الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

رقم الترتيب:...............
رقم التسلسل:...............

جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي
كلية العلوم الدقيقة
قسم الفيزياء

مذكرة تخرج مقدمة لنيل شهادة

ماستر أكاديمي

مجال: علوم المادة
تخصص: فيزياء تطبيقية إشعاعات و طاقة

من إعداد:
فاضل سارة

الموضوع

الأنظمة الكمية المفتوحة

نوقشت يوم: 22-06-2019

أمام لجنة المناقشة المكونة من الأساتذة:

سوداني شيرين	أستاذ مساعد أ	رئيسا
احميم رشيد	أستاذ محاضر ب	مناقشا
ضو جمال	أستاذ تعليم عال	مؤطرا

الموسم الجامعي: 2019/2018

الفهرس

إهداء

إلى من جرع الكأس فارغاً ليسقيني قطرة حب
إلى من كلّت أنامله ليقدم لنا لحظة سعادة
إلى من حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلم
إلى القلب الكبير (والدي العزيز)

إلى من أرضعتني الحب والحنان
إلى رمز الحب وبلسم الشفاء
إلى القلب الناصع بالبياض (والدتي الحبيبة)

إلى القلوب الطاهرة الرقيقة والنفوس البريئة إلى رياحين حياتي (إخوتي)

إلى الروح التي سكنت روحي (زوجي)

الآن تفتح الأشرعة وترفع المرساة لتنطلق السفينة في عرض بحر واسع مظلم هو بحر الحياة وفي هذه الظلمة لا يضيء إلا قنديل الذكريات ذكريات الأخوة البعيدة إلى الذين أحببتهم وأحبوني (صديقاتي)

شكر و عرفان

الحمد لله على إحسانه و الشكر له على توفيقه و إمتنانه على إتمام إنجاز هذا العمل
ونشهد أن لا إله إلا الله وحده لا شريك له تعظيما لشأنه
و نشهد أن سيدنا و نبينا محمد عبده و رسوله الداعي إلى رضوانه
صلى الله عليه و على آله و أصحابه و أتباعه و سلم.

في مثل هذه اللحظات يتوقف اليراع ليفكر قبل أن يخط الحروف ليجمعها في كلمات
تتبعثر الأحرف وعبثاً أن يحاول تجميعها في سطور
لأتوجه بالشكر الجزيل إلى من شرفني بإشرافه على مذكرتي الأستاذ " جمال ضو"
الذي لن تكفي حروف هذه المذكرة لإيفائه حقه بصبره الكبير علي
ولتوجيهاته العلمية التي لا تقدر بثمن؛ و التي ساهمت بشكل كبير في إتمام
و إستكمال هذا العمل

كما أتقدم بجزيل الشكر والامتنان للجنة المناقشة
ولكل أساتذة وطقم قسم الفيزياء بجامعة حمة لخضر كل باسمه،
وأخص بالذكر الأستاذ "رحال عاشور"
لكل من أوقد لي شمعة أمل حين اليأس
لمن ساعدني وأرشدني
ولكل من قدم لي يد العون ولو بكلمة طيبة.

قائمة الأشكال

المقدمة العامة

المقدمة العامة

في نهاية القرن التاسع عشر، بدا علم الفيزياء عقيما، فقد سلم البشر أن النظريات العامة للمادة والإشعاع التي تحكمها الميكانيكا الكلاسيكية، النظرية الكهرومغناطيسية والديناميكا الحرارية يمكنها تفسير جميع الظواهر الفيزيائية. إلى أن ظهرت تحديات كثيرة زعزعت الفيزياء الكلاسيكية، أهمها: المجال النسبوي(نظرية النسبية لأينشتاين (Einstein) عام 1905) والمجال الميكروسكوبي(التحقق من النتائج التجريبية للتركيب الذري و ما تحت الذري). مما أدى إلى وجوب استحضار مفاهيم جديدة، وظهور بوادر ثورة جديدة: الميكانيكا الكمومية. [1]

الميكانيكا الكمومية هي جوهر فهمنا الحالي لقوانين الفيزياء، وهي النظرية الفيزيائية الأساسية وتتميز بطبيعتها الاحتمالية، أي أن جميع التنبؤات المستمدة من الميكانيك الكمومي لها طابع احتمالي. كما أنه على حد علمنا، لا توجد نظرية حتمية أساسية يمكن من خلالها استنتاج الاحتمالات الكمومية مثلما هو الحال مع فيزياء الاحصاء الكمومي [2].

جرت العادة دراسة ديناميكيات الأنظمة الكمومية باعتبارها أنظمة معزولة، أي بإهمال جميع التأثيرات الخارجية على النظام قيد الدراسة. حيث تحكم ديناميكياتها معادلة شرودينجر، وتخضع للتطور الواحدي. لكن في الحقيقة، هذه الأنظمة تتبادل المعلومات أو الطاقة مع المحيط الخارجي، لذا يجب اعتبار الأنظمة الكمومية مفتوحة. ويعود ذلك إلى حقيقة كون أن، وكما هو الحال في الفيزياء الكلاسيكية ، أي نظام حقيقي يقترن ببيئة أكبر لا يمكن التحكم فيها والتي تؤثر عليه بطريقة لا يمكن اهمالها [2].تعتبر نظرية الأنظمة الكمومية المفتوحة العمود الفقري لجميع الأبحاث الحديثة تقريبا في الميكانيكا الكمومية وتطبيقاتها [3]. نظرا لأن العزل التام للأنظمة الكمومية غير ممكن من جهة، ومن جهة أخرى لأن الوصف المجهري الكامل أو التحكم في درجات الحرية للمحيط غير ممكن أو ممكن جزئيا فقط. إن معظم الأنظمة المثيرة للاهتمام والدراسة معقدة للغاية لدرجة لا يمكن وصفها في الممارسة العملية عن طريق القوانين الفيزيائية المجهرية الأساسية. يمكن أن نقول أكثر من ذلك : إن المنهج أو الطريق المجهري ليس مستحيلا فحسب، بل إنه لا يوفر ما نود معرفته حقا حول المشكلة أيضا، وحتى لو كان حل معادلات التطور المجهري ممكنا، فإنه سيعطي كمية مستعصية من المعلومات، والجزء الأكبر منها عديم الفائدة أي لا طائل منه لوصف معقول [2]. في بعض الأحيان تكون تأثيرات النظام المفتوح صغيرة، ومع ذلك لا يمكن اهمالها. هذا مهم بشكل خاص في مجال معالجة المعلومات الكمومية. حيث غالبا ما يتم اشتقاق أي معالجة كمومية أولا من منظور نظام مغلق مثالي، ومن ثم يتم إعادة التدقيق في إعداد النظام الواقعي المفتوح [3].

لذلك وجب البحث عن وصف احتمالي أكثر بساطة وفعالية لديناميكيات الأنظمة الكمومية المفتوحة. حيث أن استخدام نظرية الاحتمالات يسمح بمعالجة أنظمة معقدة تشمل عدد كبير أو لا نهاية من درجات الحرية.
هناك سبب آخر لاستحضار فكرة النظام المفتوح في النظرية الكمومية، حيث تحكم ديناميكيات توزيعات الاحتمالات في النظرية الكمومية معادلة شرودينجر، تصف هذه المعادلة تطور الصدفة، وهي ديناميكيات مجموعات الأنظمة المعزولة. للتأثير على وقوع أحداث الصدفة، يجب إخضاع النظام الكمومي للتفاعلات مع محيطه. أي اختبار تجريبي للتنبؤات الاحصائية على النظام الكمومي يتطلب اقترانه بجهاز قياس الذي بدوره يؤدي عموما إلى تأثيرات غير مهملة على النظام الكمومي الذي يتم قياسه. وبالتالي، تتضمن الميكانيكا الكمومية في حد ذاتها علاقة حميمة بمفهوم النظام المفتوح من خلال إجراء عملية القياس [2].

إن النظام الكمومي المعزول يعتمد على مؤثر التطور الواحدي، في حين أن تطور نظام كمومي مفتوح سيعتمد على التطبيقات

الديناميكية، صعوبة التعامل معها أدى إلى اللجوء إلى التطبيقات الديناميكية الكونية التي بدورها تعاني صعوبات أخرى مما أوجب البحث عن تقريبات أخرى تكون أكثر سلاسة في التعامل معها، ويعد التقريب الماركوفي أحسن تقريب.

يهدف هذا العمل لتقديم الأسس الرياضية والفيزيائية للأنظمة الكمومية المفتوحة، وقد تمت هيكلته وفق ثلاثة فصول:

الفصل الأول يقدم تذكيرا بأساسيات وصف ديناميكيات النظام الكمومي المغلق و يناقش تطوره الزمني، ويوضح الخصائص العامة لديناميكيات الأنظمة الكمومية المفتوحة وخصائصها الرياضية.

أما الفصل الثاني فيتطرق إلى العملية الماركوفية الكلاسيكية (الاحتمالات الكلاسيكية) و المعادلة التفاضلية للتطور الماركوفي الكمومي.

أما الفصل الأخير فيعالج مجهريا الديناميكيات الكمومية الماركوفية، حيث يتم اشتقاق معادلة ناكاجيما-زوانزيغ وتفصيل حد الاقتران الضعيف.

الفصل الأول

الأنظمة الكمية المفتوحة

الفصل 1

التطور الزمني للأنظمة الكمومية المفتوحة

1.1 تمهيد:

من المستحيل عموما عزل أي نظام كمومي تماما. فهو يرتبط بشكل لا يمكن تجاهله ببيئة أكبر، وحتى لو كان هذا التفاعل ضعيفا، فيجب أن نأخذ بعين الإعتبار تأثير البيئة الخارجية على ديناميكيات هذا النظام، وبالتالي اعتباره نظاما كموميا مفتوحا. قبل أن نشرع في تطوير وصف الأنظمة الكمومية المفتوحة، يجب التذكير أولا بالأنظمة الكمومية المغلقة.

2.1 تذكير حول الأنظمة الكمومية المغلقة:

إن التطور الزمني للأنظمة الفيزيائية هو العامل الأساسي لفهم طبيعة وخصائص هذه الأنظمة. ففي الأنظمة الكلاسيكية عادة ما يصاغ على شكل معادلات تفاضلية (مثل: معادلات أولر، لاغرانج، معادلات هاملتون ومعادلة ليوفيل ..الخ). وهذا ما جعل الفيزيائيين يبحثون عن وسيلة يمكن من خلالها وصف الخواص الديناميكية للأنظمة الكمومية، أي البحث عن قانون فيزيائي عام يسمح بالتنبؤ بما ستكون عليه حالة النظام في لحظة ما t، قانون ينطبق على جميع الأنظمة الفيزيائية الكمومية. وتم الحصول على أول معادلة تطور كمومية في عام 1926 من طرف العالم شرودينجر (Schrödinger) ، المعادلة التي سميت بإسمه. وهي تصف سلوك نظام كمومي معزول، أي لا يتبادل الطاقة أو المادة مع نظام آخر، بإختصار: نظام كمومي مغلق. إذا كان نظام في حالة نقية $|\psi(t)\rangle$ في اللحظة t، فإن التطور الزمني لهذه الحالة يعطى بمعادلة شرودينجر كالتالي [5,4]:

$$\frac{d\,|\psi\rangle\,(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H(t)|\psi(t)\rangle \tag{1.1}$$

حيث $H(t)$ هو مؤثر هاملتون النظام.

