(s),\ x\in V),$$

ensuite

$$\begin{aligned}\gamma(T(V)(t)) &\le \frac{K}{1-L}\int_0^1 G(t,s)\gamma(x(s))ds + \frac{at+b}{a+b}N\int_0^1 h(s)\gamma(x(s))ds\\ &\le \frac{K}{1-L}\int_0^1 G(t,s)\gamma(V(s))ds + N\frac{at+b}{a+b}\int_0^1 h(s)\gamma(V(s))ds\\ &\le \frac{K}{(1-L)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{at+b}{a+b}(1-s)^{\alpha-1}\gamma(V)ds + N\frac{at+b}{a+b}\int_0^1 h(s)\gamma(V)ds\\ &\le \left(\frac{K}{\Gamma(\alpha+1)(1-L)} + NN_0\right)\gamma(V).\end{aligned}$$

Donc

$$\gamma_c(TV) \le \frac{K + NN_0(1-L)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)(1-L)}\gamma_c(V).$$

Donc, l'opérateur T est de Darbo. En conséquence de Théorème Darbo's,on en déduit que T admet point fixe solution du problème (3.1). Ce complète la preuve.

3.3 Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats.

Considérons le problème limites suivant :

$$ {}^cD^{\frac{3}{2}}x(t) = \frac{1}{200}(t\sin x - x\cos t) + \frac{1}{2}\sin\left({}^cD^{\frac{3}{2}}x(t)\right) + \frac{1}{2} $$

avec

$$ x(0) - 4x'(0) = 0, $$

et

$$ x(1) = \frac{1}{100}\int_0^1 sx(s)ds. $$

$$ f(t,x,u) = \frac{1}{200}(t\sin(x) - x\cos(t)) + \frac{1}{2}\sin\left({}^cD^{\frac{3}{2}}u(t)\right) + \frac{1}{2}, $$

$$ t \in [0,1], x, u \in C([0,1], E). $$

$h(s) = s, g(s,x) = \dfrac{x(s)}{100},\ g \in C(E,E),\ \alpha = 1.5,\ a = 1,\ b = 4$. Évidemment $\frac{a}{a+b} < \alpha - 1$,

$$ \begin{aligned} \|f(t,x,u) - f(t,y,v)\| \leq & \frac{1}{200}|t|\|\sin x - \sin y\| + \frac{1}{200}|\cos t|\|x-y\| \\ & + \frac{1}{2}\|\sin u - \sin v\| \\ \leq & \frac{1}{100}\|x-y\| + \frac{1}{2}\|u-v\|. \end{aligned} $$

$$ \|g(t,x) - g(t,y)\| = \frac{1}{100}\|x-y\| $$

Par conséquent, les conditions $(A1)$ et $(A3)$ sont satisfaites avec $K = \dfrac{1}{100}, L = \dfrac{1}{2}$ et $N = \dfrac{1}{100}$ et le condition

$$ \frac{K}{\Gamma(\alpha+1)(1-L)} + NN_0 < 1, $$

sont satisfaits de $\alpha = 1.5,\ N_0 = \dfrac{1}{2}$. D'apres les hypothèses le problème admet au moins une solution sur $[0,1]$.

Chapitre 4

Problème des équations intégrodifférentielles avec conditions aux limites intégrales

Le but dans ce chapitre est d'établir un théorème d'existence des solutions pour un probléme aux limites d'équations intégrodifférentielle avec des condition intégrales aux limites. En utilisant le concept de mesure non-compacité combiné avec le théorème de point fixe de Mönch.

4.1 Position du problème

Soit $(E, \|.\|)$ être un espace de Banach, nous considérons le problème de valeur limite suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) = f(t, x(t), Sx(t)), & 0 < t < 1,\ 1 < \alpha \leq 2 \\ ax(0) + bx'(0) = \int_0^1 g_1(x(s))ds \\ ax(1) + bx'(1) = \int_0^1 g_2(x(s))ds, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $a > 0,\ b \geq 0, f : [0, 1] \times E \times E \to E$.

$$Sx(t) = \int_0^1 h(t, s)x(s)ds,$$

$h : [0,1] \times [0,1] \to [0,\infty)$ est une fonction continue $g_i : E \to E, i = 1,2$ et ${}^cD^\alpha$ la dérivée d'ordre fractionnaire au sens Caputo.

