



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Théorie des opérateurs linéaires
continus sur les espace de Hilbert
fondements et applications**

Présenté par : Ghemam Amara Mohammed lamine
Guemoula Abdallah

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Dr. GUESBA Massaoud	MCA/Prof.	Président	Univ. El Oued
Dr. REHOUMA Abdehamid	Prof.	Rapporteur	Univ. El Oued
Dr. HABITA Khaled	MCA/MC	Examineur	Univ. El Oued

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et ma profonde reconnaissance à notre encadreur de mémoire, Docteur Abdelhamid REHOUMA qui nous a proposé le sujet de ce mémoire. Merci pour ses précieux conseils et ses encouragements.

Mes remerciements vont également à Dr.Massaoud GUESBA . pour le grand honneur qu'elle nous fait en présidant le jury de ce mémoire,et à Docteur Khaled HABITA d'avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire. Merci pour leurs remarques et toutes leurs idées.

Je remercie également toutes les personnes qui nous ont aidé à réaliser ce travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Espaces et sous-espaces linéaires	3
1.2 Ensembles linéairement indépendants, sous-espaces engendrés	5
1.3 Espaces métriques	5
1.4 Espaces normes	7
1.5 Espaces de Hilbert	8
1.6 Orthogonalité	11
2 L'opérateurs linéaires continus	13
2.1 Opérateurs linéaires sur un espace normé	13
2.1.1 Les opérateurs linéaires bornés	16
2.1.2 L'espace norme $(\mathbb{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y}), \ \cdot\)$	20
2.1.3 Opérateur régulier	25
2.1.4 L'algèbre de Banach $\mathbb{L}(\mathbb{X})$	26
2.1.5 Convergence dans $(\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), \ \cdot\)$	27
2.1.6 Opérateur compact	29
2.1.7 Théorème du graphe fermé	30
2.2 Fonctionnelles linéaires continus	31
2.2.1 Fonctionnelles linéaires sur un espace linéaire	31
2.2.2 Fonctionnelles linéaires continus sur un espace normé	35
2.2.3 Fonctionnelles linéaires sur un espace de Hilbert	37
2.3 Opérateurs dans les espaces de Hilbert. Notions d'opérateur adjoint	41
2.3.1 Généralités sur les opérateurs linéaires continus dans les espaces des Hilbert	41
2.3.2 Composé de plusieurs opérateurs	41
2.3.3 Inverse d'un opérateur	42
2.3.4 Adjoint d'un opérateur	42
2.3.5 Vecteurs propres et valeurs propres d'un opérateur autoadjoint	46
2.3.6 Opérateurs isométriques ,unitaires, normaux ,autoadjoints ,positifs	47

2.3.7	Matrice d'un opérateur dans une base Hilbertienne	48
3	Applications	50
3.1	Définition et propriétés générales des opérateurs de linéaires dans l'espace de Hilbert. .	50
3.1.1	Les opérateurs de projection.	53
3.2	Spectre d'un opérateur linéaire continu	56
	Conclusion	61
	Bibliographie	62

Notations générales

$[\cdot]$ ensemble des combinaison linéaires.

$\| \cdot \|$ norme.

$B(x_0, r) = \{x; \|x - x_0\| < r\}$ boule ouverte, centrée en x_0 de rayon r .

$B_F(x_0, r) = \{x; \|x - x_0\| \leq r\}$ boule fermée, centrée en x_0 de rayon r .

$d(\cdot, \cdot)$ une distance.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire.

$\mathbb{H}$ espace de Hilbert.

$|\cdot|$ module.

$A^\perp$ orthogonal de A .

T^{-1} inverse d'un opérateur T .

I_d opérateur identité.

$\ker(T)$ noyau de l'opérateur T .

$Im(T)$ image de l'opérateur T .

$\mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ espace des opérateurs linéaires de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$.

$\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ espace des opérateurs linéaires borné de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$.

$\mathbb{L}_r(\mathbb{X})$ ensemble des opérateurs linéaires réguliers de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{X}$.

$\mathbb{L}_c(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ ensemble des opérateurs linéaires compacts de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$.

$\mathbb{X}'$ espace dual de $\mathbb{X}$.

$G(T)$ graphe de l'opérateur T .

T^* opérateur adjoint de l'opérateur T .

$\sigma(T)$ ensemble spectrale de T .

$p(T)$ ensemble résolvante de T .

$\sigma_p(T)$ ensemble spectre ponctuel.

$\sigma_c(T)$ ensemble spectre continu.

$\sigma_r(T)$ ensemble spectre résiduel.

$M_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.

$L^p(\Omega) = \{u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_\Omega |u|^p < \infty \mid 1 \leq p \leq \infty\}$.

$L^\infty(\Omega) = \{u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et il existe } C \text{ tel que } |u(x)| \leq C \text{ presque partout sur } \Omega\}$.

$C(\Omega)$ espace des fonctions continues sur Ω .

$C_c(\Omega)$ fonctions continues à support compact dans Ω .

$C^k(\Omega)$ fonctions k fois continûment différentiables sur Ω (k entier ≥ 0).

Introduction

La théorie des opérateurs linéaires d'un espace de Hilbert vers autre constitue un lieu de rencontre privilégié pour diverses disciplines des mathématiques. Les opérateurs linéaires continus d'un espace vectoriel de Hilbert vers autre forment une classe assez particulière des opérateurs linéaires d'un espace vectoriel normé vers autre .

L'étude des opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert dans autre espace Hilbertien . demande de définir ainsi les opérateurs adjoint d'un opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert qui est aussi un opérateur linéaire continu ,possède les mêmes propriétés de l'opérateur linéaire original. Aussi les opérateurs inverses d'un opérateur linéaire continu inversible d'un espace de Hilbert qui est aussi un opérateur linéaire continu.

Dans ce mémoire, nous allons traiter quelques notions et applications et propriétés structurelles des opérateurs linéaires continus inversibles d'un espace vectoriel normé de Hilbert vers autre .

Ce travail est composé de 3 chapitres :

- Le premier chapitre est consacré au rappel sur les espaces et sous espaces linéaires aussi les ensembles linéairement indépendants ,sous-espaces engendrés. On expose rappel sur les espaces métriques, et les espaces normés ,et sur les espaces de Hilbert, on parlera sur quelques propriétés fondamentales de l'orthogonalité : l'égalité de parallélogramme ,aussi le théorème de la projection orthogonale d'un point quelconque sur un sous ensemble fermé et convexe de cet espace de Hilbert. Dans le deuxième chapitre, on présente les définitions et les propriétés générales des opérateurs linéaires continus d'un espace vectoriel normé vers autre espace vectoriel normé.

En particulier on met l'accent sur quelques propriétés des opérateurs linéaires continus inversibles d'un espace vectoriel normé vers autre et l'inégalité de l'énergie. On donne quelques exemples des opérateurs linéaires continus inversibles , la transformation inverse est linéaire mais n'est pas en général continue.

La famille des opérateurs linéaires continus d'un espace vectoriel normé vers autre constitue aussi un espace vectoriel normé , qui nous permettra de définir l'opérateur adjoint de cet opérateur linéaire continu qui est aussi linéaire continu et qui ont le même norme.

L'ensemble des opérateurs linéaires continus inversibles d'un espace vectoriel normé dans lui-même un espace vectoriel normé.

Dans ce deuxième chapitre, nous étudierons les applications linéaires définies sur un espace linéaire sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ que nous appelons les fonctionnelles linéaires. Après avoir introduit quelques résultats généraux (partie 1), nous nous limitons dans cette partie à l'ensemble $\mathbb{X}'$ des fonctionnelles linéaires continues sur un espace normé $\mathbb{X}$ ou de Hilbert. On appelle $\mathbb{X}'$ l'espace dual topologique de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{X}'$ est lui-même un espace de Banach.

Dans la troisième partie de deuxième chapitre on étudiera Les opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert dans autre espace de Hilbert ,on parlera aussi sur les opérateurs adjoints des opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert vers autre espace Hilbertien, la composé de deux ou plusieurs opérateurs linéaires continus est aussi opérateur linéaire continu. On parle ainsi sur les opérateurs linéaires continus auto adjoints d'un espace de Hilbert vers autre espace Hilbertien et leurs propriétés structurelles.(inverse d'un opérateur linéaire continu)

· Le troisième chapitre s'occupe de deux applications sur ce qui nous avons étudié dans les deux chapitres précédant, ces application sont illustrées par les propriétés structurelles citées aux chapitre un et chapitre deux.

La première application concerne des résultats trouvés sur les opérateur associés à un opérateur linéaire, et leurs propriétés structurelles. des opérateurs de projection et leur étude est important car ils constituent les éléments simples en lesquels se décomposent naturellement les opérateurs hermitiens. La deuxième application s'occupe principalement sur l'étude des valeurs propres d'un opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert dans autre espace de Hilbert, nous sommes intéressés à savoir pour quels valeurs propres l'opérateur résolvant associé est inversible, il est à noter que l'espace de Hilbert est toujours sur le corps de nombres complexes.

Le manuscrit se termine par une conclusion .

Chapitre 1

Préliminaires

Le premier chapitre est consacré au rappel sur les espaces et sous espaces linéaires aussi les ensembles linéairement indépendants, sous-espaces engendrés. On expose rappel sur les espaces métriques, et les espaces normés, et sur les espaces de Hilbert, on parlera sur quelques propriétés fondamentales de l'orthogonalité : l'égalité de parallélogramme, aussi le théorème de la projection orthogonale d'un point quelconque sur un sous ensemble fermé et convexe de cet espace de Hilbert.

1.1 Espaces et sous-espaces linéaires

Définition 1.1.1 *Un espace linéaire (vectoriel) $\mathbb{X}$ sur le corps $\mathbb{K}$ est un ensemble non vide des éléments $x, y, \dots$, appelés vecteurs, muni de deux opérations.*

1. *La première opération, l'addition, est une opération interne pour laquelle $\mathbb{X}$ devient un groupe abélien. Il existe donc une application $\mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, notée*

$$(x, y) \rightarrow x + y,$$

qui a les propriétés suivantes : pour tout $x, y, z \in \mathbb{X}$

(a) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associativité).

(b) *Il existe en $\mathbb{X}$ un vecteur 0 , le vecteur zéro, tel que pour tout $x \in \mathbb{X}$ on aura $x + 0 = 0 + x = x$.*

(c) *Pour tout $x \in \mathbb{X}$, il existe dans $\mathbb{X}$ un vecteur $(-x)$, l'opposé de x , tel que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*

(d) $x + y = y + x$ (commutativité).

2. *La deuxième opération, la multiplication des vecteurs par les scalaires est donc une opération externe. C'est l'application $\mathbb{K} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, notée $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$, qui possède les propriétés suivantes : pour tout $x, y \in \mathbb{X}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*

(a) *Si $1 \in \mathbb{K}$ alors $1x = x$.*

(b) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ (associativité).

(c) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (distributivité par rapport à la somme des scalaires).

(d) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (distributivité par rapport à la somme des vecteurs).

Définition 1.1.2 Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur le corps $\mathbb{K}$. Sous-espace linéaire de $\mathbb{X}$ est un sous-ensemble $\mathbb{X}_1 \subseteq \mathbb{X}$ qui forme lui-même un espace linéaire, sur le même corps $\mathbb{K}$, par rapport aux opérations de $\mathbb{X}$ restreintes à $\mathbb{X}_1$.

On peut vérifier facilement que $\mathbb{X}_1 \subseteq \mathbb{X}$, $\mathbb{X}_1 \neq \emptyset$, est un sous -espace linéaire de $\mathbb{X}$ si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathbb{X}_1 \Rightarrow (x + y) \in \mathbb{X}_1.$$

et

$$\forall x \in \mathbb{X}_1, \forall \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha x \in \mathbb{X}_1.$$

Exemple 1.1.1 $\mathbb{R}^2(+, \times)$ est espace vectoriel

$$1. (x, y) + (x' + y') = (x + x', y + y')$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

$$2. C[0, 1] = \{f, f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continue} \}$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

$$E = \{f, f \in C[0, 1], f(x) = 1\}$$

n'est pas un sous espace vectoriel sur $C[0, 1]$, En effet

$$\forall \alpha \in E \quad \forall f, \rho \in E \quad \alpha f + \rho \in E$$

$\alpha f + \rho$ est continue

$$(\alpha f + \rho)(x_0) = \alpha f(x_0) + \rho(x_0)$$

$$= \alpha + 1$$

$$\Rightarrow \alpha f + \rho \notin E$$

Exemple 1.1.2 Soit $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ l'espace linéaire $\mathbb{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{K})$ est noté $\mathbb{K}^n$. Chaque vecteur $x \in \mathbb{K}^n$ est déterminé par n nombres de $\mathbb{K}$, $\zeta_1 = x(1), \zeta_2 = x(2), \dots, \zeta_n = x(n)$. Les éléments de $\mathbb{K}^n$ sont des n -uples $x = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$.

Si $x = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ et $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, alors

$$x + y = (\zeta_1 + \eta_1, \zeta_2 + \eta_2, \dots, \zeta_n + \eta_n).$$

et

$$\alpha x = (\alpha \zeta_1, \alpha \zeta_2, \dots, \alpha \zeta_n).$$

L'élément nul est $0 = (0, 0, \dots, 0)$ et l'opposé de x est

$$-x = (-\zeta_1, -\zeta_2, \dots, -\zeta_n).$$

1.2 Ensembles linéairement indépendants, sous-espaces engendrés

Définition 1.2.1 Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur $\mathbb{K}$ et $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{X}$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k. \quad (1.1)$$

S'appelle une combinaison linéaire. Les éléments $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, s'appellent les coefficients de la combinaison linéaire.

Remarque 1.2.1 $[A] = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \right\}$ L'ensemble des combinaison linéaires sur A .

Définition 1.2.2 Soit $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ un ensemble fini contenu dans $\mathbb{X}$.

$$\text{L'ensemble fini } A \text{ est linéairement indépendant} \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0 \right). \quad (1.2)$$

c-à-d $\exists \alpha_i \neq 0$ tel que $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = 0$

Dans le cas contraire A est linéairement dépendant.

Exemple 1.2.1 Dans l'espace linéaire $C([a, b])$ $a < b$, l'ensemble $A = \{1, t, t^2, t^3\}$ est linéairement indépendant.

En effet, la relation $\alpha_0 1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 = 0$ pour tout $t \in [a, b]$ entraîne $\alpha_i = 0, i = 0, 1, 2, 3$. Par convention, on considère l'ensemble vide $\emptyset$ comme étant linéairement indépendant.

Définition 1.2.3 Un sous-ensemble B de $\mathbb{X}$ s'appelle une base algébrique de l'espace linéaire $\mathbb{X}$ si :

1. $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est un ensemble linéairement indépendant.

2. $[B] = \mathbb{X}$, i.e. le sous-espace linéaire engendré par B est $\mathbb{X}$.

c-à-d $\forall x \in \mathbb{X} \exists \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \in \mathbb{K}$ tel que $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$

1.3 Espaces métriques

Définition 1.3.1 Soit $\mathbb{X}$ un ensemble quelconque non vide. Une semi-métrique, ou semi-distance, sur $\mathbb{X}$ est une application

$$d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que, pour tout $x, y, z \in \mathbb{X}$ on a

$$c_1) \quad d(x, y) \geq 0, \quad (\text{propriété de non-négativité}).$$

$$c_2) \quad x = y \Rightarrow d(x, y) = 0, \quad (\text{propriété d'identité}).$$

$$c_3) \quad d(x, y) = d(y, x), \quad (\text{propriété de symétrie}).$$

$$c_4) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad (\text{inégalité de triangle}).$$

L'ensemble $\mathbb{X}$ muni d'une semi-métrie d s'appelle espaces semi-métrie que nous notons par $(\mathbb{X}, d)$.

Définition 1.3.2 Soit $\mathbb{X}$ un ensemble quelconque non vide. Une métrique ou encore une distance sur $\mathbb{X}$ est une semi-métrie $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que
 c_5). $d(x, y) = 0$ implique $x = y$.

L'ensemble $\mathbb{X}$ muni d'une métrique d s'appelle espace métrique, noté par $(\mathbb{X}, d)$.

Exemple 1.3.1 $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ est une distance sur $\mathbb{R}$, car pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = \frac{|-1||y-x|}{1+|-1||y-x|} = \frac{|y-x|}{1+|y-x|} = d(y, x)$.
3. Pour vérifier la propriété c_4), il est suffisant d'observer que pour tout $|x-y|, |y-z|, |x-z| \geq 0$, tels que $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$, on a

$$\frac{|x-z|}{1+|x-z|} \leq \frac{|x-y| + |y-z|}{1+|x-y| + |y-z|} \leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|} + \frac{|y-z|}{1+|x-y|}.$$

Définition 1.3.3 On dit que deux distances d_1, d_2 sur un ensemble E sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles $\beta \geq \alpha \geq 0$ telles que :

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y), \text{ pour tout } x, y \in E.$$

Exemple 1.3.2 Soit $d_i, i = 1, 2, 3$ une famille de deux distance sur E_i on pose

$$E = E_1 \times E_2 \times E_3$$

Et on définit sur le produit cartésien $E \times E$ deux distances comme suit

$$D_1(x, y) = \sup\{d_1(x, y); d_2(x, y); d_3(x, y)\}$$

$$D_2(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y) + d_3(x, y)$$

$$D_3(x, y) = \sqrt{d_1^2(x, y) + d_2^2(x, y) + d_3^2(x, y)}$$

Pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de E .

On a :

$$\sup_{1 \leq i \leq 3} d_i(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^3 d_i(x_i, y_i) \leq 3 \sup_{1 \leq i \leq 3} d_i(x_i, y_i),$$

donc

$$D_1(x, y) \leq D_2(x, y) \leq 3D_1(x, y).$$

Alors D_1 et D_2 sont équivalentes, telles que $\alpha = 1, \beta = 3$.

On a :

$$D_3^2(x, y) \leq 3D_1^2(x, y) \Rightarrow D_3 \leq \sqrt{3}D_1$$

$$D_1^2(x, y) \leq d_1^2(x, y) + d_2^2(x, y) + d_3^2(x, y) = D_3^2(x, y)$$

$$\Rightarrow D_1 \leq D_3 \leq \sqrt{3}D_1$$

Alors D_1 et D_3 sont équivalentes, telles que $\alpha = 1, \beta = \sqrt{3}$.

1.4 Espaces normes

Définition 1.4.1 Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur $\mathbb{K}$. On appelle semi-norme pour $\mathbb{X}$, une application $p : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout $x, y \in \mathbb{X}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$N_1)$ $p(x) \geq 0$, (propriété de non-négativité).

$N_2)$ $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, (propriété d'homogénéité absolue).

$N_3)$ $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, (propriété de sous-additivité).

Il est possible que $p(x) = 0$ et $x \neq 0$.

L'espace linéaire $\mathbb{X}$ muni d'une semi-norme s'appelle espace semi-norme.