بصفة أعم، حالة النظام توصف بمؤثر الكثافة: ρ . الذي يعرّف في الحالة مختلطة بـ:

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i\,|\psi_i(t)\rangle\,\langle\psi_i(t)| \tag{2.1}$$

حيث $\{|\psi_i(t)\rangle\}$ هي الحالات الموجودة في المجموعة المختلطة وهي حالات منظمة إلى الوحدة لكنها ليست متعامدة بالضرورة، أما $\{w_i\}$ فهي الأوزان الاحتمالية لتلك الحالات حيث: $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. في الحالة النقية يكون هناك وزن احتمالي واحد بحيث: $w_1 = 1$ وبالتالي مؤثر الكثافة يمثل مسقطا:

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\,\langle\psi(t)| \tag{3.1}$$

دراسة التطور الزمني لمؤثر الكثافة يعطي:
في الحالة المختلطة:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}(\sum_{i=1}^{n} w_i \left|\psi_i(t)\right\rangle \left\langle\psi_i(t)\right|) \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i(\frac{d}{dt}\left|\psi_i(t)\right\rangle \left\langle\psi_i(t)\right| + \left|\psi_i(t)\right\rangle \frac{d}{dt}\left\langle\psi_i(t)\right|) \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i(-\frac{i}{\hbar}H(t)\left|\psi_i(t)\right\rangle \left\langle\psi_i(t)\right| + \frac{i}{\hbar}\left|\psi_i(t)\right\rangle \left\langle\psi_i(t)\right| H(t)) \\
&= -\frac{i}{\hbar}H(t)\sum_{i=1}^{n} w_i \left|\psi_i(t)\right\rangle \left\langle\psi_i(t)\right| + \frac{i}{\hbar}\sum_{i_1}^{n} w_i \left|\psi_i(t)\right\rangle \left\langle\psi_i(t)\right| H(t) \\
&= -\frac{i}{\hbar}(H(t)\rho - \rho H(t)) = -\frac{i}{\hbar}[H(t), \rho]
\end{aligned} \tag{4.1}$$

نفس النتيجة نحصل عليها في الحالة الخاصة -الحالة النقية- وهي أبسط من الحالة المختلطة. ومنه فإن المعادلة (1.1) تصبح:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H(t), \rho(t)] \tag{5.1}$$

يطلق على هذه المعادلة: معادلة فان-نيومن
أو معادلة ليوفيل-فان-نيومن. وتؤخذ هذه المعادلة كمسلمةإلى جانب مسلمات الميكانيكا الكمومية الأخرى، بسبب توافقها مع الإختبارات التجريبية. [4]

1.2.1 حل معادلة شرودينغر:

الهدف الأساسي من حل معادلة شرودينغر هو معرفة كيف تتغير دالة الحالة $\left|\psi(t)\right\rangle$ مع الزمن. بمكاملة العلاقة (1.1) بالنسبة للزمن من $t_0 = 0$ إلى t نجد:

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \left|\psi(0)\right\rangle + \frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt' H(t') \left|\psi(t')\right\rangle \tag{6.1}$$

نواصل مكاملة العلاقة (6.1) بالتعويض المتعاقب:

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \left|\psi(0)\right\rangle + \frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt_1 H(t_1)(\left|\psi(0)\right\rangle + \frac{1}{i\hbar}\int_0^{t_1} dt_2 H(t_2)\left|\psi(t_2)\right\rangle) \tag{7.1}$$

وهكذا دواليك حتى نحصل على العلاقة:

$$\begin{aligned}
\left|\psi(t)\right\rangle = (\mathbb{1} &+ \frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt_1 H(t_1) + \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 H(t_1)H(t_2) \\
&+ \frac{1}{(i\hbar)^3}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 H(t_1)H(t_2)H(t_3) + ...) \left|\psi(0)\right\rangle
\end{aligned} \tag{8.1}$$

نعرض المعادلة الأخيرة على الصورة التالية:

$$\left|\psi(t)\right\rangle = U(t, t_0)\left|\psi(0)\right\rangle \tag{9.1}$$

حيث المؤثر $U(t,t_0)$ يسمى مؤثر التطور، عبارته هي: [6]

$$\begin{aligned} U(t,t_0) &= \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt_1 H(t_1) + \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 H(t_1)H(t_2) \\ &+ \frac{1}{(i\hbar)^3}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 H(t_1)H(t_2)H(t_3) + ... \\ &= \sum_n \frac{1}{(i\hbar)^n}\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 ... \int_{t_0}^{t_n-1} dt_n H(t_1)H(t_2)...H(t_n) \end{aligned} \tag{10.1}$$

حيث:

$$U(t_0,t_0) = \mathbb{1} \tag{11.1}$$

خصائص مؤثر التطور:

1. يحقق مؤثر التطور العلاقة التالية:

$$i\hbar\frac{\partial U(t)}{\partial t} = H(t)\,U(t) \tag{12.1}$$

وهي ليست معادلة شرودينجر، فمعادلة شرودينجر لشعاع أو حالة، أما هذه فهي معادلة لمؤثر.

2. المؤثر $U(t)$ أحادي

$$\begin{aligned} \langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|\,U^\dagger(t,t_0)\,U(t,t_0)\,|\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = 1 \\ \Rightarrow U^\dagger(t,t_0)\,U(t,t_0) = \mathbb{1} \Rightarrow U^\dagger(t,t_0) = U^{-1}(t,t_0) \end{aligned} \tag{13.1}$$

من ناحية أخرى، فإن مؤثر كثافة حالة نقية يعطى بـ:

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\,\langle\psi(t)| = U(t,t_0)\,|\psi(0)\rangle\,\langle\psi(0)|\,U^\dagger(t,t_0) = U(t,t_0)\rho(0)\,U^\dagger(t,t_0) \tag{14.1}$$

نعيد صياغة المعادلة الأخيرة باستعمال الترميز التالي:

$$\rho(t) = \,U_{(t,t_0)}[\rho(t_0)] \tag{15.1}$$

حيث: $U_{(t,t_0)}$ هو مؤثر خطي واحدي، يؤثر بالشكل التالي:

$$U_{(t,t_0)}[.] = \,U(t,t_0)[.]\,U^\dagger(t,t_0) \tag{16.1}$$

شكل مؤثر التطور:

يعتمد شكل مؤثر التطور على خصائص الهاملتون، ويمكن تصنيفها إلى حالتين:

1. إذا كان هاملتون النظام مستقلا عن الزمن، يعطى حل المعادلة (12.1) بالعبارة التالية:

$$U(t,t_0) = e^{(\frac{H(t-t_0)}{i\hbar})} \tag{17.1}$$

$$i\hbar\frac{\partial U(t)}{\partial t} = i\hbar\frac{H}{i\hbar}e^{(\frac{H(t-t_0)}{i\hbar})} \Rightarrow i\hbar\frac{\partial U(t)}{\partial t} = H(t)\,U(t) \tag{18.1}$$

2. إذا كان هاملتون النظام غير مستقل عن الزمن، تصنف إلى حالتين:

(ا) إذا كان هاملتون النظام في لحظتين مختلفتين متبادلين أي: $[H(t), H(t')] = 0$ فإن الحل يعطى على الشكل : (لاحظ الملحق 1.)

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H(s)ds} \quad (19.1)$$

(ب) إذا كان هاملتون النظام في لحظتين مختلفتين غير متبادلين أي: $[H(t), H(t')] \neq 0$ فإن الحل يكتب كإمتداد دايسون على الشكل: (لاحظ الملحق 2.)

$$U(t, t_0) = \mathcal{T} e^{\frac{-i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H(s)ds} \quad (20.1)$$

نعود الآن للمعادلة (5.1):

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H(t), \rho(t)] = \mathcal{L}[\rho(t_0)] \quad (21.1)$$

حيث: المولد $\mathcal{L}[.]$ يعطى بالعبارة: $\mathcal{L}[.] = -i[H(t), .]$ ويطلق عليه اسم $Liouvillian$. بنفس الطريقة المتبعة في (ب) نجد:

$$\rho(t) = U_{(t,t_0)}\rho(t_0) = \mathcal{T} e^{\int_{t_0}^{t} \mathcal{L}_{t'}dt'}\rho(t_0) \quad (22.1)$$

3.1 الأنظمة الكمومية المفتوحة

بعد أن حددنا المعادلات الأساسية التي تحكم في التطور الزمني للأنظمة الكمومية المغلقة، دعونا الآن نعود للأنظمة الكمومية المفتوحة. بصفة عامة، نظام مفتوح، هو نظام يتفاعل مع البيئة المحيطة به. في الأنظمة الفيزيائية الحقيقية، نعتبر البيئة المحيطة بكل بساطة هي بقية العالم. بشكل أدق نعتبر نظام كمومي A مقترن بنظام كمومي آخر B يدعى 'المحيط'. أي أنه يمثل نظام جزئي من النظام الإجمالي $A+B$، نرمز له بـT. النظام T يملك فضاء هيلبرت الموافق له $H_T = H_A \otimes H_B$ ، حيث H_A هو فضاء هيلبرت الموافق للنظام A، وH_B هو فضاء هيلبرت الموافق للنظام B.حيث يعتبر النظام الكلي $T = A \cup B$ في أغلب الحالات نظاما مغلقا. ومنه فإن تطوره الزمني واحدي [7,2]. السؤال الذي نريد الإجابة عنه هو: ماهي الخصائص التطور الزمني لكل نظام جزئي؟

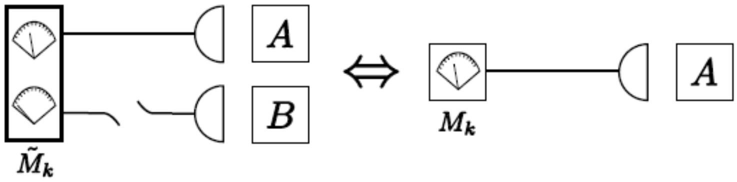
في البداية يجب علينا تحديد العلاقة بين مصفوفة الكثافة الإجمالية ρ ومصفوفة الكثافة للنظام الجزئي A والتي تعطى بالأثر الجزئي على النظام B [4]:

$$\rho_A \;=\; \mathrm{tr}_B(\rho) \quad (23.1)$$

لنفترض الآن أننا لا نرى النظام B ونرى حالة النظام A ، الذي يتم قياسه بواسطة مجموعة من المؤثرات الهرميتية الموجبة: $\{M_k\}$ وكل منهم مرتبط بنتيجة محتملة k . ومنه احتمال الحصول على النتيجة k عندما نقيس على $\{M_k\}$ هو :

$$p_A(k) = \mathrm{tr}(M_k\rho_A) \quad (24.1)$$

إذا افترضنا أننا نرى فقط النظام A من خلال قياس M_k فنحن في الحقيقة نرى جزءا ممتدا لـT عبر قياس $\{\tilde{M}_k\}$ ،وبالتالي من أجل حالة من الأنظمة المركبة ρ المتوافقة مع ρ_A ، يمكن كتابة الاحتمال على الشكل(أنظر الشكل(1.1)حيث على



شكل 1.1: تكافؤ قياس M_k على النظام A و قياس $\tilde{M}_k$ على النظام $A+B$

الجانب الأيسر نقوم بإجراء قياس على النظام المدمج A و B وهو ما نشير إليه بـ $\tilde{M}_k$ ولكن يوجد فصل للمعلومات المقدمة من B. إذا افترضنا أن هذا مكافئ لقياس M_k على النظام A فقط الموضح على الجانب الأيمن، فهذا يؤدي إلى $\tilde{M}_k = M_k \otimes \mathbb{1}$:)

$$p_A(k) = \mathrm{tr}\Big(\tilde{M}_k \rho\Big) \tag{25.1}$$

إذا كان $\{\tilde{M}_k\}$ مؤثر قياس فعلي على H ، مما يعني ضمنيا أنه مستقل عن الحالة ρ من النظام بأكمله الذي نحن بصدد قياسه. نعتبر الحالة الخاصة حيث تأخذ حالة النظام الشكل: $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$ ومنه المعادلة (25.1) محققة عند اختيار : $\tilde{M}_k = M_k \otimes \mathbb{1}$.

$$p_A(k) = \mathrm{tr}\Big(\tilde{M}_k \rho\Big) = \mathrm{tr}[(M_k \otimes \mathbb{1})\rho_A \otimes \rho_B] = \mathrm{tr}(M_k \rho_A)\,\mathrm{tr}(\rho_B) = \mathrm{tr}(M_k \rho_A) \tag{26.1}$$

في الواقع، هذا هو الخيار الوحيد الممكن حيث $\tilde{M}_k$ مستقل عن الحالات الخاصة ρ_A و ρ_B (وحتى ρ). تخيل أن هناك حلا آخر، $\tilde{M}_k$ ، مستقل عن ρ، وهو أيضا مؤثر قياس فعلي على H. ومنه من خطية الأثر سنحصل على:

$$p_A(k) = \mathrm{tr}\Big(\tilde{M}_k \rho\Big) = \mathrm{tr}(M_k \otimes \mathbb{1}\rho) \Rightarrow \mathrm{tr}\Big[(\tilde{M}_k - M_k \otimes \mathbb{1})\rho\Big] = 0 \tag{27.1}$$

ومنه: $\tilde{M}_k - M_k \otimes \mathbb{1} = 0$ أي: $\tilde{M}_k = M_k \otimes \mathbb{1}$. في هذه الحالة، من هذه العلاقة يمكن أن نجد العلاقة بين ρ و ρ_A ، إذا كان $\{|a\rangle\,|b\rangle\}$ أساس H عبارة الاحتمال تصبح:

$$\begin{aligned} p_A(k) &= \mathrm{tr}[(M_k \otimes \mathbb{1})\rho] = \sum_{a,b} \langle a|\,\langle b|\,(M_k \otimes \mathbb{1})\rho\,|a\rangle\,|b\rangle \\ &= \sum_{a,b} \langle a|\,M_k\,\langle b|\,\rho\,|b\rangle\,|a\rangle = \mathrm{tr}(M_k \rho_A) \end{aligned} \tag{28.1}$$

من العلاقة الأخيرة يمكن أن نستنتج أن ρ_A تعطى بالأثر الجزئي على H_B.