Lemme 4.1.1 *Une fonction $x \in C([0,1],\mathbb{R})$ est une solution de (4.1) si et seulement si*

$$\begin{aligned} x(t) = &\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s),Sx(s))ds + \frac{1}{a^2}\left[a((1-t)+b)\int_0^1 g_1(x(s))ds \right. \\ &\left. +(at-b)\int_0^1 g_2(x(s))ds\right], \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{a(t-s)^{\alpha-1}+(b-at)(1-s)^{\alpha-1}}{a\Gamma(\alpha)} + \frac{b(b-at)(1-s)^{\alpha-2}}{a^2\Gamma(\alpha-1)}, & s \le t \\ \frac{(b-at)(1-s)^{\alpha-1}}{a\Gamma(\alpha)} + \frac{b(b-at)(1-s)^{\alpha-2}}{a^2\Gamma(\alpha-1)}, & t \le s. \end{cases} \tag{4.3}$$

Preuve.

En utilisant le lemme (1.4.3), nous obtenons

$$x(t) = \int_0^1 \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s,x(s),Sx(s))ds + c_0 + c_1 t,$$

en dérivant on obtient

$$x'(t) = \int_0^1 \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} f(s,x(s),Sx(s))ds + c_1,$$

en passant aux conditions aux limites que nous obtenons

$$\begin{aligned} c_0 =& \frac{1}{a^2}\left[(a+b)\int_0^1 g_1(x(s))ds - b\int_0^1 g_2(x(s))ds\right] + \frac{b}{a\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s,x(s),Sx(s))ds \\ &+ \frac{b^2}{a^2\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s,x(s),Sx(s))ds. \\ c_1 =& \frac{1}{a}\left[\int_0^1 g_2(x(s))ds - \int_0^1 g_1(x(s))ds\right] - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s,x(s),Sx(s))ds \\ &- \frac{b}{a\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s,x(s),Sx(s))ds. \end{aligned}$$

Cette solution du problème (4.1) est donnée par

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s,x(s),Sx(s))ds + \frac{1}{a^2}\left[(a+b)\int_0^1 g_1(x(s))ds - b\int_0^1 g_2(x(s))ds\right] \\
&+ \frac{b}{a\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s,x(s),Sx(s))ds + \frac{b^2}{a^2\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s,x(s),Sx(s))ds \\
&+ \frac{t}{a}\left[\int_0^1 g_2(x(s))ds - \int_0^1 g_1(x(s))ds\right] - \frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s,x(s),Sx(s))ds \\
&- \frac{bt}{a\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s,x(s),Sx(s))ds \\
&= \int_0^t \left[\frac{a(t-s)^{\alpha-1}+(b-at)(1-s)^{\alpha-1}}{a\Gamma(\alpha)} + \frac{b(b-at)(1-s)^{\alpha-2}}{a^2\Gamma(\alpha-1)}\right] f(s,x(s),Sx(s))ds \\
&+ \int_t^1 \left[\frac{(b-at)(1-s)^{\alpha-1}}{a\Gamma(\alpha)} + \frac{b(b-at)(1-s)^{\alpha-2}}{a^2\Gamma(\alpha-1)}\right] f(s,x(s),Sx(s))ds \\
&+ \frac{1}{a^2}\left[(a(1-t)+b)\int_0^1 g_1(x(s))ds + (at-b)\int_0^1 g_2(x(s))ds\right] \\
&= \int_0^1 G(t,s) f(s,x(s),Sx(s))ds + \frac{1}{a^2}\left[(a(1-t)+b)\int_0^1 g_1(x(s))ds + (at-b)\int_0^1 g_2(x(s))ds\right],
\end{aligned}
$$

où G est fonction de Green donnée par (4.3).