Définition 1.4.2 Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur $\mathbb{K}$. On appelle norme sur $\mathbb{X}$, une application

$\| \cdot \| : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$, telle que $\| \cdot \|$ est une semi-norme pour $\mathbb{X}$ et de plus

$N_4)$ $\|x\| = 0$ implique $x = 0$.

Un espace linéaire $\mathbb{X}$ muni d'une norme s'appelle espace normé, noté par $(\mathbb{X}, \| \cdot \|)$.

Exemple 1.4.1 $E = C([0, 1])$ on pose :

$$1. \|f\|_{\infty} = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

$$2. \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

$$3. \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}.$$

$\| \cdot \|_{\infty}, \| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$ sont des normes définies sur $C[0, 1]$

Définition 1.4.3 On dit que deux normes $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$ sur un ensemble E sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles $\beta \geq \alpha \geq 1$ telles que

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1, \text{ pour tout } x \in E.$$

Définition 1.4.4 (Espace de Banach) Un espace de Banach est un espace linéaire normé complet.

Note : On dit qu'un espace normé $(\mathbb{X}, \| \cdot \|)$ est complet si toute suite de Cauchy de $(\mathbb{X}, \| \cdot \|)$ est convergente dans $(\mathbb{X}, \| \cdot \|)$.

Exemple 1.4.2 L'espace $E = C([-1, 1], \| \cdot \|_{\infty})$ l'espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$ est un espace de Banach.

en effet

Soit $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(E, \| \cdot \|_{\infty})$ c-à-d

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n, m \geq n_0 \quad \|f_n - f_m\|_{\infty} \leq \epsilon \Rightarrow |f_n - f_m| \leq \epsilon$$

mais $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ est un Banach

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{| \cdot |} f(x) \quad |f_n^{(\alpha)} - f_m^{(\alpha)}| \leq \epsilon$$

$$f_n \in E \Rightarrow f \in E$$

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_\infty} f$$

donc $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach

1.5 Espaces de Hilbert

Définition 1.5.1 Soit $\mathbb{X}$ espace linéaire, s'il existe un nombre complexe x, y pour tout couple de vecteurs x et y dans $\mathbb{X}$ qui vérifie les conditions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{X}, \quad \langle x, x \rangle \geq 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{X}, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
3. $\forall x, y \in \mathbb{X}, \quad \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle.$
4. $\forall x, y, z \in \mathbb{X}, \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$
5. $\forall x, y \in \mathbb{X}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle.$

Alors $\langle x, y \rangle$ est dit produit scalaire de x et y , et on note par $\langle x, y \rangle$.

Un espace linéaire muni d'un produit scalaire est appelé un espace **préHilbertien**.

Définition 1.5.2 Un espace de Hilbert est un espace complet par rapport à la norme induite par un produit scalaire. En d'autres mots, un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.

Exemple 1.5.1 $L^2([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, (\int_0^1 f^2(x) dx)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

et

$$\|f\| = \left(\int_0^1 f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$(L^2([0, 1]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert.

Propriétés générales

P1 • Inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tous $x, y \in \mathbb{H}$, on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}. \quad (1.3)$$

Preuve. L'inégalité (1.3) est trivialement satisfaite si $\langle x, y \rangle = 0$.

Nous supposons donc que $\langle x, y \rangle \neq 0$. Alors nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle \frac{x}{\sqrt{\langle x, x \rangle}} - \frac{\langle x, y \rangle y}{|\langle x, y \rangle| \sqrt{\langle y, y \rangle}}, \frac{x}{\sqrt{\langle x, x \rangle}} - \frac{\langle x, y \rangle y}{|\langle x, y \rangle| \sqrt{\langle y, y \rangle}} \right\rangle \\ &\leq 1 - \frac{2|\langle x, y \rangle|}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}} + 1 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1 - \frac{2|\langle x, y \rangle|}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}} + 1 \Rightarrow \frac{2|\langle x, y \rangle|}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}} \leq 2 \\ &\Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}. \end{aligned}$$

Corollaire 1.5.1

$$|\langle x, y \rangle| \leq \frac{1}{2}(\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle). \quad (1.4)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\sqrt{\langle x, x \rangle} - \sqrt{\langle y, y \rangle})^2 = \left(\sqrt{\langle x, x \rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle y, y \rangle}\right)^2 - 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} \\ &\Rightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} \leq \frac{1}{2} \left(\left(\sqrt{\langle x, x \rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle y, y \rangle}\right)^2 \right) \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.3)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \frac{1}{2}(\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle).$$

P_2 • Inégalité de Hölder La stricte concavité de la fonction logarithme est à la base de la démonstration de l'inégalité de Hölder, cette dernière inégalité permettant de montrer que pour tout réel $p \geq 1$ l'application

$$x \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$). Dans ce qui suit on désigne par p et q deux réels strictement positifs tels que

Théorème 1.5.1 (L'inégalité de Hölder) Pour tous vecteurs x, y dans $\mathbb{C}^n$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

L'inégalité de Hölder s'écrit, en notant $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire hermitien canonique de $\mathbb{C}^n$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

et cette inégalité est encore valable pour $p = 1$ et $q = +\infty$. Pour $p = q = 2$ on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

P_3 • Loi du parallélogramme : Pour tout $x, y \in \mathbb{X}$, on a

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (1.5)$$

P_4 • Corollaire

$$\|\lambda x + \mu y\|^2 + \|\lambda x - \mu y\|^2 = 2(|\lambda|^2 \|x\|^2 + |\mu|^2 \|y\|^2). \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

$C[0, 1], \|\cdot\|_\infty$ ne vérifie pas la loi du parallélogramme

Théorème 1.5.2 [5] Soit $\mathbb{X}$ est un espace de Hilbert (i.e. sa norme est induite par un produit scalaire) si et seulement si pour tout $x, y \in \mathbb{X}$, on a

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Le produit scalaire est unique, et on a

- $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2).$
- $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$

Théorème 1.5.3 Soient $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert, $A \subset \mathbb{H}$ un ensemble non vide convexe et fermé et $x_0 \in \mathbb{H} \setminus A$.

Alors, il existe un et seulement un $y_0 \in A$, tel que $\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in A} \|x_0 - y\|$.

Preuve.

a) Montrons que $\|x_0 - y_0\| = d$. Nous avons

$$d \leq \|x_0 - y_0\| \leq \|x_0 - y_n\| + \|y_n - y_0\| < d + \frac{1}{n} + \varepsilon, \text{ si } n > n_0(\varepsilon),$$

d'où

$$\|x_0 - y_0\| = d.$$

b) Il nous reste à montrer l'unicité de y_0 . Soit $z_0 \in A$, tel que $\|x_0 - z_0\| = d$. En utilisant la loi du parallélogramme (1.5), on a

$$\begin{aligned} \|z_0 - y_0\|^2 &= \|(z_0 - x_0) - (y_0 - x_0)\|^2 \\ &= 2\|z_0 - x_0\|^2 + 2\|y_0 - x_0\|^2 - \|z_0 + y_0 - 2x_0\|^2 \\ &= 4d^2 - 4\left\|\frac{z_0 + y_0}{2} - x_0\right\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0. \end{aligned}$$

D'où $z_0 = y_0$.

1.6 Orthogonalité

Définition 1.6.1 Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert.

Deux vecteurs $x, y \in \mathbb{H}$ sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$, on note $x \perp y$.

Remarque 1.6.1 La relation d'orthogonalité possède les propriétés suivante :

1. $0_{\mathbb{H}} \perp x$ pour tout $x \in \mathbb{H}$.
2. $x \perp y \Rightarrow y \perp x$.
3. $x \perp x \Rightarrow x = 0_{\mathbb{H}}$.
4. $x \perp x_n$, $n \in \mathbb{N}$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| \Rightarrow x \perp x_0$.

Définition 1.6.2 Considérons deux ensembles A_1 et A_2 non vides d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$.

Nous disons que A_1 est orthogonal à A_2 , noté par $A_1 \perp A_2$, si pour tout $x \in A_1$ et pour tout $y \in A_2$ on a $x \perp y$, c.à.d. $\langle x, y \rangle = 0$.

Théorème 1.6.1 Si A est un ensemble non vide d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$, alors

$$A^\perp = \{x; x \in \mathbb{H}, \text{ et } x \perp A\}$$

est un sous-espace linéaire fermé de $\mathbb{H}$.

$A^\perp$ s'appelle la complément orthogonal de A .

Preuve.

Observons d'abord que $A^\perp \neq \emptyset$, puis que au moins $0_{\mathbb{H}} \in A^\perp$. Soient $x_1, x_2 \in A^\perp$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ et $y \in A$ alors

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle = 0$$

donc $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A^\perp$ et $A^\perp$ est un sous-espace linéaire de $\mathbb{H}$.

Soit maintenant $x_0 \in \bar{A}^\perp$ alors il existe une suite $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset A^\perp$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$.

Nous avons pour tout $y \in A$

$$\langle x_0, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = 0.$$

Donc $x_0 \in A^\perp$ et $A^\perp$ est un sous-espace linéaire fermé.

Définition 1.6.3 Un ensemble non vide A d'un espace de Hilbert est un système orthogonal si :
pour tout $x, y \in A, x \neq y$, on a $x \perp y$.

Définition 1.6.4 Un ensemble $E = \{e_i; i \in I\}$ d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ est un système orthonormal si :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\langle x, y \rangle = 0 \iff x \perp y.$$

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

Exemple 1.6.1 $\mathbb{C}^n \{(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) / z_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \dots, n\}$

$$\langle (z_1, z_2, z_3, \dots, z_n), (w_1, w_2, w_3, \dots, w_n) \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \overline{w_k}$$

est un produit scalaire

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), e_1 = (1, \dots, 0, 0, \dots, 0), e_n = (0, \dots, 0, 0, \dots, 1)$$

$\{e_i\}_i$ *est un système orthogonale, en effet*

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j \rangle &= \langle (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots), (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \rangle \\ &= \begin{cases} 0 & ; i \neq j. \\ 1 & ; i = j. \end{cases} \end{aligned}$$

Chapitre 2

L'opérateurs linéaires continus

Dans le deuxième chapitre, on présente les définitions et les propriétés générales des opérateurs linéaires continus d'un espace vectoriel normé vers autre espace vectoriel normé. En particulier on met l'accent sur quelques propriétés des opérateurs linéaires continus inversibles d'un espace vectoriel normé vers autre et l'inégalité de l'énergie. On donne quelques exemples des opérateurs linéaires continus inversibles ,la transformation inverse est linéaire mais n'est pas en général continue. La famille des opérateurs linéaires continus d'un espace vectoriel normé vers autre constitue aussi un espace vectoriel normé , qui nous permettra de définir l'opérateur adjoint de cet opérateur linéaire continu qui est aussi linéaire continu et qui ont le même norme. L'ensemble des opérateurs linéaires continus inversibles d'un espace vectoriel normé dans lui-même un espace vectoriel normé. Dans ce deuxième chapitre, nous étudierons les applications linéaires définies sur un espace linéaire sur $\mathbb{K}$ que nous appelons les fonctionnelles linéaires. Après avoir introduit quelques résultats généraux (partie 1), nous nous limitons dans cette partie à l'ensemble $\mathbb{X}'$ des fonctionnelles linéaires continues sur un espace normé $\mathbb{X}$ ou de Hilbert. On appelle $\mathbb{X}'$ l'espace dual topologique de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{X}'$ est lui-même un espace de Banach. Dans la troisième partie de deuxième chapitre on étudiera Les opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert dans autre espace de Hilbert ,on parlera aussi sur les opérateurs adjoints des opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert vers autre espace hilbertien, la composé de deux ou plusieurs opérateurs linéaires continus est aussi opérateur linéaire continu. On parle ainsi sur les opérateurs linéaires continus auto adjoints d'un espace de Hilbert vers autre espace hilbertien et leurs propriétés structurelles.(inverse d'un opérateur linéaire continu)

2.1 Opérateurs linéaires sur un espace normé

Dans ce paragraphe, nous donnons des caractérisations des opérateurs linéaires continus. soient $(\mathbb{X}, \| \cdot \|_{\mathbb{X}})$ et $(\mathbb{Y}, \| \cdot \|_{\mathbb{Y}})$ deux espaces normés sur le même corps $\mathbb{K}$.

Définition 2.1.1 Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux espaces linéaires sur le même corps $\mathbb{K}$.

Une application $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ est additive si :

$$T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$$

pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$.

Une application $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ est homogène si :

$$T(\lambda x) = \lambda Tx.$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{X}$.

Une application $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ est linéaire si elle est additive et homogène.

En d'autres termes, l'application $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ est linéaire si et seulement si

$$T(\lambda x_1 + x_2) = \lambda Tx_1 + Tx_2$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$.

Notons par $\mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ l'ensemble des opérateurs linéaires de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$.

Exemple 2.1.1 1. Soit $\mathbb{X} = L^2([0, 1])$ et

$$T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$$

$$f \rightarrow Tf(x) = \int_0^1 (x-t)f(t) \, dt.$$

En effet

$$\begin{aligned} T(\lambda f_1 + f_2)(x) &= \int_0^1 (x-t)(\lambda f_1(t) + f_2(t)) \, dt \\ &= \lambda \int_0^1 (x-t)f_1(t)dt + \int_0^1 (x-t)f_2(t) \, dt \\ &= \lambda T(f_1)(x) + T(f_2)(x). \end{aligned}$$

2. L'opérateur de **multiplication** :

$$M : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$$

$$f \rightarrow Mf(x) = x \cdot f(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

3. L'opérateur de **Volterra** :

$$V : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$$

$$f \rightarrow Vf(x) = \int_0^x k(x, t)f(t)dt.$$

où $k(x, t)$ est une fonction en x et t (noyau).

Exemple 2.1.2 L'application $T : C_b^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C_b^\infty(\mathbb{R})$

donnée par

$$(Tf)(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

est un opérateur linéaire.

$C_b^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble de fonctions infiniment dérivables et bornées sur $\mathbb{R}$.

Notations :

- On notera $\ker(T)$ le noyau de l'opérateur T ; i.e.

$$\ker(T) = \{x \in \mathbb{X}; Tx = 0\}.$$

Et aussi noté parfois $N(T)$.

On remarque $\ker(T) \subset \mathbb{X}$; $Im(T) \subset \mathbb{Y}$

- $Im(T)$ désignera l'image de $\mathbb{X}$ par T . On le notera aussi $T\mathbb{X}$; i.e.

$$Im(T) = \{Tx; x \in \mathbb{X}\}.$$

Et aussi noté parfois $R(T)$.

Théorème 2.1.1 Soit T un opérateur linéaire $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$. Alors

- i) $T(0) = 0$.
- ii) $T\mathbb{X}$ est un sous-espace linéaire de $\mathbb{Y}$.
- iii) $\ker(T) = \{x \in \mathbb{X}; Tx = 0\}$ est un sous-espace linéaire de $\mathbb{X}$.
- iv) T est une application injective si et seulement si $T(x) = 0$ entraîne $x = 0$, i.e. $\ker(T) = \{0_{\mathbb{X}}\}$.

Preuve.

- i) Nous avons

$$T(0) = T(x + (-x)) = T(x) + T(-x) = T(x) - T(x) = 0.$$

- ii) Soient $y_1, y_2 \in T\mathbb{X}$ tels que $y_1 = T(x_1)$ et $y_2 = T(x_2)$. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$\alpha y_1 + y_2 = \alpha T(x_1) + T(x_2) = T(\alpha x_1 + x_2).$$

Donc $\alpha y_1 + y_2 \in T\mathbb{X}$.

- iii) Soient $x_1, x_2 \in \ker(T)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $T(\alpha x_1 + x_2) = \alpha T(x_1) + T(x_2) = 0 \Rightarrow \alpha x_1 + x_2 \in \ker(T)$.
- iv) Soit T une application linéaire injective. Alors $x \neq 0$ entraîne $T(x) \neq T(0) = 0$, donc $\ker(T) = \{0_{\mathbb{X}}\}$. Supposons maintenant que $\ker(T) = \{0_{\mathbb{X}}\}$. Alors $T(x) = 0$ entraîne $x = 0$, donc T est injectif, parce que si $x_1 \neq x_2$ alors $x_1 - x_2 \notin \ker(T)$, donc $T(x_1 - x_2) \neq 0$, d'où $T(x_1) \neq T(x_2)$.

Définition 2.1.2 Soit $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux espace linéaire et $t : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ un opérateur linéaire, T est inversible sur $T\mathbb{X}$ si et seulement si T est injective.

et $T^{-1} : T\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, $T^{-1}(y) = x \Rightarrow y = T(x)$

Théorème 2.1.2 Soit $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux espaces linéaires sur le même corps $\mathbb{K}$ et $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ un opérateur linéaire. Alors T est inversible sur $T\mathbb{X}$ et $T^{-1} : T\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ est opérateur linéaire si et seulement si T est injectif.

Preuve.

a) Pour tout $y_1, y_2 \in T\mathbb{X}$, il existe un seul $x_1 \in \mathbb{X}$ et un seul $x_2 \in \mathbb{X}$ tel que $y_1 = Tx_1$ et $y_2 = Tx_2$ alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda y_1 + \mu y_2 \in T\mathbb{X}.$$

Donc

$$\begin{aligned} T^{-1}(\lambda y_1 + \mu y_2) &= \lambda x_1 + \mu x_2 \\ &= \lambda T^{-1}y_1 + \mu T^{-1}y_2. \end{aligned}$$

donc T^{-1} est linéaire .

b) Si T^{-1} existe $\Rightarrow T$ est injectif.

T est injectif $\Rightarrow T^{-1}$ existe sur $T\mathbb{X}$

2.1.1 Les opérateurs linéaires bornés

Définition 2.1.3 L'opérateur linéaire $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est borné s'il existe un nombre $M > 0$, tel que

$$\|Tx\|_{\mathbb{Y}} \leq M \|x\|_{\mathbb{X}}. \quad (2.1)$$

Pour tout $x \in \mathbb{X}$.

Exemple 2.1.3 1. $I : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$

est bien borné car :

$$\|Ix\| = \|x\| \leq M \|x\|; \forall M \geq 1.$$

2. L'opérateur de multiplication T défini sur l'espace $C([1, 2])$, alors :

$$\begin{aligned} \|Tf\| &= \sup_{x \in [1, 2]} |Tf(x)| \\ &= \sup_{x \in [1, 2]} |x \cdot f(x)| \\ &\leq 2 \|f\| \quad (M = 2) \quad \forall f \in C([1, 2]). \end{aligned}$$

Définition 2.1.4 L'opérateur linéaire T est continu à $x_0 \in \mathbb{X}$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0, \forall x \in \mathbb{X} \quad \|x - x_0\|_{\mathbb{X}} < \sigma \Rightarrow \|Tx - Tx_0\|_{\mathbb{Y}} < \epsilon. \quad (2.2)$$

Puis que la continuité de T peut être caractérisée par les suites, T est continu à x_0 si pour toute suite $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{X}$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_{\mathbb{X}} = 0.$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - Tx_0\|_{\mathbb{Y}} = 0.$$

en effet

$$\begin{aligned} \|Tx_n - Tx_0\|_{\mathbb{Y}} &\leq \|x_n - x_0\|_{\mathbb{X}} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - Tx_0\|_{\mathbb{Y}} &= 0 \end{aligned}$$

Théorème 2.1.3 Soit $x_0 \in \mathbb{X}$ quelconque, si $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ alors on a :

$$T \text{ est continu en } x_0 \Leftrightarrow T \text{ est continu sur } \mathbb{X}.$$

Preuve.