$$\rho_A = \sum_b \langle b|\,\rho\,|b\rangle = \mathrm{tr}_B(\rho) \tag{29.1}$$

إحدى الخواص المهمة لمؤثر الأثر الجزئي هي حتى وإن كانت $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ نقية، فإن ρ_A يمكن أن تكون مختلطة، يحدث هذا إذا كانت $|\psi\rangle$ متشابكة. نأخذ مثالا على ذلك:
لتكن $|\psi\rangle$ تعطى بالعبارة التالية:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\big|\uparrow_{(1)}, \downarrow_{(2)}\big\rangle + \big|\downarrow_{(1)}, \uparrow_{(2)}\big\rangle\big) \tag{30.1}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\rho &= |\psi\rangle\langle\psi| \\ &= \frac{1}{2}\Big(\,|\uparrow_{(1)},\downarrow_{(2)}\rangle + |\downarrow_{(1)},\uparrow_{(2)}\rangle\Big)\Big(\,\langle\uparrow_{(1)},\downarrow_{(2)}| + \langle\downarrow_{(1)},\uparrow_{(2)}|\,\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big[\,|\uparrow_{(1)},\downarrow_{(2)}\rangle\langle\downarrow_{(2)},\uparrow_{(1)}| + |\uparrow_{(1)},\downarrow_{(2)}\rangle\langle\uparrow_{(2)},\downarrow_{(1)}| + |\downarrow_{(1)},\uparrow_{(2)}\rangle\langle\downarrow_{(2)},\uparrow_{(1)}| + |\downarrow_{(1)},\uparrow_{(2)}\rangle\langle\uparrow_{(2)},\downarrow_{(1)}|\,\Big]\end{aligned} \tag{31.1}$$

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \mathrm{tr}_2\,\rho \\ &= \langle\uparrow_{(2)}|\,\rho\,|\uparrow_{(2)}\rangle + \langle\downarrow_{(2)}|\,\rho\,|\downarrow_{(2)}\rangle \\ &= \frac{1}{2}\Big(\,|\downarrow_{(1)}\rangle\langle\downarrow_{(1)}| + |\uparrow_{(1)}\rangle\langle\uparrow_{(1)}|\,\Big) \\ &= \frac{1}{2}|\downarrow_{(1)}\rangle\langle\downarrow_{(1)}| + \frac{1}{2}|\uparrow_{(1)}\rangle\langle\uparrow_{(1)}| \\ &= \sum_{i=1}^{2} p_i\,|i\rangle\langle i|\end{aligned} \tag{32.1}$$

هنا حصلنا على ρ_A مختلطة إنطلاقا من دالة حالة كلية نقية.

من أجل لحظة t_1 ، تعطى عبارة $\rho_A(t_1)$ بالشكل التالي:

$$\rho_A(t_1) = \mathrm{tr}_B(\rho(t_1)) = \mathrm{tr}_B[U(t_1,t_0)\rho(t_0)U^{\dagger}(t_1,t_0)] \tag{33.1}$$

حيث $U(t_1,t_0) \neq U(t_1,t_0)_A \otimes U(t_1,t_0)_B$ لأن كلا النظامين A و B يتبادلان معلومات مع بعضهما البعض (يتفاعلان) ، فهما نظامان كموميان مفتوحان [4].

1.3.1 التطبيقات الديناميكية:

في هذا الجزء سندرس التطور الزمني لنظام جزئي يتبادل معلومات مع محيطه. ما نود الحصول عليه هو تطبيق ديناميكي يؤثر على مصفوفة كثافة عند اللحظة t_0 معرفة على H_A لينقلها إلى اللحظة t_1 [8].

$$\varepsilon_{(t_1,t_0)} : \rho_A(t_0) \longrightarrow \rho_A(t_1) \tag{34.1}$$

التطبيقات من هذا النوع لا تعتمد فقط على مؤثر التطور الواحدي للنظام الكلي $U(t_1,t_0)$ بل على خصائص النظامين A و B أيضا. لذا يبدو من المناسب تقسيم الحالة الابتدائية للنظام الكلي T إلى حدين: الأول يعبر عن النظامين كأنهما منفصلان، والثاني يعبر عن الترابط أو التفاعل بينهما [9].

$$\rho(t_0) = \rho_A(t_0) \otimes \rho_B(t_0) + \rho_{corr}(t_0) \tag{35.1}$$

حيث ρ_{corr} يرمز للتفاعلات المحتملة بين A و B لكن لا يملك معنى فيزيائي للأنظمة الجزئية بإعتبارها منفصلة،أي:

$$\mathrm{tr}_A\left(\rho_{corr}(t_0)\right) = \mathrm{tr}_B\left(\rho_{corr}(t_0)\right) = 0 \tag{36.1}$$

نظرية:

إذا كانت مصفوفة الكثافة للنظام الجزئي A نقية: $\rho_a = |a\rangle\langle a|$ ، فإن حد التفاعل في مصفوفة الكثافة الكلية يساوي الصفر: $\rho_{corr} = 0$ ، و $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$.

للبرهان على هذه النظرية سنعتمد على البرهان المذكور في [8].

1. إذا كانت مصفوفة الكثافة الكلية نقية: فهي تأخذ الشكل:$\rho = |a\rangle\langle a| \otimes |b\rangle\langle b|$. إذن: $\rho_{corr} = 0$

2. إذا كانت مصفوفة الكثافة الكلية مختلطة: يمكن كتابتها كتركيب محدب لمصفوفات نقية:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{37.1}$$

ولأن ρ_A نقية (من الفرضية الأولى)، يجب أن نحصل على :

$$\mathrm{tr}_B\Big[\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\Big] = \sum_i p_i {\rho_A}^{(i)} \tag{38.1}$$

لتكون نقية.
حيث:

$${\rho_A}^{(i)} = \mathrm{tr}_B[|\psi_i\rangle\langle\psi_i|] \tag{39.1}$$

وهي مؤثرات تؤثر على H_A
الاحتمالين الوحيدين لتحقيق هذا الشرط هما:

(ا) $p_i = 1$ من أجل: $i = i'$ ، و $p_i = 0$ من أجل : $i \neq i'$.

(ب) $\forall i \quad {\rho_A}^{(i)} = \rho_A$

من أجل الحالة الأولى: نجد $\rho = |\psi_{i'}\rangle\langle\psi_{i'}|$ وهي حالة نقية ، وبالتالي نعود للحالة السابقة.
من أجل الحالة الثانية: نقوم بتوسعة كل $|\psi_i\rangle$ بتحليل شميدت إلى: $|\psi_i\rangle = \sum_\mu \lambda_{i,\mu} |{u^A}_{i,\mu}\rangle \otimes |{v^B}_{i,\mu}\rangle$ ، ومنه نحصل على:

$$\rho_A = {\rho_A}^{(i)} = \mathrm{tr}_B[|\psi_i\rangle\langle\psi_i|] = \sum_\mu {\lambda_{i,\mu}}^2 |{u_{i,\mu}}^A\rangle\langle{u_{i,\mu}}^A| \tag{40.1}$$

المعادلة الأخيرةيمكن إعادة صياغتها مستقلة عن μ :

$$\rho_A = \sum_i {\lambda_i}^2 |{u_i}^A\rangle\langle{u_i}^A| \tag{41.1}$$

أخيرا، لأن ρ_A يجب أن تكون نقية، يجب أن يكون: $\lambda_i = 1$ من أجل : $i = i'$ و $\lambda_i = 0$ من أجل : $i \neq i'$
ولهذا نحصل في الأخير على:

$$|\psi_{i'}\rangle = |{u_{i'}}^A\rangle \otimes |{v_{i'}}^B\rangle \tag{42.1}$$

وهو ما أردنا البرهان عليه.

نعود الآن للعبارة: (33.1) : $\rho_A(t_1) = \mathrm{tr}_B(\rho(t_1)) = \mathrm{tr}_B[U(t_1,t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t_1,t_0)]$ بتعويض $\rho(t_0)$ من العلاقة (35.1) يصبح لدينا:

$$\begin{aligned}
\rho_A(t_1) &= \mathrm{tr}_B(\rho(t_1)) = \mathrm{tr}_B\, U(t_1,t_0)[\rho_A(t_0)\otimes\rho_B(t_0) + \rho_{corr}(t_0)]U^\dagger(t_1,t_0) \\
&= \sum_b \lambda_b\, \mathrm{tr}_B\, U(t_1,t_0)_A[\rho_A(t_0)\otimes|b\rangle\langle b|]U^\dagger(t_1,t_0) + \mathrm{tr}_B[U(t_1,t_0)\rho_{corr}(t_0)U^\dagger(t_1,t_0)] \\
&= \sum_{b,b'} \lambda_b \langle b'|\, U(t_1,t_0)_A[\rho_A(t_0)\otimes|b\rangle\langle b|]U^\dagger(t_1,t_0)|b'\rangle + \mathrm{tr}_B[U(t_1,t_0)\rho_{corr}(t_0)U^\dagger(t_1,t_0)] \\
&= \sum_\alpha K_\alpha(t_1,t_0)\rho_A(t_0)K_\alpha^\dagger(t_1,t_0) + \delta\rho(t_1,t_0) \\
&= \varepsilon_{(t_1,t_0)}[\rho_A(t_0)]
\end{aligned} \tag{43.1}$$

حيث α دليل مزدوج: $\alpha = \{b, b'\}$ و $K_{b,b'}(t_1,t_0) = \sqrt{\lambda_b}\langle b'| U(t_1,t_0)|b\rangle$ حيث استعملنا التحليل الطيفي لـ $\rho_B(t_0)$ أي: $\left(\rho_B(t_0) = \sum_b \lambda_b |b\rangle\langle b|\right)$. ومن الملاحظ أنه يتعلق بـالتطور الواحدي الكوني ، وبالحالة الابتدائية للنظام الجزئي A. أما الحد غير المتجانس: $\delta\rho(t_1,t_0)$ فيعرف بـ:

$$\delta\rho(t_1,t_0) = \mathrm{tr}_B[U(t_1,t_0)\rho_{corr}(t_0)U^\dagger(t_1,t_0)] \tag{44.1}$$

قد لا يكون مستقلا عن ρ_A بسبب عبارة الترابط $\rho_{corr}(t_0)$. النتيجة التالية مهمة، قدمها د. سالغادو وزملاؤه في [10] و د. م. تونغ وزملاؤه في [11] وتعطي تمثيلا وسيطيا مكافئا للتطبيقات الديناميكية.

نظرية:
يمكن كتابة التطور الزمني لحالة كمومية ρ_A دائما على الشكل:

$$\rho_A(t_1) = \sum_\alpha K_\alpha(t_1,t_0,\rho_A)\rho_A(t_0)K_\alpha^\dagger(t_1,t_0,\rho_A) \tag{45.1}$$

حيث $K_\alpha(t_1,t_0,\rho_A)$ هي مؤثرات مستقلة عن ρ_A في اللحظة t_0

لنبرهن على هذه النظرية نعتبر المؤثر الواحدي U_{swap} يؤثر على الجداء التنسوري بالطريقة التالية:

$$U_{swap}\big(H_A \otimes H_B\big) = H_B \otimes H_A \tag{46.1}$$

$$U_{swap}\big(\rho_A \otimes \rho_B\big)U_{swap}^\dagger = \rho_B \otimes \rho_A \tag{47.1}$$

ولتكن $\rho_A(t_0)$ و $\rho_A(t_1)$ حالتي نظام كمومي في اللحظتين t_0 و t_1 على الترتيب. حيث :
$\rho_A(t_0)\otimes\rho_A(t_1) \in H_A \otimes H_A$ من الواضح أن التطور الزمني بين $\rho_A(t_0)$ و $\rho_A(t_1)$ يمكن أن يكتب كالتالي:

$$\rho_A(t_1) = \varepsilon_{(t_1,t_0)}[\rho_A(t_0)] = \mathrm{tr}_2\left[U_{swap}\rho_A(t_0)\otimes\rho_A(t_1)U_{swap}^\dagger\right] \tag{48.1}$$

حيث يدل الرمز tr_2 للأثر الجزئي بالنسبة للحد الثاني من الجداء التنسوري [8,4].