Selon le lemme (1.4.3), il est évident que la solution d'équation différentiel fractionnaire (4.1) est la solution de l'équation intégrale (4.2). D'autre part, si $x \in C([0,1],\mathbb{R})$ est la solution (4.2), alors

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t \left[\frac{a(t-s)^{\alpha-1}+(b-at)(1-s)^{\alpha-1}}{a\Gamma(\alpha)} + \frac{b(b-at)(1-s)^{\alpha-2}}{a^2\Gamma(\alpha-1)}\right] f(s,x(s),Sx(s))ds \\
&+ \int_t^1 \left[\frac{(b-at)(1-s)^{\alpha-1}}{a\Gamma(\alpha)} + \frac{b(b-at)(1-s)^{\alpha-2}}{a^2\Gamma(\alpha-1)}\right] f(s,x(s),Sx(s))ds \\
&+ \frac{1}{a^2}\left[(a(1-t)+b)\int_0^1 g_1(x(s))ds + (at-b)\int_0^1 g_2(x(s))ds\right].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2} f(s,x(s),Sx(s))ds - \frac{1}{a\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 \left[a(1-s)^{\alpha-1}+b(1-s)^{\alpha-2}\right] \\
&f(s,x(s),Sx(s))ds + \frac{1}{a}\left(\int_0^1 g_1(x(s))ds + \int_0^1 g_2(x(s))ds\right).
\end{aligned}
$$

$$ax(0)+bx'(0) = \int_0^1 g_1(x(s))ds.$$

$$ax(1)+bx'(1) = \int_0^1 g_2(x(s))ds.$$

$$\begin{aligned}x''(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (t-s)^{\alpha-2} f\left(s, x(s), Sx(s)\right) ds\right)\\ &= \frac{d}{dt} I^{\alpha-1} f\left(t, x(t), Sx(t)\right).\end{aligned}$$

$$x''(t) = D^1 I^{\alpha-1} f\left(t, x(t), Sx(t)\right) =^{RL} D^{2-\alpha} f\left(t, x(t), Sx(t)\right).$$

$$^cD^{\alpha}x(t) = I^{2-\alpha}x''(t) = I^{2-\alpha RL}D^{2-\alpha}f(t, x(t), Sx(t)) = f\left(t, x(t), Sx(t)\right),$$

on peut conclure que $^cD^{\alpha}x(t) = f\left(t, x(t), Sx(t)\right)$ et x est la solution de équations différentielles fractionnaires (4.1) La preuve est complète. ■

4.2 Existence des Solutions

Supposons que $f : [0,1] \times E \times E \longrightarrow E$ est continue, $g_i : E \longrightarrow E, i = 1, 2$ sont des fonctions continues et $h : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow (0, \infty)$, est continu.

Nous considérons les hypothèses suivantes.

(A_1) : Il existe des nombres réels positifs L_1 et L_2 tels que

$$\|f(t, x(t), Sx(t)) - f(t, y(t), Sy(t))\| \leq L_1\|x - y\| + L_2\|Sx(t) - Sy(t)\|,$$

$$\sup_{0\leq t\leq 1} |f(t, 0, 0)| = f_0, \quad \sup_{t\in[0,1]} h(t, s) = h_0.$$

Pour tout sous-ensemble borné A et B de E, nous avons

$$\gamma(f(t, A, B)) \leq L_1\gamma(A) + L_2\gamma(B),$$

où γ est une mesure de non-compacité.

(A_2) : Il existe $K_i > 0,\ i = 1, 2$ tel que $|g_i(x) - g_i(y)| \leq K_i|x - y|$, pour tout sous-ensemble borné C de E nous avons

$$\gamma\left(g_i(t, C)\right) \leq K_i\gamma(C).$$

(A_3) : Il existe M_1 et M_2 pour satisfaisant

$$\|g_1(x(t))\| \leq M_1,$$

et

$$\|g_2(x(t))\| \leq M_2.$$

(A_4) : Il existe $r_0 > 0$, tel que

$$M\left((L_1 + h_0 L_2) r_0 + f_0\right) + \frac{a+b}{a^2}\left(M_1 + M_2\right) < r_0,$$

et $M = \sup\{\|G(t,s)\|, (t,s) \in [0,1] \times [0,1]\}$.