T est continu en $x_0 \Leftrightarrow \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_{\mathbb{X}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - Tx_0\|_{\mathbb{Y}} = 0 \right\}$. Soit $x \in \mathbb{X}$ quelconque il suffit de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x'_n - x\|_{\mathbb{X}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx'_n - Tx\|_{\mathbb{Y}} = 0.$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x'_n - x\|_{\mathbb{X}} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|(x'_n - x + x_0) - x_0\|_{\mathbb{X}} = 0.$$

On pose $y_n = (x'_n - x + x_0)$ on a T est continu en $x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ty_n - Tx_0\|_{\mathbb{Y}} = 0$, i.e.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x'_n - x + x_0) - Tx_0\|_{\mathbb{Y}} &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx'_n - Tx + Tx_0 - Tx_0\|_{\mathbb{Y}} &= 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx'_n - Tx\|_{\mathbb{Y}} = 0. \end{aligned}$$

Donc T est continu sur $\mathbb{X}$.

Définition 2.1.5 L'opérateur $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ est dite uniformément continu si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0, \forall x, y \in \mathbb{X} \quad \|x - y\|_{\mathbb{X}} < \sigma \Rightarrow \|Tx - Ty\|_{\mathbb{Y}} < \epsilon. \quad (2.3)$$

σ ne dépend pas de ϵ .

Définition 2.1.6 (Application lipschitzienne) Si k est un réel positif, on appelle application lipschitzienne de rapport k , toute opérateurs T vérifiant :

$$\|Tx - Ty\|_{\mathbb{Y}} \leq k \|x - y\|_{\mathbb{X}}.$$

Éventuellement on précise : k -lipschitzienne.

tout application lipschitzienne et borné donc continu .

Exemple 2.1.4 Soit $E \subset (\mathbb{R}_+, |\cdot|)$, on définit l'opérateur T par :

$$T(x) = \frac{x}{1+x}.$$

On a $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)| &= \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right| \\ &= \left| \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)} \right| \\ &= \left| \frac{x + xy - y - yx}{(1+x)(1+y)} \right| \\ &= \frac{|x - y|}{(1+y)(1+x)} \\ &\leq |x - y|. \end{aligned}$$

C'est-à-dire T est lipschitzienne de rapport 1 sur $\mathbb{R}_+$.

On remarque T est non linéaire .

Remarque 2.1.1 Il est clair que, si T est lipschitzienne alors, T est uniformément continu mais le contraire n'est pas toujours juste, par exemple l'opérateur $T :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est définie par $Tx = \sqrt{x}$ est uniformément continu sur $\mathbb{R}_+$, mais elle est non lipschitzienne.

Théorème 2.1.4 $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est continu $\iff T$ est borné .

Preuve.

a) Soit T un opérateur linéaire borné et soit $x_0 \in \mathbb{X}$ quelconque. La relation (2.1) appliquée à $(x - x_0)$

$$\|T(x) - T(x_0)\|_{\mathbb{Y}} = \|T(x - x_0)\|_{\mathbb{Y}} \leq M \|x - x_0\|_{\mathbb{X}}.$$

montre que T est continu à x_0 et donc sur $\mathbb{X}$.

b) Montrons que (2.2) entraîne (2.1) en vérifiant que non (2.1) entraîne non (2.2). Supposons donc qu'il existe des vecteurs $x_n \in \mathbb{X}$, $\|x_n\|_{\mathbb{X}} = 1$ tels que

$$\|Tx_n\|_{\mathbb{Y}} > n \|x_n\|_{\mathbb{X}} = n.$$

La suite $\{y_n = \frac{x_n}{\sqrt{n}}; n \in \mathbb{N}^*\}$ converge vers 0 .

$$\|Ty_n\| = \|T(\frac{x_n}{\sqrt{n}})\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \|Tx_n\| \geq \frac{1}{\sqrt{n}} n \rightarrow \infty \nrightarrow 0 = T(0)$$

$\implies T$ n'est pas continu

$$T(0) = 0, y_n \rightarrow 0, Ty_n \nrightarrow T(0) = 0$$

Exemple 2.1.5 Soit $T \in \mathbb{L}_a(C_b^\infty(\mathbb{R}), C_b^\infty(\mathbb{R}))$ défini par

$$Tf(t) = \frac{df(t)}{dt}.$$

Pour tout $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$. Alors nous avons pour $f(t) = \sin nt$, $\|f\|_\infty = 1$ et $\|Tf\|_\infty = \|n \cos nt\|_\infty = n$,

• $T(\lambda f + g)' = (\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$ donc T linéaire

• $f_n(t) = \sin(nt)$

$\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}}(\sin(nt)) = 1 \Rightarrow \{f_n\}_n$ est borné

• $T(f_n) = (\sin(nt))' = n \cos(nt)$.

$\|T(f_n)\|_\infty = n \rightarrow \infty$

$\Rightarrow T$ est non borné donc non continu

Notons par $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subset \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$. Observons d'abord que $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \neq \emptyset$, puis que au moins l'opérateur nul $0 \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Nous donnons maintenant des caractéristiques différentes pour un opérateur linéaire continu.

Théorème 2.1.5 Soit $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Les énoncés suivants sont équivalents

1) T est continu à 0.

2) T est continu sur $\mathbb{X}$.

3) T est uniformément continu sur $\mathbb{X}$.

4) $\exists M > 0 : \|Tx\|_\mathbb{Y} \leq M \|x\|_\mathbb{X}$, pour tout $x \in \mathbb{X}$.

5) $\exists M > 0 : \|Tx\|_\mathbb{Y} \leq M$, pour tout $x \in B_F(0, 1)$, i.e. $\{\forall x \in \mathbb{X}; \|x\|_\mathbb{X} \leq 1\}$.

Preuve.

5) $\Rightarrow$ 4)

$x = 0 : 4)$ est vérifié

$x \neq 0 : \frac{x}{\|x\|_\mathbb{X}} \in B_F(0, 1)$ donc

$$\begin{aligned} & \|T(\frac{x}{\|x\|_\mathbb{X}})\|_\mathbb{Y} \leq M \\ \Rightarrow & \frac{1}{\|x\|_\mathbb{X}} \|Tx\|_\mathbb{Y} \leq M \\ \Rightarrow & \|Tx\|_\mathbb{Y} \leq M \|x\|_\mathbb{X} \quad \forall x \in \mathbb{X} - \{0_\mathbb{X}\}. \end{aligned}$$

4) $\Rightarrow$ 3)

T est uniformément continu $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \lambda > 0$ tel que $\forall x, x' \in \mathbb{X} \quad \|x - x'\|_\mathbb{X} < \lambda \Rightarrow \|Tx - Tx'\|_\mathbb{Y} < \epsilon$.

Soit $\epsilon > 0$, on pose $\lambda = \frac{\epsilon}{M}$ on a

$$\begin{aligned} \|Tx - Tx'\|_\mathbb{Y} &= \|T(x - x')\|_\mathbb{Y} \\ &\leq M \|x - x'\|_\mathbb{X}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \|x - x'\|_{\mathbb{X}} < \frac{\epsilon}{M} \\
\Rightarrow & M \|x - x'\|_{\mathbb{X}} < \epsilon \\
\Rightarrow & \|Tx - Tx'\|_{\mathbb{Y}} \leq M \|x - x'\|_{\mathbb{X}} \\
& < M \left(\frac{\epsilon}{M}\right) = \epsilon \\
\Rightarrow & \|Tx - Tx'\|_{\mathbb{Y}} < \epsilon.
\end{aligned}$$

3) $\Rightarrow$ 2) et 2) $\Rightarrow$ 1) évident par définition.

1) $\Rightarrow$ 5)

$\forall \epsilon > 0, \exists \lambda > 0$ tel que $\|x\|_{\mathbb{X}} < \lambda \Rightarrow \|Tx\|_{\mathbb{Y}} < \epsilon$. Pour $\epsilon = 1$ on a

$$\exists \lambda_1 > 0 \quad \|x\|_{\mathbb{X}} < \lambda_1 \Rightarrow \|Tx\|_{\mathbb{Y}} < 1.$$

Soit $x \in B_F(0, 1) \Rightarrow \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\lambda_1}{2} x \right\|_{\mathbb{X}} &= \frac{\lambda_1}{2} \|x\|_{\mathbb{X}} \leq \frac{\lambda_1}{2} < \lambda_1 \\
\Rightarrow & \left\| T\left(\frac{\lambda_1}{2} x\right) \right\|_{\mathbb{Y}} \leq 1 \\
\Rightarrow & \frac{\lambda_1}{2} \|Tx\|_{\mathbb{Y}} \leq 1 \\
\Rightarrow & \|Tx\|_{\mathbb{Y}} \leq \frac{2}{\lambda_1} = M, \quad \forall x \in B_F(0, 1).
\end{aligned}$$

2.1.2 L'espace norme $(\mathbb{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y}), \|\cdot\|)$

Dans ce qui suit, $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ signifie l'ensemble des opérateurs linéaires continus de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$ qui est un sous-espace linéaire de l'espace linéaire $\mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Donc $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ peut être regardé lui-même comme un espace linéaire sur le corps $\mathbb{K}$. Introduisons maintenant une norme pour $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Théorème 2.1.6 $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{x \neq 0, x \in \mathbb{X}} \left\{ \frac{\|Tx\|_{\mathbb{Y}}}{\|x\|_{\mathbb{X}}} \right\} \\
&= \sup \{ \|Tx\|_{\mathbb{Y}}, \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1 \} \\
&= \inf \{ M > 0, \|Tx\|_{\mathbb{Y}} \leq M \|x\|_{\mathbb{X}} \}
\end{aligned}$$

est une norme pour $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Preuve.

Pour tout $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\|T\| \geq 0$ et $\|T\|$ est finie. Si $\|T\| = 0$, alors $Tx = 0$ pour tout $x \in \mathbb{X}$. En effet pour $x \neq 0$

$$\|Tx\|_{\mathbb{Y}} = \|x\|_{\mathbb{X}} \left\| T \frac{x}{\|x\|_{\mathbb{X}}} \right\|_{\mathbb{Y}} = 0.$$

Donc $Tx = 0$ sur $\mathbb{X}$ et $T = 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda T\| = |\lambda| \|T\|$ parce que

$$\begin{aligned}\|\lambda T\| &= \sup\{\|(\lambda T)x\|_{\mathbb{Y}}; \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1\} \\ &= \sup\{|\lambda| \|Tx\|_{\mathbb{Y}}; \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1\} \\ &= |\lambda| \|T\|.\end{aligned}$$

En fin, pour tout $x \in \mathbb{X}$, tel que $\|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1$, nous avons

$$\begin{aligned}\|(T_1 + T_2)x\|_{\mathbb{Y}} &= \|T_1x + T_2x\|_{\mathbb{Y}} \leq \|T_1x\|_{\mathbb{Y}} + \|T_2x\|_{\mathbb{Y}} \\ &\leq \|T_1\| + \|T_2\|.\end{aligned}$$

Corollaire 2.1.1 *L'application $\|\cdot\|: \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_{\mathbb{Y}}; x \in \mathbb{X} \text{ et } \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1\} \quad (2.4)$$

est une norme pour $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Théorème 2.1.7 *Soient $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ un espace normé et $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ un espace de Banach. Alors $(\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.*

Preuve.

On sait déjà que $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est un espace normé. Il nous reste à montrer que $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est complet. Soit $\{T_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ une suite de Cauchy. Alors $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ si $n, m > n_0(\varepsilon)$. Pour $x \in \mathbb{X}$ fixé l'inégalité

$$\begin{aligned}\|Tx - T_nx\|_{\mathbb{Y}} &\leq \|T - T_n\| \cdot \|x\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \varepsilon \|x\|_{\mathbb{X}}\end{aligned}$$

$$\sup_{\|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1} \|Tx - T_nx\|_{\mathbb{Y}} \leq \varepsilon$$

Montre que $\{T_nx; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Y}$ est une suite de Cauchy. Mais $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ est un espace de Banach, donc T_nx est convergente, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_nx$ existe pour tout $x \in \mathbb{X}$. Définissons l'application $T: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ par $Tx = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_nx$, pour tout $x \in \mathbb{X}$. Montrons que $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

D'abord T est linéaire parce que

$$\begin{aligned}T(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(\alpha x + \beta y) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha T_nx + \beta T_ny) \\ &= \alpha Tx + \beta Ty\end{aligned}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \mathbb{X}$.

D'autre part, nous avons

$$\|T_nx\|_{\mathbb{Y}} \leq M \|x\|_{\mathbb{X}}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{X}.$$

Ce qui entraîne, pour $n \rightarrow \infty$, que

$$\|Tx\|_{\mathbb{Y}} \leq M \|x\|_{\mathbb{X}}, \text{ et donc } T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}).$$

Enfin, montrons que $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \|T_m x - T_n x\|_{\mathbb{Y}} &\leq \|T_m - T_n\| \cdot \|x\|_{\mathbb{X}} \\ &< \varepsilon \|x\|_{\mathbb{X}}. \end{aligned}$$

Si $n, m > n_0(\varepsilon)$ et pour tout $x \in \mathbb{X}$.

En fixant n , nous obtenons pour $m \rightarrow \infty$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|Tx - T_n x\|_{\mathbb{Y}} &\leq \|T - T_n\| \cdot \|x\|_{\mathbb{X}} \\ &< \varepsilon \|x\|_{\mathbb{X}}, \text{ si } n > n_0(\varepsilon), \end{aligned}$$

et donc

$$\|T - T_n\| < \varepsilon, \text{ si } n > n_0(\varepsilon), \text{ c-à-d } T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T.$$

Corollaire 2.1.2 *Soit $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ un espace normé. Alors l'espace dual topologique $\mathbb{X}'$ est un espace de Banach. En effet $\mathbb{X}' = \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$ est un espace de Banach.*

Théorème 2.1.8 *Soit $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. L'opérateur inverse T^{-1} existe et est continu sur $T\mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$ si et seulement s'il existe un nombre $k > 0$, tel que*

$$\|Tx\|_{\mathbb{Y}} \geq k \|x\|_{\mathbb{X}}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{X}. \quad (2.5)$$

Preuve.

Si $\mathbb{X} = \{0_{\mathbb{X}}\}$ il n'y a rien à dire. Supposons donc que $\mathbb{X} \neq \{0_{\mathbb{X}}\}$

1. $\alpha x_1 + x_2 = T^{-1}(\alpha y_1 + y_2) = \alpha T^{-1}(y_1) + T^{-1}(y_2)$
2. Soit $T^{-1} \in \mathbb{L}(T\mathbb{X}, \mathbb{X})$. Évidemment $T^{-1} \neq 0$.

$$\forall y \in T\mathbb{X}, \|T^{-1}y\|_{\mathbb{X}} \leq \|T^{-1}\| \cdot \|y\|_{\mathbb{Y}}$$

et donc, en posant $y = Tx$, nous obtenons

$$\|x\|_{\mathbb{X}} \leq \|T^{-1}\| \cdot \|Tx\|_{\mathbb{Y}},$$

parce que $\|T^{-1}\| > 0$, la relation (2.5) est montrée avec $k = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$.

3. Supposons maintenant qu'on a (2.5). Alors

$$\ker(T) = \{x; Tx = 0\} = \{0_{\mathbb{X}}\},$$

donc T^{-1} existe sur $T\mathbb{X}$ et T^{-1} est linéaire.

Montrons que T^{-1} est continu

$$\forall x \in \mathbb{X} \quad k \|x\|_{\mathbb{X}} \leq \|Tx\|_{\mathbb{Y}}.$$

Soit $x = T^{-1}y$, i.e. $y = Tx$, alors

$$k \|T^{-1}y\|_{\mathbb{X}} \leq \|y\|_{\mathbb{Y}}$$

entraîne que

$$\|T^{-1}y\|_{\mathbb{X}} \leq \frac{1}{k} \|y\|_{\mathbb{Y}}, \quad \forall y \in T\mathbb{X}, \text{ et } T^{-1} \text{ est continu.}$$

Exemple 2.1.6 Soit T l'opérateur définie par : $C([-1, 1]) \rightarrow \mathbb{K} \quad tq \quad Tx = \int_{-1}^1 x(t)dt$
avec $\|x\|_{\infty} = \max_{-1 \leq t \leq 1} |x(t)|$.

Montrons que $T \in (C([-1, 1]))'$.

En effet

$$\begin{aligned} \forall x, y \in C([-1, 1]) \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{K} \quad T(\lambda x + \beta y) &= \int_{-1}^1 (\lambda x + \beta y)(t)dt \\ &= \int_{-1}^1 (\lambda x(t) + \beta y(t)) dt \\ &= \int_{-1}^1 \lambda x(t)dt + \int_{-1}^1 \beta y(t)dt \\ &= \lambda \int_{-1}^1 x(t)dt + \beta \int_{-1}^1 y(t)dt \\ &= \lambda Tx + \beta Ty. \end{aligned}$$

Donc T est linéaire.

T est bornée. En effet : $\forall x \in C([-1, 1])$ on a

$$\begin{aligned} |Tx| &= \left| \int_{-1}^1 x(t)dt \right| \\ &\leq \int_{-1}^1 |x(t)| dt \\ &\leq \max_{-1 \leq t \leq 1} |x(t)| \int_{-1}^1 dt \\ &\leq (1 - (-1)) \|x\|_{\infty} \\ &\leq 2 \|x\|_{\infty}. \\ \Rightarrow \frac{|Tx|}{\|x\|_{\infty}} &\leq 2, x \neq 0. \end{aligned}$$

Donc $\|T\|_{(C([-1, 1]))'} \leq 2$.

Soit $x_0 \in C([-1, 1])$ tel que $x_0(t) = 1, \forall t \in [-1, 1]$. Donc $\|x_0\|_{\infty} = 1$.

En plus :

$$Tx_0 = \int_{-1}^1 x_0(t)dt = \int_{-1}^1 dt = 2$$

$$\Rightarrow \frac{|Tx_0|}{\|x_0\|_\infty} = 2 \leq \sup_{x \neq 0} \frac{|Tx|}{\|x\|_\infty} = \|T\|_{(C([-1,1]))'}.$$

Conclusion : $\|T\|_{(C([-1,1]))'} = 2$.