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_2\left[U_{swap}\rho_A(t_0)\otimes\rho_A(t_1)U_{swap}^\dagger\right] &= \mathrm{tr}_2\left[\rho_A(t_1)\otimes\rho_A(t_0)\right]\\ &= \rho_A(t_1)\otimes\mathrm{tr}_2\left(\rho_A(t_0)\right)\\ &= \rho_A(t_1)\end{aligned} \tag{49.1}$$

بأخذ التحليل الطيفي لـ $\rho_A(t_1)$ في المعادلة (48.1) $\rho_A(t_1) = \sum_a \omega_a |a\rangle\langle a|$ نحصل على عبارة على الشكل (45.1) .

$$\begin{aligned}\rho_A(t_1) &= \varepsilon_{(t_1,t_0)}\rho_A(t_0) = \mathrm{tr}_2\left[U_{swap}\rho_A(t_0)\otimes\rho_A(t_1)U_{swap}^\dagger\right]\\ &= \sum_a \mathrm{tr}_2\left[U_{swap}\rho_A(t_0)\otimes\omega_a|a\rangle\langle a|U_{swap}^\dagger\right]\\ &= \sum_{a,a'}\omega_a\langle a'|U_{swap}|a\rangle\rho_A t_0\langle a|U_{swap}^\dagger|a'\rangle\\ &= \sum_{a,a'}\langle a'|\sqrt{\omega_a}U_{swap}|a\rangle\rho_A(t_0)\langle a|\sqrt{\omega_a}U_{swap}^\dagger|a'\rangle\\ &= \sum_{a,a'}K_{(a,a')}\rho_A(t_0)K_{(a,a')}^\dagger\\ &= \sum_\alpha K_\alpha\rho_A(t_0)K_\alpha^\dagger\end{aligned} \tag{50.1}$$

تجدر الملاحظة هنا أن التحليل (45.1) ليس وحيدا.
ليكن V مؤثرا واحديا كيفيا. من المعادلة (48.1) وباستعمال خاصية الأثر لدينا [10]:

$$\begin{aligned}\rho_A(t_1) &= \mathrm{tr}_2\left[U_{swap}\rho_A(t_0)\otimes\rho_A(t_1)\,U^{\dagger}_{swap}\mathbb{1}\right]\\ &= \mathrm{tr}_2\left[U_{swap}\rho_A(t_0)\otimes\rho_A(t_1)\,U^{\dagger}_{swap}\,V^{\dagger}\,V\right]\\ &= \mathrm{tr}_2\left[VU_{swap}\rho_A(t_0)\otimes\rho_A(t_1)\,U^{\dagger}_{swap}\,V^{\dagger}\right]\\ &= \sum_{\alpha} K'_{\alpha}(t_1,t_0,\rho_1)\rho_A(t_0)K'^{\dagger}_{\alpha}(t_1,t_0,\rho_1)\end{aligned} \tag{51.1}$$

حيث :

$$K'_{(a,a')}(t_1,t_0,\rho_1) = \langle a'|\,\sqrt{\omega_a}\,VU_{swap}\,|a\rangle \tag{52.1}$$

(لاحظ أيضا المرجع [11]).
نلاحظ هنا أن المؤثرات $K_{\alpha}(t_1,t_0,\rho_1)$ تتعلق بـ $\rho_A(t_1)$: نعتبر الحالتين التاليتين: $\rho_A(t_1)$ و $\rho'_A(t_1)$ حيث:

$$\rho_A(t_1) = \sum_{a}\sqrt{\omega_a}\,|a\rangle\,\langle a| \tag{53.1}$$

$$\rho'_A(t_1) = \sum_{a}\sqrt{\omega'_a}\,|a\rangle\,\langle a| \tag{54.1}$$

ومنه عبارة المؤثرات $K_{\alpha}(t_1,t_0,\rho_1)$ هي كالتالي:

$$K_{(a,a')}(t_1,t_0,\rho_A) = \langle a'|\,\sqrt{\omega_a}\,U_{swap}\,|a\rangle \neq \langle a'|\,\sqrt{\omega'_a}\,U_{swap}\,|a\rangle = K_{(a,a')}(t_1,t_0,\rho'_A)| \tag{55.1}$$

هذه النظرية تظهر أنه من خلال تقليص نطاق التطبيق الديناميكي، يحتمل دائما أن نحصل على تطبيق ديناميكي آخر دون الحد غير المتجانس $\delta\rho(t_1,t_0)$ [8].

2.3.1 التطبيقات الديناميكية الكونية:

إنطلاقا من مفهوم التطبيقات الديناميكية، ما نود الوصول إليه هو طريقة لمعالجة تطور نظام كمومي بشكل مستقل عن الحالة الابتدائية $\rho_A(t_0)$ [8]. . ومنه، الأداة التي نبحث عنها هي: تطبيق خطي موجب محدد $\varepsilon_{(t_1,t_0)}$ يدعى: "التطبيق الديناميكي الكوني" "$Universal\ Dynamical\ Map$ " أو UDM. والشكل الأكثر عمومية لـ UDM يعطى بـ:

$$\varepsilon_{(t_1,t_0)}\rho_A(t_0) = \sum_{\alpha} K_{\alpha}(t_1,t_0)\rho_A(t_0)K^{\dagger}_{\alpha}(t_1,t_0) = \rho_A(t_1) \tag{56.1}$$

حيث المؤثرات $K_{\alpha}(t_1,t_0)$ هنا غير متعلقة بالحالة الابتدائية $\rho_A(t_0)$، كما نلاحظ من شرط التنظيم للأثر $\mathrm{tr}_A[\rho_A(t_1)] = 1$ يؤدي إلى: $\sum_{\alpha} K^{\dagger}_{\alpha}K_{\alpha} = \mathbb{1}_A$.

النظرية التالية مهمة و تزودنا بمعلومات حول الشروط الابتدائية التي تمكننا من الوصول إلى UMD .

نظرية: يكون التطبيق الديناميكي $\varepsilon_{(t_1,t_0)}$: UDM ، إذا وفقط إذا كان ناجما عن نظام موسع $A+B$ بالشرط الابتدائي: $\rho(t_0) = \rho_A(t_0)\otimes\rho_B(t_0)$ حيث $\rho_B(t_0)$ ثابتة من أجل أي: $\rho_A(t_0)$.

المعنى الأول لهذه النظرية واضح للغاية. حيث أن الشرط الذي تحدده الفرضية يعني مباشرة أن التطبيق الديناميكي يفقد تعلقه بـ $\rho_A(t_0)$ وبالتالي يصبح UDM.

نفرض أن الحالة الابتدائية للنظام الكلي تعطى بالعبارة التالية: $\rho(t_0) = \rho_A(t_0) \otimes \rho_B(t_0)$ حيث $\rho_B = |\psi_B\rangle\langle\psi_B|$ ثابتة من أجل أي ρ_A، ومنه:

$$\begin{aligned}
\rho_A(t_1) &= \mathrm{tr}_B[\rho(t_1)] \\
&= \mathrm{tr}_B\left[U(t_1,t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t_1,t_0)\right] \\
&= \mathrm{tr}_B\left[U(t_1,t_0)\rho_A(t_0)\otimes\rho_B(t_0)U^\dagger(t_1,t_0)\right] \\
&= \sum_b \langle b|\, U(t_1,t_0)\rho_A(t_0)\otimes\rho_B(t_0)U^\dagger(t_1,t_0)\,|b\rangle \\
&= \sum_b \langle b|\, U(t_1,t_0)\rho_A(t_0)\otimes|\psi_B\rangle\langle\psi_B|\,U^\dagger(t_1,t_0)\,|b\rangle \\
&= \sum_b \langle b|\, U(t_1,t_0)\,|\psi_B\rangle\,\rho_A(t_0)\,\langle\psi_B|\,U^\dagger(t_1,t_0)\,|b\rangle \\
&= \sum_\alpha K_\alpha(t_1,t_0)\rho_A(t_0)K_\alpha^\dagger(t_1,t_0) \\
&= \varepsilon_{(t_1,t_0)}\rho_A(t_0)
\end{aligned} \tag{57.1}$$

نلاحظ هنا أن: $\varepsilon_{(t_1,t_0)}$ غير متعلق بالحالة الابتدائية للنظام A وبالتالي هو UDM.

أما بالنسبة للشطر الثاني من النظرية، نفرض أن عبارة التطبيق الديناميكي تعطى بالعبارة التالية:

$$\rho_A(t_1) = \varepsilon_{(t_1,t_0)}\rho_A(t_0) = \sum_\alpha K_\alpha(t_1,t_0)\rho_A(t_0)K_\alpha^\dagger(t_1,t_0) \quad , \qquad \forall\rho_A \tag{58.1}$$

ثم نفرض أن النظام قيد الدراسة A يتفاعل مع نظام آخر B بحيث تكتب مصفوفة الكثافة الابتدائية للنظام الكلي على الشكل:

$$\rho(t_0) = \rho_A(t_0)\otimes\rho_B(t_0) \tag{59.1}$$

حيث: $\rho_B(t_0) = |\psi_B\rangle\langle\psi_B|$ ثابتة لأجل كل ρ_A ، و $\{|\phi\rangle_\alpha\}$ أساس لـ: H_B ، ومنه من أجل مؤثر تطور واحدي $U(t_1,t_0)$ يمكننا أن نكتب: $K_\alpha(t_1,t_0) = \langle\phi_\alpha|\,U(t_1,t_0)\,|\psi_B\rangle$

نلاحظ هنا أن : UDM يقوم بإدخال تعديلات على المؤثر الواحدي $U(t_1,t_0)$ ، ويحافظ على قيد الأحادية :

$$\begin{aligned}
\sum_\alpha K_\alpha(t_1,t_0)K_\alpha^\dagger(t_1,t_0) &= \sum_\alpha \left\langle\psi^B\right|U^\dagger(t_1,t_0)\left|\phi_\alpha^B\right\rangle\left\langle\phi_\alpha^B\right|U(t_1,t_0)\left|\psi^B\right\rangle \\
&= \left\langle\psi^B\right|U^\dagger(t_1,t_0)U(t_1,t_0)\left|\psi^B\right\rangle \\
&= \left\langle\psi^B\right|\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\left|\psi^B\right\rangle = \mathbb{1}
\end{aligned} \tag{60.1}$$

ملاحظة: إذا اعتبرنا $\rho_A(t_0)$ كمصفوفة كثافة مختلطة فيمكننا معالجة العملية بنفس المعاملة [8]. الآن نقوم بشرح خصائص الـ $UDMs$ وأهميتها.

الخطية والايجابية التامة

كما قلنا سابقا، $UDMs$ يجب أن يكونوا خطيين وموجبين [8,4]

1. **الخطية:**
الخطية شرط أساسي في التطبيقات الديناميكية الكونية، لأن معالجة أي مصفوفة كثافة مختلطة تتطور في الزمن، يتم

$$\begin{tikzcd}
\rho_A(t_0)\otimes\rho_B(t_0) \arrow[r, "U(t_1,t_0)"] \arrow[d, "\mathrm{tr}_B"'] & \rho_{AB}(t_1) \arrow[d, "\mathrm{tr}_B"'] \\
\rho_A(t_0) \arrow[r, "\varepsilon_{(t_1,t_0)}"] & \rho_A(t_1)
\end{tikzcd}$$

شكل 2.1: مخطط يوضح النتائج المتحصل عليها من نظرية الUDM.

كمجموع تطورات أجزاءها النقية:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{(t_1,t_0)}[\rho_A(t_0)] &= \varepsilon_{(t_1,t_0)}\Big[\sum_i \lambda_i \rho_A^{(i)}(t_0)\Big] \\
&= \sum_i \lambda_i \varepsilon_{(t_1,t_0)}[\rho_A^{(i)}(t_0)] \qquad (61.1)
\end{aligned}$$

2. **الايجابية:**
الايجابية أساسية ومهمة للحفاظ على شرط ايجابية مصفوفة الكثافة(صورة مؤثر موجب هو أيضا مؤثر موجب.). ومع ذلك ، كما سنرى ، فإن المفهوم الطبيعي للايجابية للمؤثر ليس مناسبًا تمامًا للتطبيق UDM . لذا علينا أن نلجأ إلى المفهوم الجديد للايجابية الكاملة.

3. **الايجابية التامة:**
نعتبر التجربة العقلية التالية، تخيل أن النظام AB هو في الأصل جزء من نظام كبير آخر ABW حيث أن النظام الجزئي W لا يتفاعل لا مع A ولا مع B، أي أنه مخفي عن أعيننا. وبالتالي يمكننا كتابة مؤثر التطور الأحادي للنظام ككل $(A+B+W)$ على الشكل التالي:

$$U_{ABW}(t_1,t_0) = U_{AB}(t_1,t_0)\otimes U_W(t_1,t_0) \qquad (62.1)$$

حيث $U_W(t_1,t_0)$ هو التطور الأحادي للنظام الفرعي W. إذا كانت مصفوفة الكثافة الابتدائية $\rho_{ABW}(t_0)$ للنظام ككل عند اللحظة t_0 وتتطور حتى اللحظة t_1 ، ومنه:

$$\rho_{ABW}(t_1) = U_{AB}(t_1,t_0)\otimes U_W(t_1,t_0)\rho_{ABW}(t_0)\, U^\dagger_{AB}(t_1,t_0)\otimes U^\dagger_W(t_1,t_0) \qquad (63.1)$$

في الحقيقة، نحن نهتم الآن بمؤثر الكثافة للنظام الجزئي $(A+B)$ فقط، ومنه، نطبق الأثر الجزئي على المعادلة الأخيرة في الفضاء H_W ، نجد:

$$\begin{aligned}
\rho_{AB}(t_1) &= U_{AB}(t_1,t_0)\,\mathrm{tr}_W\left[U_W(t_1,t_0)\rho_{ABW}(t_0)\, U^\dagger_W(t_1,t_0)\right] U^\dagger_{AB}(t_1,t_0) \\
&= U_{AB}(t_1,t_0)\,\mathrm{tr}_W\left[U^\dagger_W(t_1,t_0)\, U_W(t_1,t_0)\rho_{ABW}(t_0)\right] U^\dagger_{AB}(t_1,t_0) \\
&= U_{AB}(t_1,t_0)\rho_{AB}(t_0)\, U^\dagger_{AB}(t_1,t_0) \qquad (64.1)
\end{aligned}$$

كما كان مُتوقعا تماما، نلاحظ أن وجود النظام W لا يشوش على ديناميكيات النظام الجزئي $A+B$ على أي حال.