Théorème 4.2.1 *Sous les hypothèses $(A_1) - (A_4)$, le problème (4.1) a une solution en E, si*

$$M(L_1 + h_0 L_2) + \frac{a+b}{a^2}(K_1 + K_2) < 1. \tag{4.4}$$

Preuve.

Définir l'opérateur $T : C([0,1], E) \to C([0,1], E)$

$$Tx(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s), Sx(s)) ds + \frac{1}{a^2}\left[(a(1-t)+b)\int_0^1 g_1(x(s))ds \right.$$
$$\left. +(at-b)\int_0^1 g_2(x(s))ds\right].$$

Il est clair que le problème (4.1) a une solution en $C([0,1], E)$ si et seulement si T admet un point fixe dans cet espace.

Nous allons donner la preuve de notre résultat principal en trois étapes.

Étape 1 : Nous montrons l'opérateur T dans E en lui-même est continu.

Soit $(x_n)_n$ une suite dans E qui est convergente vers $x \in E$, donc nous avons

$$\begin{aligned}
|Tx_n(t) - Tx(t)| = & \left| \int_0^1 G(t,s) f(s, x_n(s), Sx_n(s)) ds + \frac{1}{a^2}\left((a(1-b)+b)\int_0^1 g_1(x_n(s))ds \right.\right. \\
& \left. +(at-b)\int_0^1 g_2(x_n(s))ds\right) - \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s), Sx(s)) ds \\
& \left. - \frac{1}{a^2}\left((a(1-b)+b)\int_0^1 g_1(x(s))ds + (at-b)\int_0^1 g_2(x(s))ds\right)\right| \\
& \le \int_0^1 |G(t,s)| \left| f\left(s, x_n(s), Sx_n(s)\right) - f(s, x(s), Sx(s))\right| ds \\
& + \frac{1}{a^2}\left[(a(1-t)+b)\int_0^1 \left|g_1\left(x_n(s)\right) - g_1(x(s))\right| ds \right. \\
& \left. +(at-b)\int_0^1 \left|g_2\left(x_n(s)\right) - g_2(x(s))\right| ds\right] \\
& \le \|G(t,s)\| \left(L_1 \|x_n(s) - x(s)\| + L_2 \|Sx_n(s) - Sx(s)\|\right) \\
& + K_1 \frac{(a(1-t)+b)}{a^2}\|x_n(s) - x(s)\| + K_2 \frac{(at-b)}{a^2}\|x_n(s) - x(s)\|,
\end{aligned}$$

alors

$$\|Tx_n(t) - Tx(t)\|_\infty \leq \left(M(L_1 + h_0 L_2) + (K_1 + K_2)\frac{a+b}{a^2} \right) \|x_n - x\|_\infty.$$

Depuis les fonctions f, g_1, g_2 et h sont continus, alors $\|Tx_n - Tx\| \longrightarrow 0$ pour $n \longrightarrow \infty$, alors T est continu.

Étape 2 : Soit $B_{r_0} = \{x \in E, \|x\|_\infty \leq r_0\}$, pour certains $r_0 > 0$. Il est clair que B_{r_0} est fermé, borné et convexe. Nous montrons T est l'opérateur de B_{r_0} dans lui-même. Pour $x \in B_{r_0}$ nous avons