Théorème 2.1.9 (Hahn-Banach, forme analytique) [2] Soit E un espace linéaire sur $\mathbb{R}$ et $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle vérifiant

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall x \in E \text{ et } \forall \lambda > 0. \quad (2.6)$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E. \quad (2.7)$$

Soit d'autre part, $G \subset E$ un sous-espace linéaire et soit $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle linéaire tel que

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G. \quad (2.8)$$

Alors il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g , i.e.

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in G$$

et telle que

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E. \quad (2.9)$$

Preuve. Pour la démonstration voir [2], page 1.

Corollaire 2.1.3 Soit G un sous-espace linéaire de E et soit $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire et continu. Alors il existe $f \in E'$ qui prolonge g et tel que

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}.$$

Preuve. Appliquer le théorème (2.1.9) avec $p(x) = \|g\|_{G'} \cdot \|x\|_E$.

Corollaire 2.1.4 Pour tout $x_0 \in E$ il existe $f_0 \in E'$ tel que

$$\|f_0\|_{E'} = \|x_0\|_E, \quad \text{et } \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|_E^2.$$

Preuve. Appliquer le corollaire (2.1.3) avec $G = \mathbb{R}x_0$, et $g(tx_0) = t \|x_0\|_E^2$ de sorte que

$$\|g\|_{G'} = \|x_0\|_E.$$

Corollaire 2.1.5 Pour tout $x \in E$ on a

$$\|x\|_E = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |\langle f, x \rangle| = \max_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |\langle f, x \rangle|.$$

Preuve. Supposons que $x \neq 0$. Il est clair que

$$\sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |\langle f, x \rangle| \leq \|x\|_E.$$

D'autre part (corollaire (2.1.4)) on sait qu'il existe $f_0 \in E'$ tel que $\|f_0\|_{E'} = \|x\|_E$ et $\langle f_0, x \rangle = \|x\|_E^2$.

On pose $f_1 = \|x\|_E^{-1} f_0$ de sorte que $\|f_1\|_{E'} = 1$ et $\langle f_1, x \rangle = \|x\|_E$.

Théorème 2.1.10 (Banach-Steinhaus)[2] Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continus de E dans F . On suppose que

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty, \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathbb{L}(E, F)} < \infty.$$

Autrement dit, il existe une constante c telle que

$$\|T_i x\| \leq c \|x\|, \forall x \in E, \forall i \in I.$$

Preuve. Pour la démonstration voir, [2], page 17.

Théorème 2.1.11 (Arzela-Ascoli)[12] Soit $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ un espace norme compact, $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ un espace norme complet. Une partie A de $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est relativement compacte si et seulement si :

1. A est équicontinu, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{X}, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \forall f \in A, \forall y \in \mathbb{X} \quad \|x - y\|_{\mathbb{X}} < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{Y}} < \epsilon.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{X}$, l'ensemble $A(x) = \{f(x); f \in A\}$ est relativement compact, (i.e. A est uniformément borné).

Preuve. Pour la démonstration voir, [12], page 346.

2.1.3 Opérateur régulier

Définition 2.1.7 Soient $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Un opérateur $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$ est régulier, si

a) $T\mathbb{X} = \mathbb{X}$.

b) T^{-1} existe sur $\mathbb{X}$, et $T^{-1} \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$.

L'ensemble d'opérateurs réguliers sur $\mathbb{X}$ est noté par $\mathbb{L}_r(\mathbb{X})$.

Exemple 2.1.7 Soit $\mathbb{X} = l^2(\mathbb{C})$, et considérons l'opérateur de déplacement $T_s \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$ défini par

$$T_s \zeta = T_s((\zeta_1, \zeta_2, \dots)) = (0, \zeta_1, \zeta_2, \dots).$$

Alors T_s est injective et $T_s^{-1} \in \mathbb{L}(T_s \mathbb{X})$, mais pas dans $\mathbb{L}(\mathbb{X})$, donc T_s n'est pas régulière.

Exemple 2.1.8 Considérons $(\mathbb{X} = C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, et $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$ défini par

$$T(f)(t) = tf(t), \quad f \in \mathbb{X}.$$

Alors $T \in \mathbb{L}_r(\mathbb{X})$, si et seulement si $0 \notin [a, b]$.

Théorème 2.1.12 Soient $T_1, T_2 \in \mathbb{L}_r(\mathbb{X})$ alors $T_1 \circ T_2 \in \mathbb{L}_r(\mathbb{X})$, et $\lambda T_1 \in \mathbb{L}_r(\mathbb{X})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Preuve. Montrons d'abord que $T_1 \circ T_2$ admet une inverse sur $\mathbb{X}$, et que

$$(T_1 \circ T_2)^{-1} = T_2^{-1} \circ T_1^{-1}.$$

En effet

$$(T_1 \circ T_2)\mathbb{X} = T_1\mathbb{X} = \mathbb{X}$$

et

$$(T_1 \circ T_2) \circ (T_2^{-1} \circ T_1^{-1}) = (T_2^{-1} \circ T_1^{-1}) \circ (T_1 \circ T_2) = I_{\mathbb{X}}.$$

Puis que l'élément inverse, s'il existe, est unique

$$(T_1 \circ T_2)^{-1} = T_2^{-1} \circ T_1^{-1}.$$

D'autre part

$$\|(T_1 \circ T_2)^{-1}\| = \|T_2^{-1} \circ T_1^{-1}\| \leq \|T_2^{-1}\| \cdot \|T_1^{-1}\| < \infty.$$

Ce qui montre que $T_1 \circ T_2 \in \mathbb{L}_r(\mathbb{X})$. Si $\lambda \neq 0$, $(\lambda T_1)^{-1} = 1/\lambda T_1^{-1}$ et

$$\|(\lambda T_1)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|} \|T_1^{-1}\| < \infty.$$

Donc $\lambda T_1 \in \mathbb{L}_r(\mathbb{X})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

2.1.4 L'algèbre de Banach $\mathbb{L}(\mathbb{X})$

Si $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, alors $\mathbb{L}(\mathbb{X}) = \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ muni de la norme introduite dans (2.4) est aussi un espace de Banach. De plus $(\mathbb{L}(\mathbb{X}), \|\cdot\|)$ est une algèbre linéaire avec identité.

Définition 2.1.8 Une algèbre linéaire $\mathbb{X}$ munie d'une norme s'appelle une algèbre normée si on a pour tout $x, y \in \mathbb{X}$

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \quad (2.10)$$

Remarque 2.1.2 La condition (2.10) assure la continuité du produit de deux vecteurs dans une algèbre linéaire. En effet, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x_0\| = 0$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y_0\| = 0$

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - x_0 y_0\| &= \|x_n y_n - x_0 y_n + x_0 y_n - x_0 y_0\| \\ &\leq \|x_n - x_0\| \cdot \|y_n\| + \|x_0\| \cdot \|y_n - y_0\| \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Définition 2.1.9 *Un algèbre de Banach est une algèbre normée qui est complète par rapport à la norme, i.e. Un espace de Banach.*

Théorème 2.1.13 *Soit $(\mathbb{X}, \| \cdot \|)$ un espace de Banach. Alors $\mathbb{L}(\mathbb{X})$ est un algèbre de Banach .*

Preuve. Nous savons déjà que $\mathbb{X}$ est un espace de Banach et que $\mathbb{X}$ est une algèbre linéaire avec identité. Il nous reste à montrer que pour $T_1, T_2 \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$ on a

$$\| T_1 \circ T_2 \| \leq \| T_1 \| \cdot \| T_2 \| .$$

Soient donc $T_1, T_2 \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$. Alors

$$\begin{aligned} \| (T_1 \circ T_2)x \| &= \| T_1(T_2x) \| \\ &\leq \| T_1 \| \cdot \| T_2x \| \\ &\leq \| T_1 \| \cdot \| T_2 \| \cdot \| x \| \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{X}$ donc $T_1 \circ T_2 \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$, et $\| T_1 \circ T_2 \| \leq \| T_1 \| \cdot \| T_2 \|$.

2.1.5 Convergence dans $(\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), \| \cdot \|)$

Définition 2.1.10 *Soient $\{T_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.*

a) *La suite $\{T_n; n \in \mathbb{N}\}$ converge en norme, ou uniformément vers T si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| T_n - T \| = 0,$$

et nous écrivons $T_n \xrightarrow{u} T$.

b) *La suite $\{T_n; n \in \mathbb{N}\}$ converge ponctuellement vers T si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| T_n x - T x \|_{\mathbb{Y}} = 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{X}.$$

et nous écrivons $T_n \xrightarrow{s} T$.

c) *La suite $\{T_n; n \in \mathbb{N}\}$ converge faiblement vers T si*

$$x'(T_n x) \rightarrow x'(T x),$$

pour tout $x' \in \mathbb{Y}'$ et pour tout $x \in \mathbb{X}$, et nous écrivons $T_n \xrightarrow{w} T$.

Exemple 2.1.9 *Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{L}(l^2(\mathbb{C}))$ défini par :*

$$T_n(x_1, x_2, \dots) = \left(\frac{1}{n}x_1, \frac{1}{n}x_2, \dots \right), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

On a :

$$\begin{aligned} \| T_n \| &= \sup_{\|x\|_{l^2} \leq 1} \| T_n x \|_{l^2} \\ &= \sup_{\|x\|_{l^2} \leq 1} \left\| \left(\frac{1}{n}x_1, \frac{1}{n}x_2, \dots \right) \right\|_{l^2} \\ &= \frac{1}{n} \sup_{\|x\|_{l^2} \leq 1} \| (x_1, x_2, \dots) \|_{l^2} \\ &= \frac{1}{n} \sup_{\|x\|_{l^2} \leq 1} \| x \|_{l^2} \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \text{ prend } n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| = 0$ c'est-à-dire $T_n \xrightarrow{u} 0$.

Exemple 2.1.10 Considérons la suite des opérateurs suivante :

$$\begin{aligned} T_n : \mathbb{R} &\longrightarrow l^2(\mathbb{C}) \\ s &\longmapsto se_n \end{aligned}$$

tel que $e_n = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{\text{rang } n}, \dots)$ on va montrer $x'(T_n s) \longrightarrow 0$ prend $n \longrightarrow \infty$, $\forall x' \in (l^2(\mathbb{C}))' \forall s \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} x'(T_n x) &= x'(se_n) \\ &= sx'(e_n) \\ &= sx'(0, 0, \dots, \underbrace{1}_{\text{rang } n}, \dots). \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} x'(T_n s) = 0 \Rightarrow T_n \xrightarrow{w} 0$.

Théorème 2.1.14 a) $T_n \xrightarrow{u} T$ entraîne que $T_n \xrightarrow{s} T$.

b) $T_n \xrightarrow{s} T$ entraîne que $T_n \xrightarrow{w} T$.

Preuve.

a) Nous avons pour tout $x \in \mathbb{X}$

$$\|T_n x - Tx\|_{\mathbb{Y}} = \|(T_n - T)x\|_{\mathbb{Y}} \leq \|T_n - T\| \cdot \|x\|_{\mathbb{X}} \rightarrow 0, \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

b) Nous avons pour tout $x' \in \mathbb{Y}'$, et pour tout $x \in \mathbb{X}$ fixé

$$\begin{aligned} |x'(T_n x) - x'(Tx)| &= |x'((T_n - T)x)| \\ &\leq \|x'\| \cdot \|T_n x - Tx\|_{\mathbb{Y}} \rightarrow 0, \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Remarque 2.1.3 $T_n \xrightarrow{s} T$ n'entraîne pas $T_n \xrightarrow{u} T$. Considérons $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = l^2$, et soit $T_n \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ la projection orthogonale de $\mathbb{X}$ sur $\langle e_{n+1}, e_{n+2}, \dots \rangle$, i.e.

$$T_n((\zeta_1, \zeta_2, \dots)) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, \zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}, \dots).$$

Alors nous avons pour tout $x \in \mathbb{X}$,

$$\|(T_n - 0)x\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\zeta_k|^2 \rightarrow 0, \text{ si } n \rightarrow \infty,$$

et $T_n \xrightarrow{s} T = 0$. Mais d'autre part,

$$\|T_n\| \geq \|T_n e_{n+1}\|_2 = 1 \not\rightarrow 0$$

c-à-d. $T_n \not\xrightarrow{u} T = 0$.

Remarque 2.1.4 $T_n \xrightarrow{w} T$ n'entraîne pas $T_n \xrightarrow{s} T$.

Remarque 2.1.5 Rappelons qu'une suite $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments d'un espace normé $(\mathbb{X}, \| \cdot \|)$ converge en normé vers un élément $x \in \mathbb{X}$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

De plus la suite $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ converge faiblement vers x si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx \quad \forall T \in \mathbb{X}'.$$

comme dans les cas précédents la convergence en norme implique la convergence faible mais pas inversement.

2.1.6 Opérateur compact

Soient $(\mathbb{X}, \| \cdot \|_{\mathbb{X}})$ un espace normé et $(\mathbb{Y}, \| \cdot \|_{\mathbb{Y}})$ un espace de Banach.

Définition 2.1.11 Un opérateur linéaire $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est compact ou complètement continu si l'image de chaque ensemble borné de $\mathbb{X}$ est relativement compact dans $\mathbb{Y}$.

Notons par $\mathbb{L}_c(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subset \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ l'ensemble des opérateurs linéaires compacts de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$.

Remarque 2.1.6 Si $T \in \mathbb{L}_c(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ alors $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ i.e. Un opérateur linéaire compact est continu.

Exemple 2.1.11 On définit l'opérateur T comme suit $T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ tq

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, t)f(t)dt$$

où $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ est continu.

On montre :

- 1) T est un opérateur linéaire compact.
- 2) Dans le cas $K(x, t) = e^{x+t}$ détermine la norme de T .

Solution :

1) La boule unité dans $C([0, 1])$ est $B_F(0, 1) = \{f \in C([0, 1]); \|f\|_{\infty} \leq 1\}$.

Pour montrer que $TB_F(0, 1)$ est relativement compact dans $C([0, 1])$ on, utilise le théorème d'Arzela-Ascoli (2.1.11).

i) $TB_F(0, 1)$ est uniformément borné : En effet $\forall f \in B_F(0, 1)$ on a

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &= \left| \int_0^1 K(x, t)f(t)dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |K(x, t)| |f(t)| dt \\ &\leq \|f\|_{\infty} \int_0^1 |K(x, t)| dt \\ &\leq \int_0^1 |K(x, t)| dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup_{f \in B_F(0,1)} \|Tf(x)\| \leq \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 \|K(x,t)\| dt.$$

On pose $M = \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 \|K(x,t)\| dt$ on trouve $\|Tf\| \leq M$. D'où $TB_F(0,1)$ est uniformément borné.

ii) $TB_F(0,1)$ est équicontinu : En effet $\forall f \in B_F(0,1)$ et pour tous $x, y \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned} \|Tf(y) - Tf(x)\| &= \left\| \int_0^1 (K(y,t) - K(x,t))f(t)dt \right\| \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^1 \|K(y,t) - K(x,t)\| dt \\ &\leq \int_0^1 \|K(y,t) - K(x,t)\| dt \\ &< \int_0^1 \epsilon dt = \epsilon. \end{aligned}$$

Donc $\exists \delta = \epsilon$ tel que $\|y - x\| < \delta$, d'où $TB_F(0,1)$ est équicontinu.

2) Déterminons la norme de T on a

$$\begin{aligned} \|Tf(x)\| &= \left\| \int_0^1 e^{x+t}f(t)dt \right\| \\ &= e^x \left\| \int_0^1 e^t f(t)dt \right\| \\ &\leq e^x \|f\|_\infty \int_0^1 e^t dt \\ &\leq e(e-1) \|f\|_\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|Tf\|_\infty \leq e(e-1) \|f\|_\infty$. Donc $\|T\| \leq e(e-1)$.

Maintenant, on montre $\|T\| \geq e(e-1)$, on prend $g(x) = 1 \forall x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} Tg(x) &= \int_0^1 e^{x+t} dt \\ &= e^x \int_0^1 e^t dt. \end{aligned}$$

Donc $\|T\| \geq \|Tg\|_\infty = e(e-1)$, alors

$$\|T\| = e(e-1).$$

2.1.7 Théorème du graphe fermé

Définition 2.1.12 Soient $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux espaces linéaires sur le même corps $\mathbb{K}$, et $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Alors le graphe de l'opérateur linéaire T est l'ensemble

$$G(T) = \{(x, Tx); x \in \mathbb{X}\} \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}.$$

Définition 2.1.13 Soient $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ et $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ deux espaces normés, et $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Alors T est opérateur linéaire avec un graphe fermé si pour tout $x_0 \in \mathbb{X}$;

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_{\mathbb{X}} = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - y_0\|_{\mathbb{Y}} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow y_0 = Tx_0.$$

Observons que $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est un graphe fermé si et seulement si son graphe $G(T) = \{(x, Tx); x \in \mathbb{X}\}$ est un ensemble ferme dans $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Théorème 2.1.15 [5] Soient $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux espaces de Banach, et $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Alors $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ si et seulement si T est un opérateur avec un graphe ferme.

Preuve. Pour la démonstration voir, [5], page 380.

2.2 Fonctionnelles linéaires continus

2.2.1 Fonctionnelles linéaires sur un espace linéaire

Après avoir donné quelques exemples de fonctionnelles linéaires, nous montrons qu'une fonctionnelle linéaire est caractérisée par son noyau.

Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur le corps $\mathbb{K}$.

Définition 2.2.1 [5] Une application $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K}$ s'appelle une fonctionnelle.

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (i.e. $\mathbb{X}$ est un espace linéaire complexe), on considère des fonctionnelles à valeurs réelles, i.e. des fonctionnelles réelles. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (i.e. $\mathbb{X}$ est un espace linéaire réel), on considère seulement des fonctionnelles réelles.

Définition 2.2.2 Une fonctionnelle réelle f , définie sur un espace linéaire réel ou complexe $\mathbb{X}$, s'appelle sous-additive si

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y), \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{X} \quad (2.11)$$

La fonctionnelle f s'appelle positive si

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{X} \text{ et pour tout nombre } \alpha \geq 0. \quad (2.12)$$

Une fonctionnelle sous-additive et positive-homogène s'appelle fonctionnelle sous-linéaire ou encore fonctionnelle convexe.

Remarque 2.2.1 Une fonctionnelle sous-linéaire f sur l'espace linéaire $\mathbb{X}$ a les propriétés suivantes :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad -f(-x) \leq f(x).$$

En effet, si on prend dans (2.11), $\alpha = 0$, on obtient $f(0) = 0$. De plus,

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) \leq f(x) + f(-x)$$

Exemple 2.2.1 Soit $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ un espace normé. Alors la norme $\|\cdot\|$ est une fonctionnelle convexe sur $\mathbb{X}$.