إذا افترضنا أن تطور مصفوفة الكثافة محكوم بـ UDM ونعلم من النظرية أعلاه أن مؤثر الكثافة الابتدائي يجب أن يكون على الشكل: $\rho_{AB}(t_0)=\rho_A(t_0)\otimes\rho_B(t_0)$ وبإدراج النظام W يصبح الشرط الابتدائي الأكثر عموما للنظام الكلي على الشكل:

$$\rho_{ABW}(t_0) = \rho_{AW}(t_0)\otimes\rho_B(t_0) \qquad (65.1)$$

حيث $\rho_B(t_0)$ ثابت من أجل أي $\rho_{AW}(t_0)$.
الآن نلفت انتباهنا لديناميكيات النظام الجزئي $(A+W)$. بتطبيق الأثر على المعادلة الأخيرة على H_B :

$$\rho_{AW}(t_1) = \mathrm{tr}_B\left[U_{AB}(t_1,t_0)\otimes U_W(t_1,t_0)\rho_{AW}(t_0)\otimes\rho_B(t_0)\,U^{\dagger}_{AB}(t_1,t_0)\otimes U^{\dagger}_W(t_1,t_0)\right] \tag{66.1}$$

باستعمال التحليل الطيفي لـ $\rho_B(t_0)$ كما فعلنا سابقا، نجد:

$$\begin{aligned}\rho_{AW}(t_1) &= \sum_{\alpha} K_{\alpha}(t_1,t_0)\otimes U_W(t_1,t_0)\rho_{AW}(t_0)K^{\dagger}_{\alpha}(t_1,t_0)\otimes U^{\dagger}_W(t_1,t_0)] \\ &= \varepsilon_{(t_1,t_0)}\otimes U_{(t_1,t_0)}\left[\rho_{AW}(t_0)\right]\end{aligned} \tag{67.1}$$

حيث $\varepsilon_{(t_1,t_0)}$ هو تطبيق ديناميكي UDM على النظام الجزئي A ، والمؤثر $U_{(t_1,t_0)}[.] = U_W(t_1,t_0)[.]\,U^{\dagger}_W(t_1,t_0)$
هو مؤثر التطور الأحادي للنظام الجزئي W.
بملاحظة المعادلة الأخيرة يمكننا استخلاص أن التطور الزمني للنظامين A و W يتم كجداء تنسوري لكل ديناميكية فردية باستقلالية عن بعد H_W وخصائص W. وبالتالي، إذا كان تطور النظام يعطى بـ UDM ، $\varepsilon_{(t_1,t_0)}$ ، ومنه من أجل أي تطور أحادي $U_{(t_1,t_0)}$ لأي بعد، $\varepsilon_{(t_1,t_0)}\otimes U_{(t_1,t_0)}$ هو أيضا UDM . وبصفة خاصة هو مؤثر يحفظ الأثر و يكتب :

$$\varepsilon\varepsilon_{(t_1,t_0)}\otimes U_{(t_1,t_0)} = \left[\varepsilon_{(t_1,t_0)}\otimes \mathbb{1}\right]\left[\mathbb{1}\otimes U_{(t_1,t_0)}\right] \tag{68.1}$$

3.3.1 التطبيق الديناميكي الكوني "تقلص":

في هذا الجزء سنرى خاصية مهمة لـ $UDMs$ التي ستسمح لنا بالتفريق بين التطبيقات ذات معنى فيزيائي ملموس عن الأخرى.
لمناقشة هذه الخصائص نعتبر المؤثر الهرميتي العام T يؤثر على فضاء H_A كعنصر من فضاء باناخ $\mathfrak{B}$ للمؤثرات ذات الأثر، مع النظيم المعرف كـ [8]:

$$\parallel T\parallel_1 = \mathrm{tr}\left(\sqrt{T^{\dagger}T}\right) = \mathrm{tr}\left(\sqrt{T^2}\right) \tag{69.1}$$

كما نعلم، من بين هذه المؤثرات مصفوفات الكثافة ρ تكون حالة كمومية إذا كانت موجبة، أي :

$$\langle\psi|\,\rho\,|\psi\rangle \geq 0 \qquad ; \qquad |\psi\rangle\in H \tag{70.1}$$

أثر مصفوفة الكثافة يساوي إلى الواحد، وهو مساو لنظيم الأثر :

$$\parallel\rho\parallel_1 = \mathrm{tr}\left(\sqrt{\rho^{\dagger}\rho}\right) = \mathrm{tr}\left(\sqrt{\rho^2}\right) = \mathrm{tr}(\rho) = 1 \tag{71.1}$$

نرمز لمجموعة الحالات الكمومية بـ $\bar{\mathfrak{B}}^{\dagger}$ ، حيث أن فضاء باناخ هو أصغر فضاء خطي يحتوي $\bar{\mathfrak{B}}^{\dagger}$. بمعنى آخر، كل فضاء خطي يحتوي $\bar{\mathfrak{B}}^{\dagger}$ هو يحتوي $\mathfrak{B}$ أيضا.

لمعالجة التطبيقات الديناميكية، سنركز انتباهنا على الفضاء الثنوي $\mathfrak{B}^{\star}$ المتكون من كل التحويلات الخطية الممكنة من الصنف: $\varepsilon(\mathfrak{B}) \;:\quad \mathfrak{B}\longrightarrow\mathfrak{B}$. هذا الفضاء هو فضاء باناخ أيضا، بالطويلة التالية:

$$\parallel\varepsilon\parallel_1 = \sup_{\substack{\rho\in\mathfrak{B}\\ \rho\neq 0}}\left\{\frac{\parallel\varepsilon(\rho)\parallel_1}{\parallel\rho\parallel_1} = \sup_{\substack{\rho\in\mathfrak{B}\\ \parallel\rho\parallel_1=1}}\parallel\varepsilon(\rho)\parallel_1\right. \tag{72.1}$$

بصفة خاصة، نحن نهتم فقط بتلك التطبيقات الخطية التي تنقل الفضاء الجزئي $\bar{\mathfrak{B}}^{\dagger}$ إلى نفسه. والتي تصل أي حالة كمومية بحالة كمومية أخرى وتحافظ على الخصائص الفيزيائية للنظام كما تفعل $UDMs$.

قبل تقديم النظرية الأساسية التي تفرض هذه المتطلبات، سنعرج عن تعريف : "التقلص" في فضاء باناخ.

تعريف:

نقول عن مؤثر خطي أنه "تقلص" على فضاء باناخ إذا كان [8]:

$$\| \varepsilon(x) \|_1 \quad \leq \quad \| x \|_1 \qquad\qquad \forall \;\; x \in \mathfrak{B} \tag{73.1}$$

الآن نعرض النظرية التالية:

نظرية:

نقول عن تطبيق خطي $\varepsilon_{(t_1,t_0)}$ أنه يبقى صامدا على $\bar{\mathfrak{B}}^{\dagger}$ إذا وفقط إذا كان تقلصا ويحفظ الأثر.

سنبرهن على هذه النظرية بخطوتين، من الناحية الأولى، إذا كان التطبيق $\varepsilon \in \mathfrak{B}^{\star}$ يبقى صامدا على $\bar{\mathfrak{B}}^{\dagger}$ فهذا يعني أنه يحفظ الأثر، لأن

$$\begin{array}{cccc} \varepsilon: & \mathfrak{B} & \longrightarrow & \mathfrak{B} \\ & \varepsilon(\rho) & \longrightarrow & \rho' \end{array} \tag{74.1}$$

$$\operatorname{tr}\left[\varepsilon(\rho)\right] = \operatorname{tr}(\rho') = 1 \tag{75.1}$$

وأيضا:

$$\| \varepsilon(\rho) \|_1 = \| \rho' \|_1 = 1 = \| \rho \|_1 \tag{76.1}$$

أي أن التطبيق ε هو تقلص. نعتبر الآن فعل ε على المؤثرات السالبة، لتكن $\sigma \in \mathfrak{B}$ ولكن $\sigma \notin \bar{\mathfrak{B}}^{\dagger}$. باستعمال التحليل الطيفي نستطيع تقسيم σ إلى $\sigma = \sigma^+ + \sigma^-$ حيث:

$$\sigma^+ = \sum_j \lambda_j \left|\psi_j\right\rangle \left\langle\psi_j\right| \quad ; \quad \lambda_j \geq 0 \tag{77.1}$$

$$\sigma^- = \sum_j \lambda_j \left|\psi_j\right\rangle \left\langle\psi_j\right| \quad ; \quad \lambda_j < 0 \tag{78.1}$$

حيث أن λ_j قيم ذاتية، و $\{|\psi_\alpha\rangle\}_{\alpha=j}$ هو أساس متعامد لفضاء هيلبرت H. نلاحظ هنا أن كلا المؤثرين σ^+ و σ^- موجبين لأن $|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ مسقطات متعامدة. ومن تعريف نظيم الأثر وتعامد $\{|\psi_\alpha\rangle\}_{\alpha=j}$ نحصل على:

$$\| \sigma \|_1 = \sum_\alpha | \lambda_\alpha | = \| \sigma^+ \|_1 + \| \sigma^- \|_1 \tag{79.1}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \| \varepsilon(\sigma) \|_1 &= \| \varepsilon(\sigma^+ + \sigma^-) \|_1 = \| \varepsilon(\sigma^+) + \varepsilon(\sigma^-) \|_1 \\ &\leq \| \varepsilon(\sigma^+) \|_1 + \| \varepsilon(\sigma^-) \|_1 = \| \sigma^+ \|_1 + \| \sigma^- \|_1 = \| \sigma \|_1 \end{aligned} \tag{80.1}$$

ومنه: ε هو تقلص، وبالتالي فهو: صامد.

من الناحية الأخرى، إذا كان التطبيق ε تقلص ويحفظ الأثر ، أي:

$$\| \varepsilon(\rho) \|_1 \leq \| \rho \|_1 \quad \wedge \quad \operatorname{tr}\left[\varepsilon(\rho)\right] = \operatorname{tr}(\rho) \tag{81.1}$$

فإنه من أجل $\rho \in \mathfrak{B}^\dagger$ تكون لدينا سلسلة المتراجحات التالية:

$$\| \rho \|_1 = \mathrm{tr}(\rho) = \mathrm{tr}\left[\varepsilon(\rho)\right] \leq \| \varepsilon(\rho) \|_1 \leq \| \rho \|_1 \tag{82.1}$$

ومنه، المتراجحات تصبح مساواة:

$$\| \varepsilon(\rho) \|_1 = \| \rho \|_1 = \mathrm{tr}\left[\varepsilon(\rho)\right] = \| \varepsilon(\rho) \|_1 \tag{83.1}$$

بما أن $\rho \in \bar{\mathfrak{B}}^\dagger$ إذا وفقط إذا كان $\| \rho \|_1 = \mathrm{tr}(\rho) = 1$ ، ومن المساواة الأخيرة نستنتج أن: $\varepsilon(\rho) \in \bar{\mathfrak{B}}^\dagger$ مهما يكن $\rho \in \bar{\mathfrak{B}}^\dagger$.

4.3.1 معكوس التطبيقات الديناميكية الكونية:

سؤال آخر مهم يمكن أن يطرح، هل هذا النوع من التطور الزمني يقبل معكوس؟ بحيث من أجل تطبيق ديناميكي كوني UDM معطى، $\varepsilon_{(t_0,t_1)}$ هل من الممكن دائما أن نجد UDM آخر $\varepsilon_{(t_0,t_1)}$ يصف التطور في الزمن في الإتجاه المعاكس لنفس النظام الفيزيائي A ويحقق [8]:

$$\varepsilon_{(t_0,t_1)}\varepsilon_{(t_1,t_0)} = \varepsilon^{-1}_{(t_1,t_0)}\varepsilon_{(t_1,t_0)} = \mathbb{1} \tag{84.1}$$

في البداية، إذا كان الـ UDM غير تقابلي، فمن السهل كتابته على الشكل:

$$\varepsilon(\rho) = \sum_n |\phi\rangle \langle\psi_n| \rho |\psi_n\rangle \langle\phi| = \mathrm{tr}(\rho) |\phi\rangle \langle\phi| \tag{85.1}$$

حيث: $\{|\psi_n\rangle\}$ أساس متعامد ومتجانس للفضاء، و $|\phi\rangle$ هي حالة كيفية ثابتة. وبالتالي فالمعكوس غير موجود دائما(حسب خصائص $|\phi\rangle$). لكن بما أنه يمكن عكس أي تطبيق رياضيا، سنرى أن المعكوس ليس UDM آخر عموما [4].