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| &= \left| \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s), Sx(s)) ds + \frac{1}{a^2} \left((a(1-t)+b) \int_0^1 g_1(x(s)) ds \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + (at-b) \int_0^1 g_2(x(s)) ds \right) \right| \\
&= \left| \int_0^1 G(t,s) \left(f(s, x(s), Sx(s)) - f(s,0,0) + f(s,0,0) \right) ds \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{a^2} \left((a(1-t)+b) \int_0^1 g_1(x(s)) ds + (at-b) \int_0^1 g_2(x(s)) ds \right) \right| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)| |f(s, x(s), Sx(s)) - f(s,0,0)| + |f(s,0,0)| ds \\
&\quad + \frac{1}{a^2} \left((a(1-t)+b) \int_0^1 |g_1(x(s))| ds + (at-b) \int_0^1 |g_2(x(s))| ds \right) \\
&\leq ((L_1 + h_0 L_2) r_0 + f_0) \int_0^1 |G(t,s)| ds \\
&\quad + \frac{1}{a^2} \left((a(1-t)+b) M_1 + (at-b) M_2 \right) \\
&\leq M \left((L_1 + h_0 L_2) r_0 + f_0 \right) + (M_1 + M_2) \frac{a+b}{a^2}.
\end{aligned}$$

Par (A_4) nous obtenons

$$\|Tx(t))\|_\infty \leq M \left((L_1 + h_0 L_2) r_0 + f_0 \right) + (M_1 + M_2) \frac{a+b}{a^2} \leq r_0.$$

Donc $T(B_{r_0}) \subset B_{r_0}$.

Étape 3 : Pour un arbitraire $\delta > 0$ tel que $|t_2 - t_1| < \delta, x \in B_{r_0}$ et $t_1, t_2 \in [0,1]$.

Supposns $t_1 < t_2$, nous avons

$$\begin{aligned}
|Tx(t_2) - Tx(t_1)| &= \left| \int_0^1 \left(G(t_2, s) - G(t_1, s)\right) f(s, x(s), Sx(s)) ds \right. \\
&\left. + \frac{1}{a^2} \left(a(t_2 - t_1) \int_0^1 g_1(x(s)) ds + a(t_1 - t_2) \int_0^1 g_2(x(s)) ds \right) \right| \\
&\leq \int_0^1 |G(t_2, s) - G(t_1, s)| \, |f(s, x(s), Sx(s))| ds \\
&+ \frac{1}{a^2} \left(a|t_1 - t_2| \int_0^1 |g_1(x(s))| ds + a|t_2 - t_1| \int_0^1 |g_2(x(s))| ds \right) \\
&\leq \left((L_1 + h_0 L_2) r_0 + f_0\right) \|G(t_2, s) - G(t_1, s)\| + \frac{(M_1 + M_2)}{a} |t_2 - t_1|.
\end{aligned}$$

Comme $t_2 \longrightarrow t_1$ la partie droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro, ce qui implique que $T(B_{r_0})$ est équicontinu.

Soit W un sous-ensemble non vide de B_{r_0} tel que $W \subset \overline{conv}(T(W) \cup \{0\})$. Le sous-ensemble W est borné et équicontinu, donc à partir du lemme (1.2.1), la fonction $w : t \longmapsto w(t) = \gamma(W(t))$ est continu et pour $t \in [0, 1]$ nous avons

$$w(t) = \gamma(W(t)) \leq \gamma(T(W(t))).$$

$$\begin{aligned}
\gamma(T(W(t))) &= \gamma \left(\int_0^1 G(t, s) f(s, x(s), Sx(s)) ds + \frac{1}{a^2} \left((a(1 - t) + b) \int_0^1 g_1(x(s)) ds \right.\right. \\
&\left.\left. + (at - b) \int_0^1 g_2(x(s)) ds \right) \right) \\
&\leq \int_0^1 G(t, s) \gamma\left(f(s, x(s), Sx(s))\right) ds + \frac{1}{a^2} \left((a(1 - t) + b) \int_0^1 \gamma(g_1(x(s))) ds \right. \\
&\left. + (at - b) \int_0^1 \gamma(g_2(x(s))) ds \right) \\
&\leq \int_0^1 G(t, s) \left[L_1 \gamma(W(x(s))) + L_2 \gamma(S(W(x(s))))\right] ds \\
&+ \frac{1}{a^2} \left((a(1 - t) + b) \int_0^1 K_1 \gamma(W(x(s))) ds + (at - b) \int_0^1 K_2 \gamma(W(x(s))) ds \right) \\
&\leq (L_1 + h_0 L_2) \|G(t, s)\| w(s) + \frac{a + b}{a^2} (K_1 + K_2) w(s).
\end{aligned}$$