Exemple 2.2.2 Considérons l'espace linéaire réel ℓ_∞

L'application $f : \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\xi_n|, \quad \text{où } x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in \ell_\infty,$$

est une fonctionnelle convexe sur ℓ_∞ . En effet ,

Soit

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots), y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$$

alors

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\xi_n + \eta_n| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|\xi_n| + |\eta_n|) \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\xi_n| + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\eta_n| \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

De plus ,

$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\alpha \xi_n| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\alpha| |\xi_n| \\ &= |\alpha| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\xi_n| = \alpha f(x), \text{ pour tout } \alpha \geq 0. \end{aligned}$$

Définition 2.2.3 Une fonctionnelle $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K}$ est homogène si

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{K} \text{ et } x \in \mathbb{X}.$$

Une fonctionnelle linéaire est une application $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K}$ additive et homogène , en d'autres mots :

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{X}$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Nous allons noter l'ensemble de fonctionnelles linéaires sur $\mathbb{X}$ par $L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ et ses éléments ,les fonctionnelles linéaires , par $x', y', \dots$. Remarquons que $L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ n'est pas vide parce que $x'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{X}$, notée par $x' = 0'$, est une fonctionnelle linéaire .

Exemple 2.2.3 Considérons l'ensemble de suite convergent c . Alors pour $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in c$,

$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi_0$ et $\{\alpha_k \in \mathbb{C}; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| < \infty$, l'application

$$x'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \xi_k$$

est une fonctionnelle linéaire.

De plus , $x'(f) = f(\frac{1}{2})$ est une fonctionnelle linéaire .

Exemple 2.2.4 Soit $(\mathbb{X}, M)$ un espace mesurable et μ une mesure complexe . L'application $x' : L^1(d\mu) \rightarrow K$ définie par

$$x'(f) = \int_{\mathbb{X}} f d\mu, \text{ pour tout } f \in L^1(d\mu)$$

est une fonctionnelle linéaire .

Théorème 2.2.1 Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur le corps $\mathbb{K}$. Alors l'ensemble $L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ est un espace linéaire sur $\mathbb{K}$, par rapport aux opérations habituelles d'addition et de multiplication par un scalaire des application.

Démonstration.

Soit $x'_1, x'_2 \in L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$. Alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha x'_1 + \beta x'_2 : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K}$, et

$$\begin{aligned} (\alpha x'_1 + \beta x'_2)(\lambda x + \mu y) &= \alpha x'_1(\lambda x + \mu y) + \beta x'_2(\lambda x + \mu y) \\ &= \alpha (\lambda x'_1(x) + \mu x'_1(y)) + \beta (\lambda x'_2(x) + \mu x'_2(y)) \\ &= \lambda (\alpha x'_1(x) + \beta x'_2(x)) + \mu (\alpha x'_1(y) + \beta x'_2(y)) \\ &= \lambda ((\alpha x'_1 + \beta x'_2)(x)) + \mu ((\alpha x'_1 + \beta x'_2)(y)) \end{aligned}$$

Définition 2.2.4 L'espace linéaire $L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ s'appelle l'espace dual algébrique de $\mathbb{X}$

Puis que $L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ est un espace linéaire , on peut parler de son espace dual algébrique, i.e. $L_a(L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K}), \mathbb{K})$, qui s'appelle l'espace bidual algébrique de $\mathbb{X}$.

Remarque 2.2.2 Si $\dim \mathbb{X} = n \in \mathbb{N}$ alors $\dim L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K}) = n$.

En effet , soit $u_1, \dots, u_n$ une base algébrique pour $\mathbb{X}$. Alors pour tout $e \in \mathbb{X}$, on a $x = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k u_k$ et si $x' \in L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ nous avons

$$x'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k x'(u_k),$$

donc une fonctionnelle linéaire est déterminée de façon unique par les n nombres $x'(u_1), \dots, x'(u_n)$.

Montrons qu'on peut construire les fonctionnelles linéaires $u_i \in L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$, telles que $u'_i(u_j) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$.

En effet , nous définissons

$$u'_i(x) = u'_i\left(\sum_{k=1}^n \xi_k u_k\right) = \xi_i, \quad i = 1, \dots, n .$$

Evidemment u'_i sont des fonctionnelles linéaires et de plus indépendantes , donc $\dim L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K}) \geq n$.

D'autre part si $x' \in \dim L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$, alors on a pour tout $x \in \mathbb{X}$.

$$x'\left(\sum_{k=1}^n \xi_k u_k\right) = \sum_{k=1}^n \xi_k x'(u_k) = \sum_{k=1}^n \xi_k \lambda_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k u'_k(x),$$

donc

$$x' = \sum_{k=1}^n \lambda_k u'_k$$

c-à-d . $\dim L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K}) = n$.

Puis que chaque espace linéaire sur le corps $\mathbb{K}$,de dimension algébrique n , est isomorphe à l'espace linéaire $\mathbb{K}^n$.

En d'autres mots , nous avons pour tout $y \in \mathbb{X}$, la représentation

$$y = x + \frac{x'(y)}{x'(x_0)} x_0, \quad \text{où } x \in \ker x'. \quad (2.13)$$

Donc

$$\mathbb{X} = \ker x' + [x_0] \quad \text{et} \quad \ker x' \cap [x_0] = \{0\},$$

c-à-d .

$$\mathbb{X} = \ker x' \oplus [x_0].$$

Puisque $1 = \dim[x_0] = \text{codim } \ker x'$, les sous-espace $\ker x'$ est , d'après , un sous-espace maximal de $\mathbb{X}$. Le résultat réciproque est donné par :

Théorème 2.2.2 *Si $\mathbb{X}_0$ est un sous-espace linéaire maximal de l'espace linéaire $\mathbb{X}$, alors il existe une fonctionnelle linéaire $x' \in L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ telle que $\ker x' = \mathbb{X}_0$.*

Démonstration.

Soit $x_0 \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{X}_0$, un élément fixé . Alors tout vecteur $x \in \mathbb{X}$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = y + \lambda x_0$, où $y \in \mathbb{X}_0$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ (puisque $\mathbb{X} = \mathbb{X}_0 \oplus [x_0]$) . L'application $x' : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$x'(x) = x'(y + \lambda x_0) = \lambda,$$

est une fonctionnelle linéaire sur $\mathbb{X}$ et de plus $\ker x' = \mathbb{X}_0$.

Montrons enfin que le rayon d'une fonctionnelle linéaire détermine la fonctionnelle linéaire à une constante multiplicative près .

Théorème 2.2.3 *Soient $x'_1, x'_2 \in L_a(\mathbb{X}, \mathbb{K})$, $x'_1 \neq o'$ et $x'_2 \neq o'$. Si $\ker x'_1 = \ker x'_2$, alors $x'_2 = \mu x'_1$, $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*

Démonstration.

Supposons que $\ker x'_1 = \ker x'_2 \neq \mathbb{X}$ et choisissons $x_0 \in \mathbb{X} \setminus \ker x'_1$. Alors $x \in \mathbb{X}$ possède une décomposition unique $x = y + \lambda x_0$, $y \in \ker x'_1$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Les égalités

$$x'_1(x) = \lambda x'_1(x_0) , \quad x'_2(x) = \lambda x'_2(x_0)$$

entraînent pour tout $x \in \mathbb{X}$

$$x'_2(x) = \frac{x'_2(x_0)}{x'_1(x_0)} x'_1(x) = \mu x'_1(x)$$

2.2.2 Fonctionnelles linéaires continus sur un espace normé

Puisque tout espace normé est un espace linéaire , tout les résultats du paragraphe

restent valides pour ce cas . De plus , l'existence d'une norme sur l'espace $\mathbb{X}$ nous permet de trouver des propriétés intéressantes pour les fonctionnelles linéaires continus.

Définition 2.2.5 Soit $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ un espace normé et soit $x' \in L_a((\mathbb{X}, \|\cdot\|), \mathbb{K})$. On dit que x' est borné s'il existe un $M > 0$, tel que

$$|x'(x)| \leq M \|x\|, \text{ pour tout } x \in \mathbb{X}$$

Nous notons par $\mathbb{X}' = L(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctionnelles linéaires bornées sur $\mathbb{X}$.

Théorème 2.2.4 L'ensemble $\mathbb{X}'$ est un espace linéaire sur $\mathbb{K}$, normé par la norme

$$\|x'\|' = \sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x)|. \quad (2.14)$$

Démonstration.

Notons d'abord que $\mathbb{X}' \neq \emptyset$, puis que au moins la fonctionnelle linéaire identique nulle $x' = 0$ appartient à $\mathbb{X}'$.

Soient $x', y' \in \mathbb{X}'$. Alors

$$|x'(x)| \leq M \|x\| \text{ et } |y'(x)| \leq N \|x\|, \text{ pour tout } x \in \mathbb{X}.$$

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{X}$, nous avons

$$\begin{aligned} |(\alpha x' + \beta y')(x)| &= |\alpha x'(x) + \beta y'(x)| \leq |\alpha x'(x)| + |\beta y'(x)| \\ &\leq |\alpha| M \|x\| + |\beta| N \|x\| \\ &= (|\alpha| M + |\beta| N) \|x\|, \end{aligned}$$

donc $(\alpha x' + \beta y') \in \mathbb{X}'$ et $\mathbb{X}'$ est un espace linéaire sur $\mathbb{K}$.

Il nous reste à montrer que (2.14) est une norme sur $\mathbb{X}'$. On a $\|x'\|' \geq 0$, pour tout $x' \in \mathbb{X}'$. Si $\|x'\|' = 0$, alors $\sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x)| = 0$, donc $x'(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{X}$, telque $\|x\| \leq 1$. De plus , $x'(x) = 0$, sur $\mathbb{X}$, parce que pour un x avec $\|x\| > 1$, on a $x'(x) = x'(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}) = \|x\| x'(\frac{x}{\|x\|}) = 0$

D'autre part , nous avons

$$\|\lambda x'\|' = \sup_{\|x\| \leq 1} |\lambda \cdot x'(x)| = |\lambda| \cdot \sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x)| = |\lambda| \cdot \|x'\|'$$

et

$$\begin{aligned}\|x' + y'\|' &= \sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x) + y'(x)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x)| + \sup_{\|x\| \leq 1} |y'(x)| \\ &= \|x'\|' + \|y'\|'\end{aligned}$$

Remarque 2.2.3 On peut obtenir la norme $\|x'\|'$ par

$$\begin{aligned}\|x'\|' &= \sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x)| = \sup_{\|x\|=1} |x'(x)| = \sup_{\|x\| \neq 0} [|x'(x)| / \|x\|] \\ &= \inf\{M; |x'(x)| \leq M \|x\| \text{ pour tout } x \in \mathbb{X}\}.\end{aligned}$$

Définition 2.2.6 On appelle l'espace $\mathbb{X}'$ muni de la norme définie cidessus l'espace dual topologique de $\mathbb{X}$. De plus l'espace dual topologique de $\mathbb{X}', \mathbb{X}''$, s'appelle l'espace bidual topologique.

Exemple 2.2.5 Soit (Y, M, μ) un espace mesuré et soit $\mathbb{X} = L^p, 1 \leq p \leq \infty$, muni de la norme

$$\|f\|_p = \begin{cases} (\int_{\mathbb{Y}} |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \text{ess. sup}\{|f(t)|; t \in \mathbb{Y}\}, & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

De plus, soit $g \in L^q(d\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. D'après l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\left| \int_{\mathbb{Y}} f \cdot g d\mu \right| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q = M \|f\|_p$$

Donc $x'(f) = \int_{\mathbb{Y}} f \cdot g d\mu$ est une fonctionnelle linéaire bornée, i.e. dans $\mathbb{X}'$, et nous avons

$$\|x'\|' \leq \|g\|_q$$

Remarque 2.2.4 En considérant

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k; \quad k \in \mathbb{N}$$

nous obtenons l'analogie pour ℓ_p .

Exemple 2.2.6 Considérons l'espace normé $(C([0, 1]), \|\cdot\|_{[0,1]})$, et la fonctionnelle linéaire $x'(f) = f(\frac{1}{2})$. Alors

$$|x'(f)| = |f(\frac{1}{2})| \leq \|f\|_{[0,1]},$$

et nous avons $\|x'\|' = 1$.

Théorème 2.2.5 Soit $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et soit x' une fonctionnelle linéaire sur $\mathbb{X}$. Les quatre énoncés suivants sont équivalents.

1. x' est bornée.
2. x' est uniformément continu sur $\mathbb{X}$.
3. x' est continu à l'origine.
4. $\ker x'$ est fermé.

2.2.3 Fonctionnelles linéaires sur un espace de Hilbert

Dans ce paragraphe nous montrons d'abord le théorème de Rize qui dit qu'une fonctionnelles linéaires sur un espace de Hilbert possède une représentation par un produit scalaire ; ce qui entraîne qu'un espace Hilbert est réflexif .

Théorème 2.2.6 (Riesz) *Si $\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{K}$ et si $x' \in \mathbb{H}'$, alors il existe un et un seul élément $y \in \mathbb{H}$, tel que*

$$x'(x) = (x, y), \text{ pour tout } x \in \mathbb{H} \quad (2.15)$$

et de plus

$$\|x'\|' = \|y\|. \quad (2.16)$$

Réciproquement , pour tout élément $y \in \mathbb{H}$, la formule (2.15) définit une fonctionnelle linéaire continu x' sur $\mathbb{H}$ et on a l'églité (2.16) .

Démonstration.

a Montrons d'abord l'existence de y . Soit $x' \in \mathbb{H}'$. Si $x' = o'$, prenons $y = o$. Soit donc $x' \neq o'$.

On sait que $\ker x'$ est un sous espace maximal et fermé de $\mathbb{H}$.

Alors $(\ker x')^\perp \neq \{0\}$. Choisissons un $z \in (\ker x')^\perp \setminus \{0\}$ et posons

$$y = \frac{\overline{x'(z)}z}{\|z\|^2}.$$

De plus soit P la projection orthogonale de $\mathbb{H}$ sur le sous espace $\ker x'$. Alors pour tout $x \in \mathbb{H}$, on a

$$\begin{aligned} (x, y) &= \frac{(x, z)x'(z)}{\|z\|^2} = \frac{((I - P + P)x, z)x'(z)}{\|z\|^2} \\ &= \frac{((I - P)x, z)x'(z)}{\|z\|^2} \end{aligned}$$

Mais $(I - P)x \in (\ker x')^\perp$ et $\dim(\ker x')^\perp = 1$ ($\ker x'$ est un sous espace maximal de $\mathbb{H}$) entraîne que $(I - P)x = \lambda z$.

Nous avons donc

$$(x, y) = \frac{(\lambda z, z)x'(z)}{\|z\|^2}.$$

Déautre part , $x'(x) = x'((I - P + P)x) = x'((I - P)x) = x'(\lambda z) = \lambda x'(z)$,

ce qui montre que $x'(x) = (x, y)$.

b Montrons maintenant l'unicité de y . Soit $x'(x) = (x, y) = (x, y_1)$, pour tout $x \in \mathbb{H}$. Alors $(x, y - y_1) = 0$ sur $\mathbb{H}$, et pour $x = y - y_1$ nous obtenons $y = y_1$.

c De $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ on a $\|x'\|' \leq \|y\|$, et $x'(y) = \|y\|^2$ entraîne que $\|x'\|' \geq \|y\|$, donc l'égalité (2.16) est vérifiée .

d Réciproquement $x'(x) = (x, y)$ pour un $y \in \mathbb{H}$ fixé est une fonctionnelle linéaire . La continuité s'ensuit de $|x'(x)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ et de c) nous avons $\|x'\|' = \|y\|$.

Corollaire 2.2.1 *Considérons l'espace de Hilbert $L^2(d\mu)$ sur $\mathbb{X}$ avec le produit scalaire*

$$(f, g) = \int_{\mathbb{X}} f \bar{g} d\mu$$

Alors pour $x' \in (L^2(d\mu))'$ il existe une fonction $g \in L^2(d\mu)$ tel que

$$x'(f) = \int_{\mathbb{X}} f \bar{g} d\mu, \text{ pour tout } f \in L^2(d\mu).$$

De plus g est μ -presque partout unique .

Le théorème (2.2.6) suggère une liaison forte entre un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ et son dual topologique $\mathbb{H}'$.

Dans ce qui suit , $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ signifie l'ensemble des opérateurs linéaires continus de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$ qui est un sous-espace linéaire $L_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.Donc $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ peut être regardé lui-même comme un espace linéaire sur le corps $\mathbb{K}$.

Introduisons maintenant une norme pour $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Théorème 2.2.7 *L'application $\| \cdot \| : L(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \rightarrow \mathbb{R}^+$, donnée par*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_{\mathbb{Y}}; x \in \mathbb{X} \text{ et } \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1\} \quad (2.17)$$

est une norme pour $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Démonstration.

Pour tout $T \in L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\|T\| \geq 0$ et $\|T\|$ est finie .

Si tout $\|T\| = 0$, alors $Tx = 0$, pour tout $x \in \mathbb{X}$. En effet pour $x \neq 0$,

$$\|Tx\|_{\mathbb{Y}} = \|x\|_{\mathbb{X}} \|T \frac{x}{\|x\|_{\mathbb{X}}}\|_{\mathbb{Y}} = 0, \text{ donc } Tx = 0 \text{ sur } \mathbb{X} \text{ et } T = 0.$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda T\| = |\lambda| \|T\|$ parce que

$$\begin{aligned} \|\lambda T\| &= \sup\{\|(\lambda T)x\|_{\mathbb{Y}}; \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1\} = \sup\{|\lambda| \|Tx\|_{\mathbb{Y}}; \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1\} \\ &= |\lambda| \|T\|. \end{aligned}$$

Enfin , pour tout $x \in \mathbb{X}$, tel que $\|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1$, nous avons

$$\|(T_1 + T_2)x\|_{\mathbb{Y}} = \|T_1x + T_2x\|_{\mathbb{Y}} \leq \|T_1x\|_{\mathbb{Y}} + \|T_2x\|_{\mathbb{Y}} \leq \|T_1\| + \|T_2\|.$$

Remarque 2.2.5 Soit $T \in L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, alors

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1} \{\|Tx\|_{\mathbb{Y}}\} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{X}}=1} \{\|Tx\|_{\mathbb{Y}}\} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{X}} \neq 0} \{\|Tx\|_{\mathbb{Y}}/\|x\|_{\mathbb{X}}\} \\ &= \inf\{M, \|Tx\|_{\mathbb{Y}} \leq M\|x\|_{\mathbb{X}}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{X}\}\end{aligned}$$

Exemple 2.2.7 considérons la transformation de Fourier

$$T : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow (\overline{C_0}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathbb{R}}).$$

$$(Tf)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(t) dt$$

Nous avons

$$\|Tf\|_{\mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \|f\|_1.$$

Donc $\|T\|_1 \leq 1$.

D'autre part, pour $f \geq 0$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, nous avons

$$\|Tf\|_{\mathbb{R}} \geq (Tf)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \|f\|_1.$$

ce qui entraîne que $\|T\|_1 = 1$.