نظرية:
يمكن عكس UDM ، $\varepsilon_{(t_1,t_0)}$، بـ UDM آخر إذا وفقط إذا كان واحدي، أي: $\varepsilon_{(t_1,t_0)} = U_{(t_1,t_0)}$

البرهان سهل بالاعتماد على نظرية فيغنر لكنه طويل بعض الشيء. في القسم السابق بينا أنّ UDM يجب أن يكون تقلصا على فضاء باناخ:

$$\| \varepsilon_{(t_1,t_0)}(\sigma) \|_1 \leq \| \sigma \|_1 \quad ; \quad \sigma \in \mathfrak{B} \tag{86.1}$$

إذا فرضنا أنه يوجد UDM ، $\varepsilon^{-1}_{(t_1,t_0)}$ ، معكوس $\varepsilon_{(t_1,t_0)}$ ، فيجب أن تكون لدينا المتراجحة التالية:

$$\| \sigma \|_1 = \| \varepsilon^{-1}_{(t_1,t_0)}\varepsilon_{(t_1,t_0)}(\sigma) \|_1 \leq \| \varepsilon_{(t_1,t_0)}(\sigma) \|_1 \leq \| \sigma \|_1 \tag{87.1}$$

ما يمكن استخلاصه من سلسلة المتراجحات هذه، أنه من أجل أي UDM قابل للعكس نجد [8,4]:

$$\| \varepsilon_{(t_1,t_0)}(\sigma) \|_1 = \| \sigma \|_1 \quad ; \quad \forall\sigma \in \mathfrak{B} \tag{88.1}$$

كما نلاحظ أن الـ UDM القابل للعكس يجب أن يصل مصفوفات نقية بأخرى نقية. تبرير هذا بسيط سنفرض أن $|\psi\rangle\langle\psi|$ مؤثر كثافة نقي و $\varepsilon_{(t_1,t_0)}(|\psi\rangle\langle\psi|)$ مختلط (غير نقي)، ومنه من الممكن دائما كتابة $\varepsilon_{(t_1,t_0)}(|\psi\rangle\langle\psi|)$ كتركيب محدب لمصفوفات نقية:

$$\varepsilon_{(t_1,t_0)}(|\psi\rangle\langle\psi|) = P\rho_1 + (1-P)\rho_2 \quad ; \quad 1 \geq P \geq 0 \tag{89.1}$$

حيث $\rho_1 \neq \rho_2 \neq \varepsilon_{(t_1,t_0)}(|\psi\rangle\langle\psi|)$
بأخذ معكوس العبارة أعلاه نجد:

$$|\psi\rangle\langle\psi| = P\varepsilon^{-1}_{(t_1,t_0)}(\rho_1) + (1-P)\varepsilon^{-1}_{(t_1,t_0)}(\rho_2) \quad (90.1)$$

بما أن $\varepsilon_{(t_1,t_0)}$ هو تطبيق تقابلي و ρ_1 و ρ_2 نقيان ولدينا: $\varepsilon^{-1}_{(t_1,t_0)}(\rho_1) \neq \varepsilon^{-1}_{(t_1,t_0)}(\rho_2)$ ومنه سنصل إلى عبارة لمؤثر كثافة نقي $|\psi\rangle\langle\psi|$ كتركيب محدب لمؤثرات كثافة أخرى. وكما نعلم فإن هذه الوضعية غير مقبولة، ومنه فالفرضية الأولية التي وضعناهاخاطئة، والمصفوفات النقية تنقل دائما إلى مصفوفات أخرى نقية بـ UDM قابل للعكس [8].

نعتبر عبارة مميزة لعنصر $\sigma \in \mathfrak{B}$:

$$\sigma = \frac{1}{2}\big(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| - |\psi_2\rangle\langle\psi_2|\big) \quad (91.1)$$

حيث: $|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ و $|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ مؤثرا كثافة نقيان كيفيان [8].
لأننا برهنا أن الـ UDM القابل للعكس يصل كل مؤثر نقي بآخر نقي أيضا، فيمكننا أن نكتب:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{(t_1,t_0)}(\sigma) &= \varepsilon_{(t_1,t_0)}\left[\frac{1}{2}\big(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| - |\psi_2\rangle\langle\psi_2|\big)\right]\\ &= \frac{1}{2}\Big(\left|\tilde{\psi_1}\right\rangle\left\langle\tilde{\psi_1}\right| - \left|\tilde{\psi_2}\right\rangle\left\langle\tilde{\psi_2}\right|\Big)\end{aligned} \quad (92.1)$$

حيث: $\left|\tilde{\psi_1}\right\rangle\left\langle\tilde{\psi_1}\right| = \varepsilon_{(t_1,t_0)}\Big(|\psi_1\rangle\langle\psi_1|\Big)$ و $\left|\tilde{\psi_2}\right\rangle\left\langle\tilde{\psi_2}\right| = \varepsilon_{(t_1,t_0)}\Big(|\psi_2\rangle\langle\psi_2|\Big)$ وهما مؤثرا كثافة نقيان أيضا [8].
معادلة القيم الذاتية لـ σ تعطى بـ:
$\sigma\big(\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle\big) = \lambda\big(\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle\big)$ حيث: α و β معاملان مركبان عامّان [8].
نعوض σ بالعبارة (91.1) في المعادلة الأخيرة ثم نسقطها على الفضاءين الجزئيين المولدين بـ $\langle\psi_1|$ و $\langle\psi_2|$ على التوالي، نجد:

$$\sigma\big(\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle\big) = \lambda\big(\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle\big) \quad (93.1)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\big(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| - |\psi_2\rangle\langle\psi_2|\big)\big(\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle\big) &= \frac{1}{2}\Big(\alpha|\psi_1\rangle - \alpha\langle\psi_2|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle +\\ &\beta\quad \langle\psi_1|\psi_2\rangle|\psi_2\rangle - \beta|\psi_2\rangle\end{aligned} \quad (94.1)$$

بالإسقاط:

$$\begin{cases}\lambda\alpha = \frac{1}{2}\big(\alpha + \beta\langle\psi_1|\psi_2\rangle\big).....(1)\\ \lambda\beta = -\frac{1}{2}\big(\beta + \alpha\langle\psi_2|\psi_1\rangle\big).....(2)\end{cases}$$

من المعادلة (1) لدينا:

$$\lambda\alpha - \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\beta\langle\psi_1|\psi_2\rangle \quad (95.1)$$

ومنه:

$$\beta = 2\frac{\lambda\alpha - \frac{1}{2}\alpha}{\langle\psi_1|\psi_2\rangle} \quad (96.1)$$

نعوض عن β في العبارة (2) نجد:

$$\begin{aligned}
\lambda\Big[2\frac{\lambda\alpha-\frac{1}{2}\alpha}{\langle\psi_1|\psi_2\rangle}\Big] &= -\frac{1}{2}\Big[2\frac{\lambda\alpha-\frac{1}{2}\alpha}{\langle\psi_1|\psi_2\rangle}\Big]-\frac{1}{2}\alpha\,\langle\psi_2|\psi_1\rangle\\
2\lambda\alpha\Big[\frac{\lambda-\frac{1}{2}}{\langle\psi_1|\psi_2\rangle}\Big] &= 2\big(-\frac{\alpha}{2}\big)\Big[\frac{\lambda-\frac{1}{2}}{\langle\psi_1|\psi_2\rangle}\Big]-\frac{\alpha}{2}\,\langle\psi_2|\psi_1\rangle\\
2(\lambda+\frac{1}{2})\Big[\frac{\lambda-\frac{1}{2}}{\langle\psi_1|\psi_2\rangle}\Big] &= -\frac{1}{2}\,\langle\psi_2|\psi_1\rangle\\
4(\lambda^2-\frac{1}{4}) &= -|\,\langle\psi_2|\psi_1\rangle\,|^2\\
\lambda^2 &= \frac{1}{4}-\frac{1}{4}|\,\langle\psi_2|\psi_1\rangle\,|^2\\
\lambda &= \begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{1-|\,\langle\psi_2|\psi_1\rangle\,|^2}\\ -\frac{1}{2}\sqrt{1-|\,\langle\psi_2|\psi_1\rangle\,|^2}\end{cases}
\end{aligned} \tag{97.1}$$

ومنه نظيم الأثر لـ σ:

$$\|\,\sigma\,\|_1=\sum_j|\lambda_j|=\sqrt{1-|\,\langle\psi_2|\psi_1\rangle\,|^2} \tag{98.1}$$

باستعمال العبارة (88.1) نجد: $\|\,\varepsilon_{(t_1,t_0)}(\sigma)\,\|_1=\sqrt{1-|\left\langle\tilde{\psi_2}\middle|\tilde{\psi_1}\right\rangle|^2}=\|\,\sigma\,\|_1=\sqrt{1-|\,\langle\psi_2|\psi_1\rangle\,|^2}$

ومنه: $|\,\langle\psi_2|\psi_1\rangle\,|=|\left\langle\tilde{\psi_2}\middle|\tilde{\psi_1}\right\rangle|$

أخيرا، من خلال نظرية فيغنر [13,12,4] يمكننا أن نجزم أن التحويل الذي يستفي الشرط أعلاه يجب أن يكون على الشكل:

$$\varepsilon_{(t_1,t_0)}(\sigma)=V\sigma V^\dagger \tag{99.1}$$

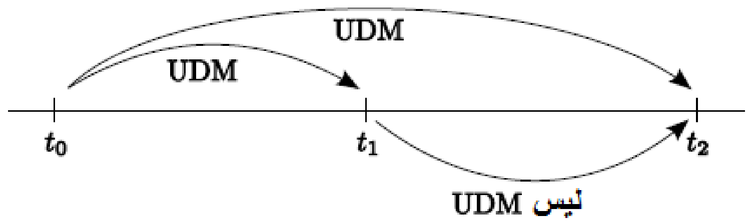
حيث: V مؤثر واحدي أو غير واحدي،،بما أن المؤثر غير الواحدي لا يتوافق مع شرط تمام الايجابية، فإن V يجب أن يكون مؤثرا واحديا، $\varepsilon_{(t_1,t_0)}=U_{(t_1,t_0)}$. نشير أنه في حالة σ موسع،أي مكون من أكثر من مصفوفتي كثافة نقيتين فإن البرهان يتم بنفس طريقة المعالجة المستخدمة هنا في حالة مصفوفتين اثنتين [8]. إن سبب فشل وجود معكوس لـ UDM يعود إلى عدم رجعية الأنظمة الكمومية الكونية المفتوحة، كما أن استعمالات UDM الواحدي غير مهمة، وغالبا ما تنطوي معظم الخصائص المهمة والواقعية عندما نعتبر الحالات غير واحدية [8].

5.3.1 الاستمرارية الزمنية: التطورات الماركوفية:

كما أشرنا سابقا، فإن أحد المشاكل المهمة التي تعترض التطبيقات الديناميكية المعطاة بـ UDM مرتبط باستمراريتها في الزمن، أي إذا فرضنا أننا نعرف تطور النظام بين اللحظتين: t_0 و t_1، $\varepsilon_{(t_1,t_0)}$، وبين اللحظتين t_1 و t_2، $\varepsilon_{(t_2,t_1)}$. قد يتسنى إلى مخيلتنا أن التطور بين اللحظتين t_0 و t_2 يعطى بتركيب التطبيقات على الشكل التالي: $\varepsilon_{(t_2,t_0)}=\varepsilon_{(t_2,t_1)}\varepsilon_{(t_1,t_0)}$ والسؤال المطروح هنا: هل كل هذه التطبيقات هي UDM ؟

لتكن الحالة الابتدائية للنظام الكلي: $\rho(t_0)=\rho_A(t_0)\otimes\rho_B(t_0)$ ومؤثري التطور الواحديين: $U(t_1,t_0)$ ، $U(t_2,t_1)$ و $U(t_2,t_0)=U(t_2,t_1)U(t_1,t_0)$ ومنه تطور النظام الجزئي A بين t_0 وأي لحظة أخرى يعطى بـ:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{(t_1,t_0)}\left[\rho_A(t_0)\right] &= \mathrm{tr}_B\left[U(t_1,t_0)\rho_A(t_0)\otimes\rho_B(t_0)U^\dagger(t_1,t_0)\right]\\
&= \sum_\alpha K_\alpha(t_1,t_0)\rho_A(t_0)K_\alpha^\dagger(t_1,t_0)
\end{aligned} \tag{100.1}$$



شكل 3.1: مخطط يوضح الحالة العامة التي تصف ديناميكيات الأنظمة الكمومية المفتوحة عن طريق UDM .