Alors

$$\|w\|_\infty \leq \|w\|_\infty \left[(L_1 + h_0 L_2) M + \frac{a + b}{a^2} (K_1 + K_2) \right],$$

ce qui implique

$$\|w\|_\infty \left[1 - \left((L_1 + h_0 L_2) M + \frac{a + b}{a^2} (K_1 + K_2) \right) \right] \leq 0.$$

Donc $w(t) = 0$, pour tout $t \in [0,1]$, et $w(t)$ est relativement compact. D'après le théorème Ascoli-Arzela W est relativement compact dans B_{r_0}. En conséquence et d'après le théorème de Mönch, T admet un point fixe.

■

Remarque 4.2.1 *On peut obtenir le résultat du Théorème (4.2.1) par l'utilisation du théorème de Darbo au lieu l'autre de Mönch.*
En effet, le changement commence à partir la dernière étape de la preuve, où on a

$$\begin{aligned}
\gamma(T(W(t))) &= \gamma\left(\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s),Sx(s))ds + \frac{1}{a^2}\left((a(1-t)+b)\int_0^1 g_1(x(s))ds\right.\right.\\
&\left.\left.+ (at-b)\int_0^1 g_2(x(s))ds\right)\right)\\
&\leq \int_0^1 G(t,s)\gamma\left(f(s,x(s),Sx(s))\right)ds + \frac{1}{a^2}\left((a(1-t)+b)\int_0^1 \gamma(g_1(x(s)))ds\right.\\
&\left.+ (at-b)\int_0^1 \gamma(g_2(x(s)))ds\right)\\
&\leq \int_0^1 G(t,s)\left[L_1\gamma(W(x(s))) + L_2\gamma(S(W(x(s))))\right]ds\\
&+ \frac{1}{a^2}\left((a(1-t)+b)\int_0^1 K_1\gamma(W(x(s)))ds + (at-b)\int_0^1 K_2\gamma(W(x(s)))ds\right)\\
&\leq (L_1 + h_0L_2)\|G(t,s)\|\gamma(W(x(s))) + \frac{a+b}{a^2}(K_1+K_2)\gamma(W(x(s))),
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\gamma(T(W(t))) \leq \left[(L_1 + h_0L_2)M + \frac{a+b}{a^2}(K_1+K_2)\right]\gamma(W(x(s)))$$

$$\gamma(T(W)) \leq \left[\left((L_1 + h_0L_2)M + \frac{a+b}{a^2}(K_1+K_2)\right)\right]\gamma(W).$$

On a

$$\left((L_1 + h_0L_2)M + \frac{a+b}{a^2}(K_1+K_2)\right) < 1.$$

Alors d'après Théorème de Darbo's, on en déduit que T admet un point fixe solution du problème (4.1).

4.3 Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats.

Considérons le problème des limites

$$^{c}D^{\frac{3}{2}}x(t) = \frac{\sin x}{(t+7)^2(3+\sin x)} + \int_0^t \frac{e^{-(s-t)}}{49}x(s)ds, \tag{4.5}$$

avec

$$x(0) + x'(0) = \int_0^1 \frac{\sin x}{8+\sin x}ds,$$

et

$$x(1) + x'(1) = \int_0^1 \frac{1}{12+\sin x}ds.$$

On a

$$f(t,x,Sx) = \frac{\sin x}{(t+7)^2(3+\sin x)} + \int_0^t \frac{e^{-(s-t)}}{49}x(s)ds,$$

$$h(t,s) = \frac{e^{-(s-t)}}{49},\ g_1(x) = \frac{\sin x}{8+\sin x},\ \ g_2(x) = \frac{\sin x}{12+\sin x}.$$