Montrons maintenant que si $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach, alors cette structure se transmet sur $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Théorème 2.2.8 Soient $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_1)$ un espace normé et $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_2)$ un espace de Banach. Alors $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est un espace de Banach.

Démonstration.

On sait déjà que $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est un espace normé. il nous reste à montrer que $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est complet. Soit $\{T_n; n \in \mathbb{N}\} \subset L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ une suite de Cauchy. Alors

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon \text{ si } n, m > n_0(\varepsilon).$$

Pour $x \in \mathbb{X}$ fixé, l'inégalité

$$\|T_n x - T_m x\|_2 \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|_1 < \varepsilon \|x\|_1, \quad n, m > n_0(\varepsilon)$$

montre que $\{T_n x; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Y}$ est une suite de Cauchy. Mais $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach; donc $T_n x$ est convergente, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ existe pour tout $x \in \mathbb{X}$. Définissons l'application $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ par

$$Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x, \text{ pour tout } x \in \mathbb{X}.$$

Montrons que $T \in L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

D'abord T est linéaire parce que

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\alpha x + \beta y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha T_n x + \beta T_n y) \\ &= \alpha T x + \beta T y, \end{aligned}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \mathbb{X}$.

D'autre part , nous avons

$$\|T_n x\|_2 \leq M \|x\|_1, \text{ pour tout } x \in \mathbb{X},$$

ce qui entraîne , pour $n \rightarrow \infty$, que

$$\|T x\|_2 \leq M \|x\|_1, \text{ et donc } T \in L(\mathbb{X}, \mathbb{Y}).$$

Enfin, montrons que $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$.

Nous avons

$$\|T_m x - T_n x\|_2 \leq \|T_m - T_n\| \cdot \|x\|_1 < \varepsilon \|x\|_1$$

si $n, m > n_0(\varepsilon)$ et pour tout $x \in \mathbb{X}$

En fixant n , nous obtenons pour $m \rightarrow \infty$

$$\|T x - T_n x\|_2 \leq \|T - T_n\| \|x\|_1 < \varepsilon \|x\|_1, \text{ si } n > n_0(\varepsilon),$$

et donc

$$\|T - T_n\| < \varepsilon \text{ si } n > n_0(\varepsilon) \text{ c-à-d. } T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T.$$

Corollaire 2.2.2 Soit $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ un espace normé . Alors l'espace dual topologique $\mathbb{X}'$ est un espace de Banach . En effet $\mathbb{X}' = L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et $\mathbb{K}$ est un espace de Banach .

Exemple 2.2.8 Considérons l'espace de Banach $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.pour $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ nous avons :

$$\|T x\|_\infty \leq \|T\| \|x\|_\infty$$

2.3 Opérateurs dans les espaces de Hilbert. Notions d'opérateur adjoint

2.3.1 Généralités sur les opérateurs linéaires continus dans les espaces des Hilbert

Définitions

Soient $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}'$ deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$.

Définition 2.3.1 Toute application linéaire continu $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}'$ s'appelle un opérateur. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$ des applications linéaires continus de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}'$ est l'espace des opérateurs de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}'$.

Notations :

- 1) Pour alléger les écritures, l'image d'un vecteur $x \in \mathbb{H}$ par l'opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$ sera généralement notée Tx mais la notation traditionnelle $T(x)$ sera parfois utilisée également.
- 2) La norme de T est le nombre

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_{\mathbb{H}} \leq 1} \|Tx\|_{\mathbb{H}'} \quad (2.18)$$

c'est la norme usuelle assujettie aux normes de $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}'$.

- 3) On notera $\text{Ker}T$ le noyau de l'opérateur T i.e. $\text{ker}T = \{x \in \mathbb{H}; Tx = 0\}$
- 4) $\text{Im}T$ désignera le sous-espace de $\mathbb{H}'$ image de $\mathbb{H}$ par T . On le notera aussi $T(\mathbb{H})$.

Remarque 2.3.1 $\text{Ker}T$ (resp. $\text{Im}T$) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{H}$ (resp. de $\mathbb{H}'$). On notera que $\text{Ker}T$ est toujours un sous-espace fermé de $\mathbb{H}$ mais $\text{Im}T$ n'est pas forcément fermé dans $\mathbb{H}'$.

2.3.2 Composé de plusieurs opérateurs

Soient $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}'$ et $\mathbb{H}''$ des espaces de Hilbert et $T_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$ et $T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{H}', \mathbb{H}'')$ des opérateurs. Considérons l'opérateur composé $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}'')$.

Proposition 2.3.1 On a $\|T_2 \circ T_1\| \leq \|T_1\| \cdot \|T_2\|$

Remarque 2.3.2 Dans le résultat précédent les normes d'opérateur sont toujours celles définies en (2.18) c'est-à-dire les normes assujetties aux normes des espaces de Hilbert concernés par les opérateurs.

Application : Soit $U \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ un opérateur de l'espace de Hilbert $\mathbb{H}$ dans lui même. On définit les puissances de l'opérateur U comme étant les opérateurs de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ définis de la manière suivante : $U^0 = I$ (l'opérateur identité), $U^1 = U$, $U^2 = U \circ U$, $\dots$, $U^n = U \circ U^{n-1} = U^{n-1} \circ U$ ($n \geq 1$)

Corollaire 2.3.1 $\forall n \in \mathbb{N}, \|U^n\| \leq \|U\|^n$

Corollaire 2.3.2 La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} U^n$ converge dans $\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$. Sa somme est un opérateur de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ appelé exponentielle de l'opérateur U et noté e^U ou $\exp U$. Sa norme vérifie :

$$\|\exp U\| \leq \exp(\|U\|) \quad (2.19)$$

2.3.3 Inverse d'un opérateur

Soient $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}'$ des espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$ un opérateur.

Définition 2.3.2 On dit que A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}', \mathbb{H})$ tel que

$$A \circ B = I_{\mathbb{H}'}, \quad \text{et} \quad B \circ A = I_{\mathbb{H}} \quad (2.20)$$

où $I_{\mathbb{H}}$ (resp. $I_{\mathbb{H}'}$) est l'opérateur identité de $\mathbb{H}$ (resp. de $\mathbb{H}'$). Un tel opérateur B (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle opérateur inverse de A ou plus simplement inverse de A et on le note $B = A^{-1}$.

Cas particulier où $\mathbb{H} = \mathbb{H}'$: Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$. Dans le cas où $\mathbb{H}$ est de dimension finie, on sait que l'inversibilité de T a plusieurs aspects équivalents. Plus précisément, rappelons l'important résultat suivant :

Théorème 2.3.1 Si $\dim \mathbb{H} < +\infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. T est inversible.
2. T est injectif.
3. T est surjectif.
4. T admet un inverse à droite (i.e. il existe $U \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ tel que $T \circ U = I_{\mathbb{H}}$).
5. T admet un inverse à gauche (i.e. il existe $V \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ tel que $V \circ T = I_{\mathbb{H}}$).

2.3.4 Adjoint d'un opérateur

Soient $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}'$ des espaces de Hilbert. On va généraliser la notion d'adjoint d'une application linéaire de $\mathbb{C}^d$ dans lui même, qu'on étudie généralement en L2.

Théorème 2.3.2 Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$. Alors il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(\mathbb{H}', \mathbb{H})$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{H}, \quad \forall y \in \mathbb{H}', \quad \langle Tx, y \rangle_{\mathbb{H}'} = \langle x, T^*y \rangle_{\mathbb{H}} \quad (2.21)$$

L'opérateur T^* s'appelle l'adjoint de T .

Preuve.

Montrons que T^* est linéaire

$\forall x \in \mathbb{H}, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{H}', \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle &= \langle Tx, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle \\ &= \langle Tx, \alpha y_1 \rangle + \langle Tx, \beta y_2 \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle Tx, y_1 \rangle + \bar{\beta} \langle Tx, y_2 \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle x, T^* y_1 \rangle + \bar{\beta} \langle x, T^* y_2 \rangle \\ &= \langle x, \alpha T^* y_1 + \beta T^* y_2 \rangle.\end{aligned}$$

D'où

$$\langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle = \langle x, \alpha T^* y_1 + \beta T^* y_2 \rangle.$$

Montrons maintenant que T^* est borné.

$$\begin{aligned}\|T^* y\|^2 &= \langle T^* y, T^* y \rangle = \langle TT^* y, y \rangle \leq \|TT^* y\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \cdot \|T^* y\| \cdot \|y\| \\ &\Rightarrow \|T^* y\| \leq \|T\| \cdot \|y\|.\end{aligned}$$

Alors T^* est borné et de plus

$$\|T^*\| \leq \|T\| \quad (2.22)$$

il suit que $T^* \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$.

Définition 2.3.3 Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ est tel que $T = T^*$, on dit que l'opérateur T est autoadjoint (ou hermitien).

Théorème 2.3.3 Propriétés de l'adjoint

1. Pour tout $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$, on a

$$(A^*)^* = A \quad \text{et} \quad \|A^*\| = \|A\|$$

2. Si $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$ et $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}', \mathbb{H})$, alors

$$(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$$

3.

$$(A + B)^* = A^* + B^*; (\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*.$$

4. Pour tout $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

$$(\lambda A_1 + \mu A_2)^* = \bar{\lambda} A_1^* + \bar{\mu} A_2^*$$

5. Si A est inversible (il existe un autre opérateur A^{-1} tel que $A^{-1}A = I_{\mathbb{H}}$), alors

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

Preuve.

$$1. (A^*)^* = A$$

$$\begin{aligned} \langle (A^*)^* w, v \rangle &= \langle w, A^* v \rangle \\ &= \overline{\langle A^* v, w \rangle} \\ &= \overline{\langle v, Aw \rangle} \\ &= \langle Aw, v \rangle. \end{aligned}$$

Donc $(A^*)^* = A$.

Donc on trouve que $\|A^*\| = \|A\|$ En combinant avec (2.22) :

$$\begin{aligned} \|(T^*)^*\| &\leq \|T^*\| \\ \Rightarrow \|T\| &\leq \|T^*\|. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Donc (2.22) et (2.23) $\Rightarrow \|T\| = \|T^*\|$.

$$2. (A \circ B)^* = B^* \circ A^*$$

$$\begin{aligned} \langle w, (A \circ B)^* v \rangle &= \langle (A \circ B)w, v \rangle \\ &= \langle Bw, A^* v \rangle \\ &= \langle w, B^* \circ A^* v \rangle. \end{aligned}$$

Donc $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$.

3. Pour la démonstration on met $(A + B)^*$ dans un produit scalaire

$$\langle w, (A + B)^* v \rangle$$

avec $v, w \in \mathbb{H}$ quelconques. Ensuite on utilise la définition de l'adjoint et la linéarité du produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle w, (A + B)^* v \rangle &= \langle (A + B)w, v \rangle \\ &= \langle Aw, v \rangle + \langle Bw, v \rangle \\ &= \langle w, A^* v \rangle + \langle w, B^* v \rangle \\ &= \langle w, (A^* + B^*) v \rangle. \end{aligned}$$

Donc on trouve que $(A + B)^* = A^* + B^*$.

De la même manière

$$\begin{aligned}
\langle (\lambda A)^* w, v \rangle &= \langle w, \lambda A v \rangle \\
&= \bar{\lambda} \langle w, A v \rangle \\
&= \bar{\lambda} \langle A^* w, v \rangle \\
&= \langle \bar{\lambda} A^* w, v \rangle.
\end{aligned}$$

D'où $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$.

4.

$$\begin{aligned}
\langle (\lambda A_1 + A_2 \mu)^* w, v \rangle &= \langle w, (\lambda A_1 + \mu A_2) v \rangle \\
&= \langle w, \lambda A_1 v \rangle + \langle w, \mu A_2 v \rangle \\
&= \bar{\lambda} \langle A_1^* w, v \rangle + \bar{\mu} \langle A_2^* w, v \rangle \\
&= \langle (\bar{\lambda} A_1^* + \bar{\mu} A_2^*) w, v \rangle.
\end{aligned}$$

D'où $(\lambda A_1 + A_2 \mu)^* = \bar{\lambda} A_1^* + \bar{\mu} A_2^*$.

5. D'une part, pour tous $v, w \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
\langle w, v \rangle &= \langle A^{-1} A w, v \rangle \\
&= \langle A w, (A^{-1})^* v \rangle.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\langle w, v \rangle &= \langle w, A^* (A^*)^{-1} v \rangle \\
&= \langle A w, (A^*)^{-1} v \rangle.
\end{aligned}$$

On peut conclure que $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Exemples d'opérateurs adjoint

Exemple 1 : Soit $\mathbb{H} = L^2([a, b])$ ($a < b$) l'espace des classes de fonctions $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de carré sommable avec le produit scalaire $\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt$ et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue fixée. L'application T qui à la fonction $x \in \mathbb{H}$ fait correspondre la fonction Tx définie sur $[a, b]$ par

$$(Tx)(t) = f(t)x(t)$$

est un opérateur $T \in L(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ appelé opérateur de multiplication par f . L'opérateur $T^* \in L(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ est alors l'opérateur de multiplication par la fonction $\bar{f}$.

Exemple 2 : Soit $k : [c, d] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ($c < d, a < b$) une fonction continue de deux variables réelles. On considère l'application $K : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([c, d])$ telle que pour tout $x \in L^2([a, b])$, Kx est la fonction définie par

$$\forall t \in [c, d], \quad (Kx)(t) = \int_a^b k(t, s)x(s)ds \quad (2.24)$$

K est un opérateur de $L^2([a, b])$ dans $L^2([c, d])$ qu'on appelle opérateur intégral de noyau $k(t, s)$. On abrège souvent en disant que K est un opérateur à noyau (égal à k).

L'opérateur adjoint K^* est aussi un opérateur à noyau. C'est l'opérateur intégral de $L^2([c, d])$ dans $L^2([a, b])$ dont le noyau est la fonction $(s, t) \mapsto \overline{k(s, t)}$ de $[a, b] \times [c, d]$ dans $\mathbb{C}$ (attention les intervalles sont maintenant dans l'ordre inverse!) i.e. pour tout $y \in L^2([c, d])$, $K^*y \in L^2([a, b])$ est la fonction définie par

$$\forall s \in [a, b], \quad (K^*y)(s) = \int_c^d \overline{k(s, t)} y(t) dt \quad (2.25)$$

Dans le cas particulier où $[a, b] = [c, d]$, l'opérateur $K : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$ est autoadjoint si le noyau k satisfait la condition de symétrie hermitienne

$$\forall (s, t) \in [a, b]^2, k(s, t) = \overline{k(t, s)} \quad (2.26)$$

2.3.5 Vecteurs propres et valeurs propres d'un opérateur autoadjoint

Les opérateurs autoadjoints ont des propriétés particulièrement importantes que nous allons maintenant examiner. Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ un opérateur.

Théorème 2.3.4 ((Norme d'un opérateur autoadjoint)) *Si T est autoadjoint (i.e. $T = T^*$), alors*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} | \langle Tx, x \rangle | \quad (2.27)$$

Définition 2.3.4 ((Rappel)) *On dit qu'un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de T s'il existe un vecteur $x \in \mathbb{H}, x \neq 0$, tel que $Tx = \lambda x$. Un tel vecteur x est alors appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ .*

Remarque 2.3.3 *Soit λ une valeur propre de T . Alors l'ensemble V_λ de tous les vecteurs $x \in \mathbb{H}$ tels que $Tx = \lambda x$ est un sous-espace fermé de $\mathbb{H}$.*

On l'appelle le sous-espace propre associé à la valeur propre λ .

Théorème 2.3.5 *Si T est autoadjoint, les valeurs propres de T sont réelles et les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont deux à deux orthogonaux.*

Dans le cas de la dimension finie, on déduit le résultat bien connu suivant

Corollaire 2.3.3 *Si $\dim \mathbb{H} < +\infty$ et si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ est autoadjoint, alors T est diagonalisable*

Pour la démonstration on a besoin du lemme suivant que nous signalons car il est très utile en général :

Lemme 2.3.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ un opérateur et soit V un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{H}$ invariant par T (i.e. $\forall x \in V, Tx \in V$). Alors le sous-espace $V^\perp$ est invariant par l'adjoint T^* .*

2.3.6 Opérateurs isométriques ,unitaires, normaux ,autoadjoints ,positifs

Définition 2.3.5 Soient $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}'$ deux espaces de Hilbert. Lorsque $\mathbb{H} = \mathbb{H}'$, $\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$ est noté $\mathcal{L}(\mathbb{H})$.

- Un élément $U \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$ est appelé **isométrique** si $\|U(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{H}$.
- Un élément $U \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$ est appelé **unitaire** si $U^*U = Id_{\mathbb{H}}$ et $UU^* = Id_{\mathbb{H}'}$.
- Un élément $N \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est appelé **normal** si $NN^* = N^*N$.
- Un élément $S \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est appelé **hermitien** ou **auto-adjoint** si $S = S^*$.
- Un élément $P \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est appelé **positif** (notation : $P \geq 0$) si P est autoadjoint et si pour tout $x \in E$ $\langle P(x), x \rangle \geq 0$.

Exemples d'opérateurs isométriques, normaux, unitaires, positifs,autoadjoints

- Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert et $P \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ un projecteur orthogonal. Notons F son image. Alors P est auto-adjoint. En effet, pour tous $x, x' \in F$ et $y, y' \in F^\perp$,

$$\langle P(x+y), x' + y' \rangle = \langle x, x' \rangle = \langle x + y, P(x' + y') \rangle$$

De plus $\langle P(x+y), x+y \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \geq 0$ pour tous $x \in F$ et $y \in F^\perp$. Ainsi $P \geq 0$.

- Les opérateurs diagonaux Δ_α et M_f définis précédemment sont normaux.

En effet

$$\Delta_\alpha \Delta_\alpha^* = \Delta_\alpha \Delta_{\bar{\alpha}} = \Delta_\beta = \Delta_{\bar{\alpha}} \Delta_\alpha = \Delta_\alpha^* \Delta_\alpha$$

où $\beta = (\beta_n)_n$ est la suite définie par $\beta_n = |\alpha_n|^2$. D'autre part,

$$M_f M_f^* = M_f M_{\bar{f}} = M_{|f|^2} = M_f^* M_f$$

- Le shift S sur $\ell^2(\mathbb{N})$ est isométrique, le shift S sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ est unitaire.
- Pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$, $T^*T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est hermitien car $(T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T$.
De plus $T^*T \geq 0$ car, pour tout $x \in \mathbb{H}$, $\langle T^*Tx, x \rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$. En particulier $A^2 \geq 0$ dès que $A = A^*$.

Proposition 2.3.2 Soient $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}'$ deux espaces de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$. Sont équivalents :

- T est isométrique.
- $T^*T = Id_{\mathbb{H}}$.

Sont équivalents :

- T est unitaire.
- T est surjective et $T^*T = Id_{\mathbb{H}}$.
- T est une isométrie surjective.