و

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(t_2,t_0)}\left[\rho_A(t_0)\right] &= \mathrm{tr}_B\left[U(t_2,t_0)\rho_A(t_0)\otimes\rho_B(t_0)\,U^\dagger(t_2,t_0)\right] \\ &= \sum_\alpha K_\alpha(t_2,t_0)\rho_A(t_0)K_\alpha^\dagger(t_2,t_0) \end{aligned} \tag{101.1}$$

أما بالنسبة لـ $\varepsilon_{(t_2,t_1)}$ فالإشكالية تقع معه:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(t_2,t_1)}\left[\rho_A(t_1)\right] &= \mathrm{tr}_B\left[U(t_2,t_1)\rho_A(t_1)\,U^\dagger(t_2,t_1)\right] \\ &= \sum_\alpha K_\alpha(t_2,t_1,\rho_A)\rho_A(t_1)K_\alpha^\dagger(t_2,t_1,\rho_A) \end{aligned} \tag{102.1}$$

حيث: $\rho_A(t_1) = U(t_1,t_0)\left[\rho_A(t_0)\otimes\rho_B(t_0)\right]U^\dagger(t_1,t_0)$ وبما أن $\rho_A(t_1)$ ليست جداء تنسوري عموما، تتعلق بما تأخذه الحالات الابتدائية لكلا النظامين الجزئيين، فإن $\varepsilon_{(t_2,t_1)}$ لا يملك شكل UDM (كما تبينه الصورة (3.1) [4] نفرض أن حالة النظام الكلية عند اللحظة t_0 تعطى بـ $\rho(t_0) = \rho_A(t_0)\otimes\rho_B(t_0)$ ،والتطبيقات الديناميكية من هذه اللحظة هي $UDMs$. لكن لا يمكن تعريف UDM إنطلاقا من لحظة $t_1 > t_0$ لأنه عموما عند هذه اللحظة لا يمكن كتابة حالة النظام الكلية كجداء تنسوري) [4]: من وجهة نظر أخرى، إذا كان التطبيق $\varepsilon_{(t_2,t_1)}$ تقابليا، فيمكن التغلب على المشكلة بتعريفه على الشاكلة الآتية:

$$\varepsilon_{(t_2,t_1)} = \varepsilon_{(t_2,t_0)}\varepsilon^{-1}_{(t_1,t_0)} \tag{103.1}$$

وتحقق العلاقة:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(t_2,t_0)} &= \varepsilon_{(t_2,t_1)}\varepsilon_{(t_1,t_0)} \\ &= \varepsilon_{(t_2,t_0)}\varepsilon^{-1}_{(t_1,t_0)}\varepsilon_{(t_1,t_0)} \\ &= \varepsilon_{(t_2,t_0)} \end{aligned} \tag{104.1}$$

لكن نشير هنا أن العبارة أعلاه غير محققة لأن $\varepsilon^{-1}_{(t_1,t_0)}$ ليس موجب تماما إلا إذا كان واحدي، وبالتالي فإن التطور $\varepsilon_{(t_2,t_1)}$ يبقى غير UDM(لاحظ أن تركيب تطبيقين موجبين تماما هو تطبيق موجب تماما أيضا، ومع ذلك فإن تركيب تطبيقين كيفيين يمكن أن يكون موجبا تماما بغض النظر عما إذا كان كل منهما موجبا تماما أم لا). من ناحية أخرى يكمن إختلاف ديناميكيات الأنظمة الكمومية المفتوحة مع نظيرتها المغلقة في الصعوبات الناشئة عن الاستمرارية الزمنية لـ:$UDMs$ ، التي تجعل من المستحيل صياغة الديناميكيات العامة للأنظمة الكمومية المفتوحة بالمعادلات التفاضلية التي تولد عائلات التقلص على $\mathfrak{B}$ (كعائلات $UDMs$ على سبيل المثال). ومع ذلك يمكننا كتابة الشكل التفاضلي للتطور من لحظة معينة t_0 الذي يولد في النهاية عائلة متقلصة على $\mathfrak{B}$.

لتوضيح هذا نعتبر الـ UDM، $\varepsilon_{(t,t_0)}$، تقابليا. ومنه:

$$\frac{d\rho_A(t)}{dt} = \frac{d\varepsilon_{(t,t_0)}}{dt}\big[\rho_A(t_0)\big] = \frac{d\varepsilon_{(t,t_0)}}{dt}\varepsilon^{-1}_{(t,t_0)}\big[\rho_A(t)\big] = \mathcal{L}_t\big[\rho_A(t)\big] \qquad (105.1)$$

حيث: $\mathcal{L}_t = \frac{d\varepsilon_{(t,t_0)}}{dt}\varepsilon^{-1}_{(t,t_0)}$. ومنه إذا أعطي الشرط الابتدائي عند t_0 وبإعتبار التطبيق تقلصا، فإن حل المعادلة أعلاه هو: $\rho_A(t) = \varepsilon_{(t,t_0)}\big[\rho_A(t_0)\big]$. ومع ذلك، فإن التطور لا يكون UDM من أجل أي لحظة ابتدائية، ماعدا تلك التي تحقق: $\rho(t_0) = \rho_A(t_0) \otimes \rho_B(t_0)$.

تعريف: نقول عن نظام كمومي أنه يخضع لتطور ماركوفي إذا كان يوصف بـ"عائلة تطور متقلصة" على $\mathfrak{B}$ ومنه قانون تركيب الـ $UDMs$ يصبح صالح:

$$\varepsilon_{(t_2,t_0)} = \varepsilon_{(t_2,t_1)}\varepsilon_{(t_1,t_0)} \qquad (106.1)$$

في الحقيقة، ديناميكيات النظام الكمومي المفتوح ليست ماركوفية، لأنه وكما قلنا سابقا أن النظامين A و B متشابكان (لوجود ρ_{corr}) خلال تطورهما، ومنه التطبيق الديناميكي المخفض لا يكون UDM من أجل بعض اللحظات الزمنية الوسطية t_1. ومع ذلك، إذا كان ρ_{corr} لا تؤثر كثيرا على الديناميكيات، فإن النموذج الماركوفي يكون التقريب الجيد لدراسة التطور الزمني كما سنعالجه في الفصل3 [4].

الفصل الثاني

العملية الماركوفية الكمية: البنية الرياضية

الفصل 2

العملية الماركوفية الكمومية، البنية الرياضية:

1.2 تمهيد

إن تطور نظام كمومي ما يكون ماركوفيا تحت شروط معينة، قبل دراسة هذه الشروط سنعر ف أولا خصائص و شكل العملية الماركوفية. وقبل هذا وذاك سنعرج في البداية عن العمليات الماركوفية الكلاسيكية.

2.2 العملية الماركوفية الكلاسيكية:

سنعرض هنا أهم خصائص العملية الماركوفية الكلاسيكية دون التعمق في التدقيق الرياضي.

في فضاء الاحتمالات، العملية العشوائية تكون عبارة عن عائلة من المتغيرات العشوائية المعدودة $\{X(t), t \in I \subset \mathbb{R}\}$ ، حيث أن هذه المعاملات تتعلق بالزمن t عادة ويتم تعدادها بدليل n. نقول عن عملية عشوائية أنها ماركوفية إذا كان احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيمة x_n عند اللحظة t_n مشروطا فقط بالقيمة x_{n-1} عند اللحظة t_{n-1} ولا تعتمد على القيم في أوقات سابقة [4]. تم صياغة هذا الشرط رياضيا اعتمادا على الاحتمالات على الشكل التالي:

$$p(x_n, t_n|x_{n-1}, t_{n-1}; ...; x_0, t_0) = p(x_n, t_n|x_{n-1}, t_{n-1}) \qquad \forall t_n \in I \tag{1.2}$$

ومنه يمكن التعبير عن هذه الخاصية بالطريقة التالية:

تعريف:
لا تحتوي العملية الماركوفية على ذاكرة محفوظات للقيم السابقة لـ X.

نعتبر الآن أن المجال الزمني I مستمر و $t' < t$، لدينا من تعريف الاحتمال الشرطي:

$$p(x, t; x', t') = p(x, t|x', t')p(x', t') \tag{2.2}$$

حيث: $p(x, t; x', t')$ هو احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيمة x عند اللحظة t و x' عند اللحظة t'. نكامل العلاقة الأخيرة على x' نجد:

$$p(x, t) = \int dx' p(x, t|x', t')p(x', t') \tag{3.2}$$

وهي العلاقة بين الاحتمالات المشروطة. نعيد صياغة العبارة الأخيرة على الشكل التالي:

$$p(x, t) = \int dx' \mathcal{K}(x, t|x', t')p(x', t') \tag{4.2}$$

حيث:

$$\mathcal{K}(x, t|x', t') = p(x, t|x', t') \tag{5.2}$$

تعريف:
تسمى العملية الماركوفية متجانسة إذا كان $\mathcal{K}(x,t|x',t')$ هو دالة للفرق بين معاملات الزمن، أي:

$$\mathcal{K}(x,t|x',t') = \mathcal{K}_{t-t'}(x|x') \tag{6.2}$$

في حالة ثلاث لحظات زمنية،$t_1 < t_2 < t_3$، بتطبيق الاحتمال الشرطي مرتين نجد:

$$\begin{aligned} p(x_3,t_3;x_2,t_2;x_1,t_1) &= p(x_3,t_3|x_2,t_2;x_1,t_1)p(x_2,t_2;x_1,t_1) \\ &= p(x_3,t_3|x_2,t_2;x_1,t_1)p(x_2,t_2|x_1,t_1)p(x_1,t_1) \end{aligned} \tag{7.2}$$

من تعريف العملية الماركوفية الذي ينص على أنها تتعلق فقط باللحظة الزمنية التي تسبقها ، سنكتب:

$$p(x_3,t_3|x_2,t_2;x_1,t_1) = p(x_3,t_3|x_2,t_2) \tag{8.2}$$

بالمكاملة على x_2، نجد:

$$\int dx_2 \;\; p(x_3,t_3;x_2,t_2;x_1,t_1)p(x_2,t_2;x_1,t_1) \;=\; \int dx_2 \;\; p(x_3,t_3|x_2,t_2)p(x_2,t_2;x_1,t_1)p(x_1,t_1) \tag{9.2}$$

$$p(x_3,t_3|x_1,t_1)p(x_1,t_1) \;=\; \int dx_2 \;\; p(x_3,t_3|x_2,t_2)p(x_2,t_2;x_1,t_1)p(x_1,t_1) \tag{10.2}$$

بالقسمة على $p(x_1,t_1)$:

$$p(x_3,t_3|x_1,t_1) = \int dx_2 \;\; p(x_3,t_3|x_2,t_2)p(x_2,t_2;x_1,t_1) \tag{11.2}$$

وهي معادلة "شابمان-كولموغروف" ، عند إعادة صياغة المعادلة الأخيرة على شكل (4.2) تصبح:

$$\mathcal{K}(x_3,t_3|x_1,t_1) = \int dx_2 \;\; \mathcal{K}(x_3,t_3|x_2,t_2)\mathcal{K}(x_2,t_2;x_1,t_1) \tag{12.2}$$

نلاحظ هنا أن $\mathcal{K}(x,t;x't')$ يلعب دور مؤثر التطور الواحدي في العلاقة (11.2) كما أن المعادلة الأخيرة لها نفس شكل قانون تركيب المؤثرات الديناميكية الكونية$UDMs$، فنستطيع أن نقول أنها تشكل عائلات تطورية. وبماأن: $\mathcal{K}(x,t|x',t')$ هي احتمالات مشروطة لأنها تربط أي احتمال $p(x',t')$ باحتمال آخر $p(x,t)$ فهي كونية(تحافظ على ايجابية $p(x',t')$ وشرط التنظيم). بإسقاط هذه النتائج على تعريف عملية ماركوف الكمومية، نجد أن الدور الذي تلعبه الاحتمالات $p(x,t)$ يقابله الدور الذي تلعبه مؤثرات الكثافة $\rho(t)$. والدور الذي تلعبه الاحتمالات الشرطية $p(x,t|x',t')$ يقابله $UDMs$، وبالتالي نلاحظ هناك تقابل بين المعادلة (106.1) الكمومية ومعادلة "شابمان-كولموغروف" الكلاسيكية (12.2) [4].