pour (A_1), nous obtenons

$$\|f(t,x,Sx) - f(t,y,Sy)\| \leq \frac{1}{49}\|x-y\| + \|Sx - Sy\|,$$

et

$$\|h(t,s)\| \leq \frac{e}{49},$$

ainsi (A_1) est satisfait $L_1 = \dfrac{1}{49}$, $L_2 = 1$ et $h_0 = \dfrac{e}{49}$ (A_2) nous obtenons

$$\|g_1(x) - g_1(y)\| \leq \frac{1}{8}\|x-y\|,$$

et

$$\|g_2(x) - g_2(y)\| \leq \frac{1}{12}\|x-y\|,$$

puis (A_2) est satisfait de $K_1 = \dfrac{1}{8}$ et $K_2 = \dfrac{1}{12}$,

pour (A_3) nous obtenons $\|g_1(x)\| \leq \dfrac{1}{7}$ et $\|g_2(x)\| \leq \dfrac{1}{11}$. Si (A_3) est satisfait,

pour (A_4), nous obtenons $f_0 = 0$ effacer

$$M((L_1 + L_2h_0)r_0 + f_0) + \frac{a+b}{a^2}(M_1 + M_2)$$

$$\leq \left(\frac{r_0(1+e)}{49}\right)\left(\frac{6}{\Gamma(\frac{5}{2})}\right) + \frac{36}{77} \leq r_0$$

il sufit de choisir $r_0 = 1$.

Pour inégalité (4.4), nous obtenons

$$(L_1 + L_2 h_0)M + \frac{a+b}{a^2}(K_1 + K_2) \leq \frac{1+e}{49}\left(\frac{6}{\Gamma(\frac{5}{2})}\right) + \frac{36}{77} =$$

$$\frac{8(1+e)}{49\sqrt{\pi}} + \frac{36}{77} < 1,$$

alors (A_4) est satisfait.

En conséquence, toutes les hypothèses du théorème (4.2.1) sont satisfaites, puis le problème (4.5) a une solution en E.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce mémoire. Nous avons discuté l'étude d'existence des solutions pour certains problèmes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo dans des espaces de Banach avec des conditions locales et non locales (intégro- diférentielle). Pour prouver l'existence des solutions de ces quelques problèmes, où on se ramène au problème d'existence de point fixe dans de tel espace fonctionnel. Ces résultats ont été obtenus par l'utilisation du théorème de point fixe de Mönch basé principalement sur la notion de mesure de non compacité.

Cette méthode est l'une des méthodes faibles pour prouves l'existence des solutions du problème des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Nous prévoyons dans le future l'étude qualitative de ces problèmes, en particulier, on examinera la stabilité et le comportement assymptotique des solutions.

Les résultats présentés dans ce mémoire offrent naturellement de nombreuses perspectives. La première est l'étude des équations différentielles fractionnaires dont l'ordre de dérivation est compris entre 2 et 3. La deuxième perspective envisageable serait l'étude des équations inclusions differentielles d'ordres fractionnaires avec retard fini et infini, ainsi que la stabilité des solutions de ces équations.

Finalement, une perspective, qui semble être, une continuité logique de ce travail, est le développement de modèles numériques correspondant aux problèmes présentés dans ce travail.

Bibliographie

[1] B. Ahmad, J. J. Nieto, *Existence Results for Nonlinear Boundary Value Problems of Fractional Integrodifferential Equations with Integral Boundary Conditions*, Hindawi Publishing Corporation, 2009,11 p.

[2] R.P. Agarwal,M. Meehan, D.O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge Univ Press,2004.

[3] R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, A. E. Rodkina and B. N. Sadovskii, *Measures of Noncompactness and Condensing operators*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1992.

[4] J. Banaś, *On measures of noncompactness in Banach spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae 21 (1980). 131-143.

[5] J. Banaś, K. Goebel, *Measures of Noncompactness in Banach spaces*, Lect. Notes Pure Appl. Math., vol. 60, Dekker, New York, 1980.