Preuve.

Montrons la première équivalence. Supposons que T est isométrique. Montrer que $T^*T = Id_{\mathbb{H}}$ revient à montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{H}$, on a

$$\langle T^*T(x), y \rangle = \langle x, y \rangle$$

Rappelons l'identité de polarisation, à savoir,

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\langle u + v, u + v \rangle - \langle u - v, u - v \rangle + i\langle u + iv, u + iv \rangle - i\langle u - iv, u - iv \rangle)$$

pour un Hilbert complexe et

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\langle u + v, u + v \rangle - \langle u - v, u - v \rangle)$$

pour un Hilbert réel. En particulier,

$$\langle T^*T(x), y \rangle = \langle T(x), T(y) \rangle = \frac{1}{4} \left(\|T(x+y)\|^2 - \|T(x-y)\|^2 + i\|T(x+iy)\|^2 - i\|T(x-iy)\|^2 \right)$$

Comme $\|T(u)\| = \|u\|$, on en déduit :

$$\langle T^*T(x), y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 \right) = \langle x, y \rangle$$

Réciproquement, supposons que $T^*T = Id_{\mathbb{H}}$. Ceci implique que pour tout $x \in \mathbb{H}$,

$$\langle T^*T(x), x \rangle = \langle x, x \rangle$$

On en déduit immédiatement pour tout $x \in \mathbb{H}$,

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

ce qui prouve que T est bien isométrique.

Pour la preuve des trois autres équivalences, les implications 1. implique 2. et 2. implique 3. sont évidentes. Pour montrer que 3. implique 1., on remarque qu'une isométrie linéaire est injective et donc les hypothèses de 3. impliquent que T.1 existe. De plus, T étant une isométrie, on a $T^*T = Id_{\mathbb{H}}$. En composant à droite par T^{-1} , on obtient $T^* = T^{-1}$.

2.3.7 Matrice d'un opérateur dans une base Hilbertienne

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une base Hilbertienne de $\mathbb{H}$. Soit T un opérateur de $\mathbb{H}$ dans lui même. Pour tout $j \geq 1$, on peut écrire

$$Te_j = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle Te_j, e_i \rangle e_i \tag{2.28}$$

Nous allons voir que les coefficients $a_{ij} := \langle Te_j, e_i \rangle$ ($(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$) déterminent entièrement l'opérateur T :

Pour tout $x \in \mathbb{H}$, posons $x_j = \langle x, e_j \rangle$. on a alors $x = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j e_j$ et

$$Tx = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j Te_j \quad (2.29)$$

car l'opérateur T est continu. D'autre part, la décomposition de Tx sur la base Hilbertienne (e_n) donne

$$Tx = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle Tx, e_i \rangle e_i \quad (2.30)$$

Mais d'après (2.29) et grâce à la continuité du produit scalaire, on a

$$\langle Tx, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j \langle Te_j, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j a_{ij} \quad (2.31)$$

D'après (2.30), on a donc

$$Tx = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} x_j \right) e_i \quad (2.32)$$

La formule (2.31) montre alors que le i -ième coefficient (de Fourier) de Tx sur la base Hilbertienne (e_n) , s'obtient comme en dimension finie en faisant le « produit » de la i -ième ligne de la matrice (a_{ij}) par la colonne des coefficients de Fourier de x .

Définition 2.3.6 La matrice $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ à une infinité de lignes et de colonnes, est appelée matrice de l'opérateur T dans la base Hilbertienne (e_n) . On notera que puisque $a_{ij} := \langle Te_j, e_i \rangle$, la j -ième colonne de la matrice A est constituée des coefficients du vecteur Te_j comme en dimension finie.

Remarque 2.3.4 Nous ne développerons pas le calcul matriciel en dimension infinie car il présente certaines difficultés techniques liées essentiellement à des problèmes de convergence de séries.

Chapitre 3

Applications

Le troisième chapitre s'occupe de deux applications sur ce qui nous avons étudié dans les deux chapitres précédant, ces applications sont illustrées par les propriétés structurelles citées aux chapitres un et deux. La première application concerne des résultats trouvés sur les opérateurs associés à un opérateur linéaire, et leurs propriétés structurelles. Les opérateurs de projection et leur étude est importante car ils constituent les éléments simples en lesquels se décomposent naturellement les opérateurs hermitiens. La deuxième application s'occupe principalement de l'étude des valeurs propres d'un opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert dans un autre espace de Hilbert, nous sommes intéressés à savoir pour quels valeurs propres l'opérateur résolvant associé est inversible, il est à noter que l'espace de Hilbert est toujours sur le corps de nombres complexes.

3.1 Définition et propriétés générales des opérateurs linéaires dans l'espace de Hilbert.

On désigne sous le nom d'opérateur dans l'espace de Hilbert toute transformation ponctuelle $g = Rf$ faisant correspondre à un élément f de l'espace un autre élément g . La transformation est supposée unique dans le sens $f \rightarrow g$. En général, l'opérateur n'est défini que lorsque l'élément initial f décrit un certain domaine qui est le domaine d'existence de l'opérateur ; l'élément final décrit alors un autre domaine, qui est le domaine des valeurs de l'opérateur.

R et S étant deux opérateurs, a un nombre quelconque, m un entier positif, les opérations $R + S$, $R - S$, aR , RS , R^m s'entendent d'elles-mêmes ; il va sans dire que des restrictions convenables doivent être faites en ce qui concerne les domaines d'existence des opérateurs représentés par ces symboles ; par exemple, le domaine d'existence de $R + S$ est le domaine d'existence de R et de S , le domaine d'existence de RS est la partie commune au domaine des valeurs de R et au domaine d'existence de S .

Si la liaison établie par l'opérateur R entre l'élément initial et l'élément final est biunivoque, l'opérateur R possède un inverse qu'on désigne par R^{-1} ; si E désigne l'opérateur identique, il est clair que l'on a

$$R \cdot R^{-1} = R^{-1} \cdot R = E$$

Si R et S ont des inverses, on voit que aR , RS ont aussi des inverses qui sont

$$(aR)^{-1} = \frac{1}{a}R^{-1} \quad (RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$$

Définition 3.1.1 *Un opérateur A est linéaire si son domaine de définition est une variété linéaire, et si, quels que soient les éléments $f_1, f_2, \dots, f_k$, de ce domaine, et quels que soient les nombres $a_1, a_2, \dots, a_k$, on a*

$$A[a_1f_1 + a_2f_2 + \dots + a_kf_k] = a_1Af_1 + a_2Af_2 + \dots + a_kAf_k$$

Nous ne considérerons dans la suite que les opérateurs linéaires dont les domaines de définition sont partout denses dans l'espace de Hilbert.

Définition 3.1.2 *En présupposant son existence, on appelle opérateur associé à un opérateur linéaire donné A , et on désigne par $A^\times$, un opérateur linéaire ayant même domaine de définition que A , et tel, de plus, que l'on ait, quels que soient les éléments f et g de ce domaine de définition*

$$(f, Ag) = (A^\times f, g) \quad (f, A^\times g) = (Af, g)$$

On remarquera que la seconde condition équivaut à la première, comme on le voit en échangeant f et g , et en prenant les imaginaires conjugués des deux membres. Il en résulte que l'opérateur associé à $A^\times$ est A lui-même. On voit aisément, toujours en supposant leur existence, que les opérateurs associés à $A + B$, $A - B$, aA , AB sont

$$(A + B)^\times = A^\times + B^\times \quad (A - B)^\times = A^\times - B^\times \quad (aA)^\times = \bar{a}A^\times \quad (AB)^\times = B^\times A^\times$$

De la même manière, si A a un inverse A^{-1} et un associé $A^\times$, si ce dernier opérateur a aussi un inverse $A^{\times-1}$, A^{-1} et $A^{\times-1}$ sont associés ; on a en effet

$$(A^{-1}f, g) = (A^{-1}f, A^\times A^{\times-1}g) = (AA^{-1}f, A^{\times-1}g) = (f, A^{\times-1}g)$$

Remarque 3.1.1 *En réalité, dans un espace vectoriel normé général (espace de $S.Banach$) l'opérateur linéaire associé à un opérateur linéaire donné est défini dans l'espace dual ; ce n'est que parce que l'espace de Hilbert est identique à son espace dual, que la définition précédente a un sens. Cette remarque a son prix, car il en résulte que le concept d'opérateur hermitien n'a de signification que dans l'espace de Hilbert.*

Définition 3.1.3 *Un opérateur linéaire est hermitien si il est identique à son associé.*

Définition 3.1.4 *Un opérateur linéaire U est dit unitaire, lorsque l'on a*

$$UU^\times = U^\times U = E$$

Il en résulte

$$(Uf, Ug) = (U^\times Uf, g) = (f, g) \quad \|Uf\| = \|f\|$$

Les opérateurs unitaires invarient donc les normes et les produits scalaires des éléments auxquels on les applique.

Théorème 3.1.1 *Si un opérateur linéaire partout défini invarie la norme, il est unitaire.*

Supposons en effet que l'on ait

$$(Uf, Uf) = (f, f)$$

changeant f en $f + g$, puis en $f - g$ et soustrayant, on trouve

$$\operatorname{Re}.(Uf, Ug) = \operatorname{Re}.(f, g)$$

changeant ensuite f en if , on obtient

$$\operatorname{Im}.(Uf, Ug) = \operatorname{Im}.(f, g)$$

finalelement

$$(Uf, Ug) = (f, g)$$

quels que soient les éléments f et g ; donc $U \cdot U^\times = E$ et U est unitaire.

Définition 3.1.5 *Un opérateur linéaire A est continu si, à tout nombre ε positif correspond un nombre positif η tel que $\|f - g\| \leq \eta$ entraîne $\|Af - Ag\| \leq \varepsilon$ et cela, aussi petit que soit ε .*

Théorème 3.1.2 *Un opérateur partout défini qui est continu à l'origine est un opérateur continu.*

Cela résulte immédiatement de la linéarité de l'opérateur car

$$A(f - g) = Af - Ag$$

Définition 3.1.6 *Un opérateur linéaire A partout défini est dit borné s'il existe un nombre positif M tel que l'on ait, quels que soient les éléments f et g de l'espace*

$$\|Af - Ag\| \leq M\|f - g\|$$

Théorème 3.1.3 *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur soit continu est qu'il soit borné.*

Il est d'abord bien clair que tout opérateur borné est continu. Inversement, supposons l'opérateur A continu, et soit δ la valeur de η correspondant à $\varepsilon = 1$; alors si f est de norme inférieure à δ , on a $\|Af\| \leq 1$. Posons encore $M = \frac{2}{\delta}$ l'inégalité

$$\|Af\| \leq M\|f\|$$

est vérifiée pour f nul ; soit, dans le cas contraire,

$$g = \frac{\frac{1}{2}\delta}{\|f\|} f \quad \|g\| = \frac{1}{2}\delta \text{ et } Ag = \frac{\frac{1}{2}\delta}{\|f\|} Af$$

mais $\|Ag\|$ est inférieur à l'unité puisque $\|g\|$ est inférieur à δ , on a donc bien

$$\|Af\| \leq M\|f\|$$

Borne d'une fonctionnelle bilinéaire. De $\|Af\| \leq M\|f\|$ résulte

$$|(Af, g)| \leq \|Af\| \cdot \|g\| \leq M\|f\| \cdot \|g\|$$

Inversement, si $|(Af, g)| \leq M\|f\| \cdot \|g\|$, on voit, en changeant g en Af , que

$$\|Af\| \leq M\|f\|$$

3.1.1 Les opérateurs de projection.

Leur étude est importante car ils constituent les éléments simples en lesquels se décomposent naturellement les opérateurs hermitiens.

Définition 3.1.7 *Soit $\mathfrak{M}$ une multiplicité linéaire fermée. On a vu (exposé B) que tout élément f de l'espace se décompose d'une manière unique $f = g + h$ en un élément g contenu dans $\mathfrak{M}$ et en un élément h orthogonal à $\mathfrak{M}$. L'opération faisant passer de f à g sera considérée maintenant comme l'application à f d'un opérateur de projection*

$$g = P_{\mathfrak{M}}f$$

Le domaine de définition de cet opérateur est l'espace tout entier, son domaine des valeurs est la multiplicité $\mathfrak{M}$.

Théorème 3.1.4 *Les opérateurs de projection sont des opérateurs linéaires. Soient en effet f et g deux éléments de l'espace, on a*

$$f = P_{\mathfrak{M}}f + h \quad g = P_{\mathfrak{M}}g + k$$

h et k sont orthogonaux à la multiplicité $\mathfrak{M}$, ainsi que $h + k$ et on peut écrire

$$f + g = P_{\mathfrak{M}}f + P_{\mathfrak{M}}g + h + k$$

comme de plus $P_{\mathfrak{M}}f + P_{\mathfrak{M}}g$ appartient à la multiplicité $\mathfrak{M}$ on voit qu'on a nécessairement

$$P_{\mathfrak{M}}f + P_{\mathfrak{M}}g = P_{\mathfrak{M}}(f + g)$$

Théorème 3.1.5 *Les opérateurs de projection sont hermitiens.*

Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} (P_{\mathfrak{M}}f, g) &= (P_{\mathfrak{M}}f, P_{\mathfrak{M}}g + h) = (P_{\mathfrak{M}}f, P_{\mathfrak{M}}g) = (P_{\mathfrak{M}}f + h, P_{\mathfrak{M}}g) \\ &= (f, P_{\mathfrak{M}}g) \end{aligned}$$

puisque h et k sont orthogonaux à la multiplicité $\mathfrak{M}$.

Théorème 3.1.6 *Un opérateur de projection est identique à son carré.*

C'est un point évident.

Théorème 3.1.7 *Tout opérateur hermitien partout défini, qui est identique à son carré, est un opérateur de projection.*

Soit A un tel opérateur. Soit $\mathfrak{M}$ la multiplicité linéaire fermée qui contient les Af ; on a

$$(Af, g - Ag) = (Af, g) - (Af, Ag) = (Af, g) - (A^2f, g) = (Af, g) - (Af, g) = 0$$

Tous les $g - Ag$ sont donc orthogonaux aux Af , les éléments de l'espace orthogonaux aux $g - Ag$ forment une multiplicité linéaire fermée qui se confond avec $\mathfrak{M}$, et les éléments $g - Ag$ appartiennent à la multiplicité linéaire fermée complètement orthogonale à $\mathfrak{M}$; mais une décomposition de g sur ces deux multiplicités est

$$g = (g - Ag) + Ag$$

comme une telle décomposition est unique, on a

$$A = P_{\mathfrak{M}}$$

Théorème 3.1.8 *Soient $A = P_{\mathfrak{M}}$, $B = P_{\mathfrak{N}}$, deux opérateurs de projection ; pour que $A + B$ soit un opérateur de projection, il est nécessaire et suffisant que $AB = BA = 0$; les multiplicités $P_{\mathfrak{M}}$ et $P_{\mathfrak{N}}$ sont alors complètement orthogonales*

Appliquons le théorème (3.1.7) : $A+B$ est évidemment partout défini et hermitien, il suffira d'écrire que

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA = A + B + AB + BA = A + B$$

Il est donc nécessaire et suffisant que $AB + BA$ soit nul, mais alors il vient

$$A(AB + BA) = AB + ABA = 0 \quad A(AB + BA)A = 2ABA = 0$$

ABA est donc nul ainsi que AB et BA . Il vient ensuite, quels que soient les éléments f et g

$$(ABf, g) = (Bf, Ag) = 0$$

$\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont donc bien complètement orthogonales. Désignons par $M + N$ la multiplicité linéaire dont chaque élément est la somme d'un élément f de M et d'un élément g de N . Soit h un tel élément ; on a

$$Af = f; \quad Bf = BAf = 0; \quad Bg = g; \quad Ag = ABg = 0$$

puis

$$(A + B)(f + g) = Af + Bf + Ag + Bg = f + g; \quad (A + B)h = h$$

Ceci prouve que la multiplicité $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ est le domaine des valeurs de l'opérateur $A + B$, cette multiplicité est donc fermée, et on peut écrire

$$P_{\mathfrak{M}} + P_{\mathfrak{N}} = P_{\mathfrak{M} + \mathfrak{N}}$$

Théorème 3.1.9 *Les opérateurs de projection sont bornés.*

La relation $f = P_{\mathfrak{M}}f + h$, où h est orthogonal à $P_{\mathfrak{M}}f$ donne en effet

$$\|f\|^2 = \|P_{\mathfrak{M}}f\|^2 + \|h\|^2$$

et

$$\|P_{\mathfrak{M}}f\| \leq \|f\|$$

Théorème 3.1.10 $A_1, A_2, \dots, A_k$ étant des opérateurs de projection, la condition nécessaire et suffisante pour que $A_1 + A_2 + \dots + A_k$ soit un opérateur de projection est que tous les opérateurs $A_i A_j$ ($i \neq j$) soient nuls. Il est aussi nécessaire et suffisant pour cela que l'on ait, quel que soit f

$$\|A_1 f\|^2 + \|A_2 f\|^2 + \dots + \|A_k f\|^2 \leq \|f\|^2$$

Si $A_1 + A_2 + \dots + A_k$ est un opérateur de projection on a

$$\begin{aligned} \|A_1 f\|^2 + \dots + \|A_k f\|^2 &= (A_1 f, f) + (A_2 f, f) + \dots + (A_k f, f) \\ &= ([A_1 + A_2 + \dots + A_k] f, f) \\ &= \|(A_1 + \dots + A_k) f\|^2 \leq \|f\|^2 \end{aligned}$$

et la seconde condition est remplie ; si la seconde condition est remplie et si f est un élément tel que $A_m f = f$, on a ($m \neq \ell$)

$$\|f\|^2 + \|A_\ell f\|^2 = \|A_m f\|^2 + \|A_\ell f\|^2 \leq \|A_1 f\|^2 + \dots + \|A_k f\|^2 \leq \|f\|^2$$

et par suite $A_\ell f = 0$. Mais g étant un élément quelconque, on a $A_m(A_m g) = A_m g$, donc aussi $A_\ell(A_m g) = 0$, ce qui prouve que la première condition est remplie ; enfin, il est immédiat que si la première condition est remplie, $A_1 + A_2 + \dots + A_k$ est un opérateur de projection.

Définition 3.1.8 Soient $A = P_{\mathfrak{M}}$, $B = P_{\mathfrak{N}}$ deux opérateurs de projection, supposons la multiplicité $\mathfrak{M}$ contenue dans la multiplicité $\mathfrak{N}$; on écrira

$$A \leq B$$

Ce signe a toutes les propriétés du signe « plus petit que ».

Théorème 3.1.11 Si, entre deux opérateurs de projection A et B on a la relation $A \leq B$, on a aussi, quel que soit f

$$\|Af\| \leq \|Bf\|$$

Il est clair en effet, que si $A \leq B$, on a $A = AB$, et par suite

$$\|Af\| \leq \|A[Bf]\| \leq \|Bf\|$$

d'après le théorème (3.1.9).

3.2 Spectre d'un opérateur linéaire continu

Définition 3.2.1 (valeur propre et vecteur propre) [5] Soit $T \in \mathbb{L}(\mathbb{H})$, le nombre complexe λ est dit valeur propre de T s'il existe un vecteur x dans $\mathbb{H} - \{0_{\mathbb{H}}\}$ (s'appelle vecteur propre associé à λ) tel que

$$(T - \lambda I_{\mathbb{H}})x = 0, \quad Tx = \lambda x.$$

Définition 3.2.2 (ensemble résolvante) Soit $T \in \mathbb{L}(\mathbb{H})$, on dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient à l'ensemble résolvant de T si $T - \lambda I_{\mathbb{H}}$ est une bijection de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ et que $(T - \lambda I_{\mathbb{H}})^{-1} \in \mathbb{L}(\mathbb{H})$.

L'ensemble résolvant de T est noté $\rho(T)$, i.e.

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I_{\mathbb{H}} \text{ inversible}\}.$$

Définition 3.2.3 Soit $T \in \mathbb{L}(\mathbb{H})$, on appelle spectre de T , et on note $\sigma(T)$ le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de $\rho(T)$. Le spectre de T est donc l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda I_{\mathbb{H}}$ non inversible, ceci équivalant à définir $\sigma(T)$ comme l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda I_{\mathbb{H}}$ n'est pas bijective, i.e.

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I_{\mathbb{H}} \text{ non inversible}\}.$$

Remarque 3.2.1

$$\sigma(T) \cup \rho(T) = \mathbb{C}.$$

$$\sigma(T) \cap \rho(T) = \emptyset.$$

Définition 3.2.4 On appelle spectre ponctuel de T l'ensemble des valeurs propres de T , noté $\sigma_p(T)$ tel que

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : T - \lambda I_{\mathbb{H}} \text{ non injectif}\}.$$

Remarque 3.2.2 Lorsque $\mathbb{H}$ est dimension finie, alors $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.

Mais si $\mathbb{H}$ est dimension infinie, on a $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

Exemple 3.2.1 Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ défini par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

on a

$$\det(A - \lambda I_{M_2}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

$$\det(A - \lambda I_{M_2}) = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = -2.$$

Alors,

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{2, -2\}.$$

Définition 3.2.5 On appelle spectre continu de T , et on note par $\sigma_c(T)$, l'ensemble

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : T - \lambda I_{\mathbb{H}} \text{ injectif et } \overline{\text{Im}(T - \lambda I_{\mathbb{H}})} = \mathbb{H}\}.$$

Définition 3.2.6 On appelle spectre résiduel de T , et on note par $\sigma_r(T)$, l'ensemble

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : T - \lambda I_{\mathbb{H}} \text{ injectif et } \overline{\text{Im}(T - \lambda I_{\mathbb{H}})} \neq \mathbb{H}\}.$$

Remarque 3.2.3 Le spectre $\sigma(T)$ est la réunion disjointe de trois ensembles

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Théorème 3.2.1 Le spectre de tout opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$

Preuve.

Le spectre de T est borné car si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $T - \lambda I_d$ est inversible. En effet, $\lambda I_d - T = \lambda(I_d - T/\lambda)$ avec $\|T\|/\lambda < 1$. D'où $(I_d - T/\lambda)^{-1} = \sum_{n \geq 0} T^n/\lambda^n$, car on vérifie que

$$(I_d - T/\lambda) \sum_{n \geq 0} T^n/\lambda^n = Id = \left(\sum_{n \geq 0} T^n/\lambda^n \right) (I_d - T/\lambda)$$

Pour montrer que $\sigma(T)$ est fermé, on va montrer que $\mathcal{R}(T)$ est ouvert. Pour cela, on montre tout d'abord que $\text{Inv}(\mathcal{L}(H)) := \{S \in \mathcal{L}(H) : \text{inversible}\}$ est ouvert. On observe tout d'abord que si $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifie $\|T \cdot Id\| < 1$, alors T est inversible. En effet $T = Id + (T - Id) = Id \cdot H$ où $\|H\| < 1$, ce qui implique que $T^{-1} = \sum_{n \geq 0} H^n$, la série des normes étant convergente. Soit à présent $T_0 \in \text{Inv}(\mathcal{L}(H))$ et soit T tel que $\|T_0 - T\| < 1/\|T^{-1}\|$. Alors $T \in \text{Inv}(\mathcal{L}(H))$. En effet, $T = T_0 T_0^{-1} T$ avec

$$\|T_0^{-1} T - Id\| = \|T_0^{-1} T - T_0^{-1} T_0\| \leq \|T_0^{-1}\| \|T - T_0\| < 1$$

Ainsi, $T_0^{-1} T$ est inversible, ce qui implique aussi que $T = T_0 T_0^{-1} T$ l'est aussi. Ceci achève la preuve du fait que $\text{Inv}(\mathcal{L}(H))$ est ouvert.

Considérons à présent l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ définie par $f(\lambda) = \lambda I_d - T$. Alors f est continu et $\mathcal{R}(T) = f^{-1}(\text{Inv}(\mathcal{L}(H)))$. Ainsi $\mathcal{R}(T)$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une fonction continue. Nous pouvons en conclure que $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{C}$. Vérifions que $\sigma(T)$ est non vide. Pour cela on va utiliser **l'identité de la résolvante** : si λ et λ_0 sont dans $\mathcal{R}(T)$, alors

$$(T - \lambda I_d)^{-1} - (T - \lambda_0 I_d)^{-1} = (\lambda - \lambda_0) (T - \lambda I_d)^{-1} (T - \lambda_0 I_d)^{-1}$$

Cette identité se démontre très facilement en remarquant que

$$(T - \lambda I_d) \left((T - \lambda I_d)^{-1} - (T - \lambda_0 I_d)^{-1} \right) (T - \lambda_0 I_d) = T - \lambda_0 I_d - T + \lambda I_d = (\lambda - \lambda_0) I_d$$

Par conséquent

$$\text{frac}(T - \lambda I_d)^{-1} - (T - \lambda_0 I_d)^{-1} \lambda - \lambda_0 = (T - \lambda I_d)^{-1} (T - \lambda_0 I_d)^{-1}$$

qui converge vers $(T - \lambda_0 I_d)^{-2}$ lorsque λ tend vers λ_0 . Ainsi $z \mapsto (T - z I_d)^{-1}$ est une fonction holomorphe de $\mathcal{R}(T)$ dans $\mathcal{L}(H)$. Supposons que $\sigma(T) = \emptyset$, ce qui implique $\mathcal{R}(T) = \mathbb{C}$. Dans ce cas $z \mapsto (T - z I_d)^{-1}$ est une fonction entière. De plus, si $|z| > \|T\|$,

$$(z I_d - T)^{-1} = (z(I_d - T/z))^{-1} = \frac{1}{z} \left(\sum_{n \geq 0} T^n / \lambda^n \right)$$

Par conséquent

$$\|(z I_d - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|z|} \frac{1}{1 - \|T\|/|z|} = \frac{1}{|z| - \|T\|}$$

En particulier, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \|(z I_d - T)^{-1}\| = 0$. La fonction entière $z \mapsto (z I_d - T)^{-1}$ est donc une fonction entière et bornée. Nous allons appliquer le théorème de Liouville, vu pour les fonctions complexes.

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(H)^*$. Posons $f_\varphi(z) = \varphi((T - z I_d)^{-1})$ fonction holomorphe de $\mathcal{R}(T) = \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et bornée, par continuité de φ . D'après le théorème de Liouville, f_φ est constante et donc identiquement nulle car $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \varphi((T - z I_d)^{-1}) = 0$. Comme $f_\varphi = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(H)^*$, $z \mapsto (T - z I_d)^{-1}$ est aussi identiquement nulle, puisque $\|(T - z I_d)^{-1}\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{L}(H)^*, \|\varphi\| \leq 1} |\varphi((T - z I_d)^{-1})|$. On obtient une contradiction, qui implique que le spectre de T est nécessairement non vide.

Nous allons à présent établir le théorème spectral suivant.

Théorème 3.2.2 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$*

1. *Si T est inversible, alors $\sigma(T^{-1}) = \{1/\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$*
2. *$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$ pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$*

Preuve.

1. Soit $\lambda \in \sigma(T^{-1})$. Comme T^{-1} est inversible, nécessairement $\lambda \neq 0$. Comme $T^{-1} - \lambda I_d$ est non inversible et comme $T^{-1} - \lambda I_d = \lambda T^{-1} \left(\frac{1}{\lambda} I_d - T \right)^{-1}$ l'opérateur $\left(\frac{1}{\lambda} I_d - T \right)^{-1}$ est non inversible, i.e. $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T)$. On a donc montré que $\sigma(T^{-1}) \subset \sigma(T)^{-1} := \{1/\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$. En échangeant le rôle de T et T^{-1} on obtient l'inclusion réciproque $\sigma(T)^{-1} \subset \sigma(T^{-1})$, ce qui achève la preuve de la première assertion.
2. Montrons tout d'abord que $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$. Soit $\lambda \in \sigma(T)$. Comme le polynôme $p(X) - p(\lambda)$ s'annule en λ , il existe un polynôme q tel que $p(X) - p(\lambda) = (X - \lambda)q(X)$, ce qui donne

$$p(T) - p(\lambda)Id = (T - \lambda Id)q(T)$$

Si $p(T) - p(\lambda)Id$ était inversible, $(T - \lambda Id)$ serait aussi inversible, d'inverse $(p(T) - p(\lambda)Id)^{-1}q(T)$, ce qui est contraire aux hypothèses. On obtient donc que $p(\lambda) \in \sigma(p(T))$, montrant que $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$. Montrons ensuite que $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$. Si p est identiquement nul, l'inclusion est trivialement vérifiée. Soit $\lambda \in \sigma(p(T))$. On factorise dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $p(X) - \lambda$ sous la forme :

$$p(X) - p(\lambda) = \alpha (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n)$$

où les $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ désignent les racines de $p(X) - \lambda$, et où $\alpha \neq 0$ car p est non identiquement nul. Si pour tout $i = 1, \dots, n$ l'opérateur $T - \alpha_i Id$ est inversible, $p(T) - \lambda Id$ est aussi inversible. Par conséquent il existe un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $T - \alpha_i Id$ est non inversible, i.e. $\alpha_i \in \sigma(T)$. On en déduit que $\lambda = p(\alpha_i) \in p(\sigma(T))$, prouvant que $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$.

Le dernier résultat que nous allons établir concerne le calcul explicite du module du plus grand élément du spectre, appelé le **rayon spectral**.

Théorème 3.2.3 Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors $\sigma(T) \subset \overline{D}(0, \rho(T))$ où $\rho(T)$ est défini par $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ et est aussi égal à $\inf_{n \geq 0} \|T^n\|^{1/n}$, qui coïncide aussi avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$.

Preuve.

Notons $\alpha := \inf_{n \geq 0} \|T^n\|^{1/n}$. Soit $\lambda \in \sigma(T)$. D'après la seconde assertion du Théorème (3.2.2), $\lambda^n \in \sigma(T_n)$. Ainsi $|\lambda^n| \leq \|T^n\|$, ce qui implique $|\lambda| \leq \|T^n\|^{1/n}$. Ainsi $\rho(T) \leq \alpha := \inf_{n \geq 1} \|T^n\|^{1/n}$. De plus

$$\alpha \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$$

Il suffit donc de montrer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \rho(T)$$

Pour cela nous allons utiliser la théorie des fonctions holomorphes et des séries entières. Notons Ω le disque ouvert centré en 0 et de rayon $\frac{1}{\rho(T)}$, avec la convention

$\Omega = \mathbb{C}$ si $\rho(T) = 0$. Considérons la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(H)$ définie par $f(0) = 0$ et $f(\lambda) = \left(T - \frac{1}{\lambda} Id\right)^{-1}$ pour tout $\lambda \in \Omega \setminus \{0\}$. La fonction f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{0\}$ et nous avons déjà

remarqué dans la preuve du Théorème (3.2.1) que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\lambda) = 0$. La fonction f est donc continue sur Ω , ce qui implique que f est en fait holomorphe sur Ω . De plus, si $0 < |\lambda| < \frac{1}{\|T\|}$, on a

$$f(\lambda) = -\lambda(I_d - \lambda T)^{-1} = -\lambda \sum_{n \geq 0} \lambda^{n+1} T^n$$

égalité qui reste trivialement vraie pour $\lambda = 0$. Par conséquent, si $|\lambda| < \frac{1}{\|T\|}$, $f(\lambda) = -\lambda \sum_{n \geq 0} \lambda^{n+1} T^n$. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \lambda^{n+1} T^n$. Comme f est holomorphe sur Ω , $R \geq \text{dist}(0, \Omega^c) = \frac{1}{\rho(T)}$. De plus, d'après la formule d'Hadamard

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$$

Finalement $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \rho(T)$, ce qui achève la preuve du théorème.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié les caractérisations fondamentales des opérateurs linéaires continus d'un espace vectoriel normé ou de Hilbert vers autre espace vectoriel normé ou de Hilbert . On a commencé par quelques préliminaires sur les espaces linaires et les ensembles linéairement indépendants ,sous-espaces engendrés. On mets l'accent sur quelques notions sur les espaces normés et espaces de Hilbert. Dans le chapitre deux ,on présente les définitions et les propriétés générales des opérateurs linéaires continus d'un espace vectoriel normé ou de Hilbert vers autre espace vectoriel normé ou de Hilbert . On donne quelques exemples des opérateurs linéaires continus inversibles.. Dans chapitre trois de ce travail nous avons apporté deux applications différentes illustrées dans le domaine de la théorie des opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert vers autre espace de Hilbert. La première application concerne l'étude des opérateur associés à un opérateur linéaire, et leurs propriétés structurelles. Les opérateurs de projection et leur étude est important car ils constituent les éléments simples en lesquels se décomposent évidemment les opérateurs hermitiens. La deuxième application s'est occupée sur l'étude des valeurs propres d'un opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert dans autre espace de Hilbert, nous sommes intéressés à savoir pour quels valeurs propres l'opérateur résolvant associé sera inversible.

Bibliographie

- [1] H. Boccara. *Analyse Fonctionnelle, Edition Marketing*, 1984.
- [2] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle Théorie et Applications*, 1987.
- [3] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, 2010.
- [4] A. Dold, B. Eckmann. *Lecture Notes in Mathematics*, 1975.
- [5] W. Hengartner, M. Lambert, C. Reischer. *Introduction à L'analyse Fonctionnelle*, 1981.
- [6] W.V. Lovitt. *Linear Intégral Équation* , 1950.
- [7] B. Lucquin. *Équations aux Dérivées Partielles et leurs Approximations*, Ellipses, 2004.
- [8] J. Marsden, T. Lance, S. Gelbart. *Lectures on Analysis*, 1969.
- [9] L. Pierre. *Introduction La théorie Spectrale*, 2003.
- [10] W. Rudin. *Analyse Réelle et Complexe*, 1987.
- [11] P. Rynne, A. Youngson. *Linear Analysis Functional*, 2008.
- [12] L. Schwartz. *Analyse 1, théorie des ensembles et topologie*, 1997.

Résumé :

Dans ce mémoire on expose quelques connaissances et propriétés principales des opérateurs linéaires continus d'un espace vectoriel normé ou de Hilbert vers autre espace vectoriel normé ou de Hilbert . On a commencé par quelques préliminaires sur les espaces métriques ,et les espaces de Hilbert . Le deuxième chapitre de ce mémoire est consacrée à l'étude des propriétés fondamentales générales des opérateurs linéaires continus d'un espace vectoriel nor .

mé ou de Hilbert vers autre espace. Le troisième chapitre de ce mémoire est consacrée aux deux projets applications sur les opérateurs linéaires continus d'un espace vectoriel normé ou de Hilbert vers autre. La première application concerne l'étude des propriétés générales d'un ensemble nouvel des opérateurs linéaires continus s'appellent opérateurs linéaires associés des opérateurs linéaires continus sur un Hilbert. La deuxième application s'occupe principalement sur l'étude des valeurs propres des opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert dans autre espace de Hilbert, nous sommes intéressés à savoir pour quels valeurs propres l'opérateur linéaire résolvant associé est inversible.

Mots-Clés :

Opérateur linéaire bornée Continues, Espaces de Banach, Espaces de Hilbert, Produit scalaire. Norme, Opérateur inversible, Opérateur adjoint.

Abstract :

In this memorial we expose a few basic facts and fundamental properties of continuous linear operator from normed spaces (or Hilbert space) to other normed spaces (or Hilbert space) . We start by exposing a few preliminaries on metrics spaces and Hilbert . The second .

chapter of this memorial is specified to study the general and fundamental properties on linear continuous operators from normed spaces (or Hilbert space) to other from normed spaces (or Hilbert space) to other . The third chapter of this memorial is to make use of two .

projects works and applications off linear continuous operators from normed spaces (or Hilbert space) to other . The first application concerne the study of new set of linear continuous operator which called associated continuous linear operator from Hilbert space to other . The second application is to invest some proprieties of eigen values of continuous linears operators we assai to known . How can the linear operator resolvant operator to be inversible.

Key-words :

Piezoelectricity , normal compliance , evolutionary inequality, fixed point, existence , uniqueness . Bounded Linear Operator. Continuous . Banach spaces . Hilbert spaces . Inner products. Norm. Inverse of Operator. The adjoint of an Operator.

ملخص :

في هذه المذكرة استعرضنا بشيء من التفصيل الى الخواص الاساسية للمؤثرات الخطية المستمرة من فضاء نظيمى او هيلبرتي نحو فضاء اخر نظيمى او هيلبرتي . بدأنا بالتطرق الى بعض المفاهيم حول الفضاءات المترية و فضاءات هيلبرت ، الفصل الثاني خصصناه للحديث بالتفصيل عن الخواص الاساسية للمؤثرات الخطية المستمرة من فضاء نظيمى او هيلبرت نحو آخر ، الفصل الثالث خصصناه لمشروع تطبيقى عمليين على المؤثرات الخطية المستمرة من فضاء نظيمى او هيلبرتي نحو فضاء اخر ، التطبيق الاول هو دراسة خواص مجموعة جديدة من المؤثرات الخطية المستمرة تدعى بالمؤثرات المرفقة لمؤثرات خطية مستمرة على فضاء هيلبرتي ، التطبيق العملي الثاني هو دراسة مفصلة لما يعرف بالقيم الذاتية الاساسية للمؤثرات الخطية المستمرة و حاولنا الاجابة على الشروط التي تحققها بحيث المؤثر الخطي الحال العكوس .

الكلمات المفتاحية :

مؤثر خطي محدود و مستمر ، فضاء بناخ ، فضاء هيلبرت ، جداء السلمى ،نظيم ، مؤثر العكوس ، مؤثر القرين