[6] G. Darbo, *Punti uniti in transformazioni a condominio non compatto*, Rend. Sem. Math. Univ. Padova, 2(1955), 84-92.

[7] K. Diethelm,*The Analysis of Fractional Differential Equations*,Lecture Notes in Mathematics, 2004.

[8] K. Goebel, W.A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[9] D. Guo, Y. I. Cho,J. Zhu,*Partial ordering methods in nonlinear problems*, N. Science Publishers, Inc, 2004.

[10] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo,*Theory And Applications Of Fractional Differentail Equations*, 2006.

[11] L. Leshaf, *Solvabilité d'une classe de problèmes aux limites associés à des équations différentielles fractionnaires*, Mémoire de Master (LMD) en Mathématiques, Univ.Abou Bekr BelKaid Tlemcen, 2017.

[12] K. Latrach, M. A. Taoudi, A. Zeghal, *Some fixed point theorems of the Schauder and the Krasnosel'skii type and application to nonlinear transport equations*, J. Differential. equations, 221 (2006), 256-271.

[13] S. Mehdi, *Équations différentielles d'ordre fractionnaires dans des espaces de Banach*, Mémoire de Master (LMD) en Mathématiques, Univ.Abou Bekr BelKaid Tlemcen, 2013.

[14] H. Mönch, *Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, vol. 4, no. 5, pp. 985999, 1980.

[15] D. O'Regan, R. Precup, *Fixed point theorems for set-valued maps and existence principles for integral inclusions*, J. Math. Anal. Appl. 245(2000), 594-612.

[16] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, San Diego, 1999.

[17] K. Sathiyanathan, V. Krishnaveni, *Nonlinear Implicit Caputo Fractional Differential Equations with Integral Boundary Conditions in Banach Space*,Global .J. Pure and Applied Mathematics, Number 7 (2017), pp. 3895-3907

[18] L. Schwartz, *Analyse Topologie générale et analyse fonctionnelle* , Paris,1993.

[19] S. Szufla, *On the application of measure of noncompactness to existence theorems*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 75 (1986), 1-14.

[20] S. Zhang, *Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations*, Elec. J. Diff. Eq. 2006, No. 36, 12 pp.

ملخص

يعتبر مبدأ النقطة الثابتة ذا أهمية كبيرة في حل كثير المعادلات التفاضلية الغير الخطية خاصة في دراسة وجود ووحدانية الحلول

في هذه المذكرة تطرقنا الى دراسة وجود حلول بعض أنواع المعادلات التفاضليةذات رتبة ناطقة بمفهوم **كابيتو**، باستعمال تقنية نظرية النقطة الثابتة **لمونش** (**Mönch**) مقترنة بقياس عدم التراص

الكلمات والجمل الافتتاحية :المعادلات التفاضلية ذات رتبة ناطقة، وجود الحلول، الاشتقاقية ذات رتبة ناطقة حسب كابيتو ، التكامل ذو رتبة ناطقة، النقطة الثابتة، قياس عدم التراص.

Abstract

The fixed point principle is so important in the study of several non linear differential equations, particulary, problems of existence and uniqeness.
In this memory, we present several existence results for certain classes of differential equations of fractional order in the sense of **Caputo**, These results were obtained by using the fixed point theorem **Mönch** combined with the measure of non compactness

Key words and phrases : fractional differential equations, existence of solutions,caputo fractional derivative, the fractional order integral, fixed point, measure of non compactness.

Résumé

Le principe de point fixe est très important dans la résolution de plusieurs équations différentielles non linéaires, en particulier, dans l'étude de l'existence et de l'unicité.
Dans ce mémoire, nous présentons plusieurs résultats d'existence pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de **Caputo**, Ces résultats ont été obtenus par l'utilisation du théorème de point fixe de **Mönch** combiné avec la mesure de non compacité .

Phrases et mots clés : équations différentielles fractionnaires, existence de solutions, dérivée fractionnaire de type Caputo, intégral fractionnaire, point fixe, mesure de non compacité.