3.2 التطور الماركوفي الكمومي كمعادلة تفاضلية:

بعد أن عالجنا العملية الماركوفية كلاسيكيا وقدمنا تقابلا واضحا بينها وبين العملية الكمومية، سنحاول هنا اشتقاق المعادلة التفاضلية التي تحكم العملية الماركوفية الكمومية.
من أجل ϵ موجب، نعتبر الفرق التالي:

$$\rho(t+\epsilon) - \rho(t) = [\varepsilon_{(t+\epsilon,0)} - \varepsilon_{(t,0)}]\rho(0) = [\varepsilon_{(t+\epsilon,t)} - \mathbb{1}]\varepsilon_{(t,0)}\rho(0) = [\varepsilon_{(t+\epsilon,t)} - \mathbb{1}]\rho(t) \tag{13.2}$$

يمكننا الحصول على المعادلة التفاضلية أو ما تسمى بـ"المعادلة الرئيسية" لـ $\rho(t)$ بإعتبار أن النهاية لما $\epsilon \longrightarrow 0$ تكون معرفة جيدا:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\rho(t+\epsilon)-\rho(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\left[\varepsilon_{(t+\epsilon,t)} - \mathbb{1}\right]}{\epsilon}\rho(t) = \mathcal{L}_t\rho(t) \tag{14.2}$$

ومنه بالتعريف: مولد التطور هو: $\mathcal{L}_t = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\left[\varepsilon_{(t+\epsilon,t)} - \mathbb{1}\right]}{\epsilon}$.

النظرية التالية توضح شكل المعادلة التفاضلية للتطورات الماركوفية الكمومية، والتي هي النتيجة الرئيسية لهذا القسم.

نظرية:

تكون المعادلة التفاضلية المعادلة الرئيسية الماركوفية إذا وفقط إذا كان يمكن كتابتها على الشكل [4]:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H(t),\rho(t)] + \sum_k \gamma_k(t)\left[V_k(t)\rho(t)V_k^{\dagger}(t) - \frac{1}{2}\left\{V_k^{\dagger}(t)V_k(t),\rho(t)\right\}\right] \tag{15.2}$$

حيث:$H(t)$ و$V(t)$ مؤثرات تتعلق بالزمن، و$H(t)$ مؤثر هرميتي، و $\gamma_k(t) \geq 0 \qquad \forall\ k,t$.

سنتبع البرهان الموجود في: [2] و [14] للمولدات المستقلة عن الزمن.

إذا كان $\varepsilon_{(t_2,t_1)}$ تطبيق UDM من أجل $t_2 \geq t_1$ وبالتالي يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$\varepsilon_{(t_2,t_1)}[\rho] = \sum_\alpha K_\alpha(t_2,t_1)\rho K_\alpha^{\dagger}(t_2,t_1) \tag{16.2}$$

وليكن $F_j \ , \ j=1,...,N^2$ أساس متعامد ومتجانس لفضاء هيلبرت HS المعرف بالجداء الداخلي التالي: $(F_j,F_k)_{HS} = \mathrm{tr}\left(F_j^{\dagger}F_k\right) = \delta_{j,k}$ نختار هنا $F_{N^2} = \frac{1}{\sqrt{N}}$ وأثر باقي المؤثرات يساوي الصفر ، ثم بالتوسع في مؤثرات كروس $K_\alpha(t_2,t_1)$ في هذا الأساس نجد:

$$K_\alpha = \sum_{i=1}^{N^2} A_i(\alpha)F_i \tag{17.2}$$

$$K_\alpha{}^{\dagger} = \sum_{i=1}^{N^2} F_i^{\dagger}A_i^*(\alpha) \tag{18.2}$$

$$\begin{aligned}\sum_\alpha K_\alpha\rho K_\alpha{}^{\dagger} &= \sum_\alpha\sum_{i,j=1}^{N^2} A_i(\alpha)F_i\rho F_j^{\dagger}A_j^* \\ &= \sum_\alpha\sum_{i,j=1}^{N^2} A_i(\alpha)A_j^*F_i\rho F_j\end{aligned} \tag{19.2}$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\big(F_j,K_\alpha\big) = \sum_{i=1}^{N^2} A_i(\alpha)\big(F_j,F_i\big) = \sum_{i=1}^{N^2} A_i(\alpha)\delta_{ij} = A_j(\alpha) \tag{20.2}$$

بنفس الطريقة نجد:

$$\big(F_j,K_\alpha\big)^* = A_j^*(\alpha) \tag{21.2}$$

ومنه نكتب:

$$\varepsilon_{(t_2,t_1)}[\rho] = \sum_{j,k} c_{jk}(t_2,t_1) F_j \rho F_k^{\dagger} \tag{22.2}$$

حيث العناصر c_{jk} تكتب كالتالي:
$c_{jk}(t_2,t_1) = \sum_\alpha \big(F_j, K_\alpha(t_2,t_1)\big)_{HS} \big(F_k, K_\alpha(t_2,t_1)\big)^*_{HS} = \sum_\alpha A_i(\alpha) A_j^*(\alpha)$
وهي عناصر هرميتية، ومن أجل أي شعاع v ذو بعد N^2، لدينا:

$$\mathrm{v} = \sum_{i=1}^{N^2} v_i F_i \tag{23.2}$$

$$\begin{aligned}
\big(\mathrm{v}, c(t_2,t_1)\mathrm{v}\big) &= \mathrm{tr}\left(\mathrm{v}^{\dagger} c(t_2,t_1)\mathrm{v}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{N^2} v_i^* \sum_\alpha A_i(\alpha) A_j^*(\alpha) v_j \big(F_i, F_j\big) \\
&= \sum_\alpha \sum_{i,j=1}^{N^2} v_i A_i(\alpha) A_j^*(\alpha) v_j^* \delta_{ij} \\
&= \sum_\alpha \sum_{i=1}^{N^2} v_i A_i(\alpha) A_i^*(\alpha) v_i^* = \sum_\alpha |\sum_i v_i A_i(\alpha)| \\
&= \sum_\alpha |v_i\big(F_i, K(t_2,t_1)_{HS}\big)|^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{24.2}$$

نقوم الآن بتغيير المتغير التالي: $t_1 = t$ و $t_2 = t + \epsilon$ ومنه يمكننا أن نكتب المولد على الشكل:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t(\rho) &= \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{j,k} \frac{c_{jk}(t+\epsilon,t) F_j \rho F_k^{\dagger} - \mathbb{1}}{\epsilon} \rho = \lim_{\epsilon\to 0} \Bigg[\frac{1}{N} \frac{c_{N^2N^2}(t+\epsilon,t) - N}{\epsilon} \rho \\
&+ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N^2-1} \left(\frac{c_{jN^2}(t+\epsilon,t)}{\epsilon} F_j \rho + \frac{c_{N^2j}(t+\epsilon,t)}{\epsilon} \rho F_j^{\dagger} \right) \\
&+ \sum_{j,k=1}^{N^2-1} \frac{c_{jk}(t+\epsilon,t)}{\epsilon} F_j \rho F_k^{\dagger} \Bigg]
\end{aligned} \tag{25.2}$$

نعرف الآن المعاملات $a_{jk}(t)$ الآتية:

$$a_{N^2N^2}(t) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{c_{N^2N^2}(t+\epsilon,t) - N}{\epsilon} \tag{26.2}$$

$$a_{jN^2}(t) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{c_{jN^2}(t+\epsilon,t)}{\epsilon} \qquad j = 1, ..., N^2-1 \tag{27.2}$$

$$a_{jk}(t) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{c_{jk}(t+\epsilon,t)}{\epsilon} \qquad j,k = 1, ..., N^2-1 \tag{28.2}$$

ومنه عبارة المولد $\mathcal{L}_t$ تصبح:

$$\mathcal{L}_t(\rho) = \frac{1}{N} a_{N^2N^2}(t)\rho + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N^2-1} \left[a_{jN^2} F_j \rho + a_{jN^2} \rho F_j^{\dagger}\right] + \sum_{j,k=1}^{N^2-1} a_{jk}(t) F_j \rho F_k^{\dagger} \tag{29.2}$$

والمؤثرات التالية:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N^2-1} a_{jN^2}(t)F_j & (30.2)\\ G(t) &= \frac{a_{N^2N^2}}{2N}\mathbb{1} + \frac{1}{2}\big[F^\dagger(t)+F(t)\big] & (31.2)\\ H(t) &= \frac{1}{2i}\big[F^\dagger(t)-F(t)\big] & (32.2) \end{aligned}$$

حيث $H(t)$ مؤثر هرميتي:

$$\begin{aligned} H(t)^\dagger &= \left(\frac{1}{2i}\big[F^\dagger(t)-F(t)\big]\right)^\dagger = \frac{-1}{2i}\big[F(t)-F^\dagger(t)\big]\\ &= \frac{1}{2i}\big[F^\dagger(t)-F(t)\big] = H(t) & (33.2) \end{aligned}$$

ومنه باستعمال هذه المؤثرات يمكننا كتابة المولد $\mathcal{L}_t$ في العلاقة (25.2) على الشكل التالي:

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[H(t),\rho] + \{G(t),\rho\} + \sum_{j,k=1}^{N^2-1} a_{jk}(t)F_j\rho F_k^\dagger \qquad (34.2)$$

نقوم الآن بتحليل هذه العبارة:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t(\rho) &= -i\left[\frac{1}{2i}\big(F^\dagger(t)-F(t)\big),\rho\right] + G(t)\rho + \rho G(t) + \sum_{j,k=1}^{N^2-1} a_{jk}(t)F_j\rho F_k^\dagger\\ &= \cancel{\frac{-1}{2}F^\dagger(t)\rho} + \frac{1}{2}F(t)\rho + \frac{1}{2}\rho F^\dagger(t) \cancel{-\frac{1}{2}\rho F(t)}\\ &+ \frac{a_{N^2N^2}}{N}\rho + \cancel{\frac{1}{2}F^\dagger(t)\rho} + \frac{1}{2}F(t)\rho + \frac{1}{2}\rho F^\dagger(t) + \cancel{\frac{1}{2}\rho F(t)} \sum_{j,k=1}^{N^2-1} a_{jk}(t)F_j\rho F_k^\dagger\\ &= \frac{1}{N}a_{N^2N^2}\rho + F(t)\rho + \rho F(t) + \sum_{j,k=1}^{N^2-1} a_{jk}(t)F_j\rho F_k^\dagger\\ &= \frac{1}{N}a_{N^2N^2}\rho + \sum_{j,k=1}^{N^2-1} a_{jk}(t)F_j\rho F_k^\dagger + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N^2-1} a_{jN^2}(t)F_j\rho + \rho\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N^2-1} a_{jN^2}^* F_j^\dagger\\ &= \frac{1}{N}a_{N^2N^2}(t)\rho + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N^2-1}\big[a_{jN^2}F_j\rho + a_{jN^2}\rho F_j^\dagger\big] + \sum_{j,k=1}^{N^2-1} a_{jk}(t)F_j\rho F_k^\dagger & (35.2) \end{aligned}$$

وهي متوافقة مع العلاقة (29.2).

وبما أن الـ $UDMs$ تحفظ الأثر، فإنه من أجل أي مصفوفة كثافة ρ يكون لدينا:

$$\operatorname{tr}\big(\mathcal{L}_t(\rho)\big) = \operatorname{tr}\big(\rho(t+\epsilon)-\rho(t)\big) = \operatorname{tr}\big(\rho(t+\epsilon)\big)\operatorname{tr}\big(\rho(t)\big) = 0 \qquad (36.2)$$

نعالج $\mathrm{tr}\left(\mathcal{L}_t(\rho)\right)$ لنحصل على شكل يمكننا من استنتاج عبارة $G(t)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left(\mathcal{L}_t(\rho)\right) &= \mathrm{tr}\Big\{-i[H,\rho]+\{G(t),\rho\}+\sum_{j,k=1}^{N^2-1}a_{jk}(t)F_j\rho F_k^\dagger\Big\}\\
&= \mathrm{tr}\Big\{-i\Big(H\rho-\rho H\Big)+\big(G(t)\rho+\rho G(t)\big)+\sum_{j,k=1}^{N^2-1}a_{jk}(t)F_j\rho F_k^\dagger\Big\}\\
&= \mathrm{tr}\Big\{\frac{1}{2}\Big(\cancel{-F^\dagger(t)\rho}+F(t)\rho+\rho F^\dagger(t)\cancel{-\rho F(t)}\Big)\\
&+ \frac{a_{N^2N^2}}{N}\rho+\frac{1}{2}\Big(\cancel{F^\dagger(t)\rho}+F(t)\rho+\rho F^\dagger(t)+\cancel{\rho F(t)}\Big)+\sum_{j,k=1}^{N^2-1}a_{jk}(t)F_j\rho F_k^\dagger\Big\}\\
&= \mathrm{tr}\Big\{2\frac{a_{N^2N^2}}{2N}\rho+F(t)\rho+\rho F^\dagger(t)+\sum_{j,k=1}^{N^2-1}a_{jk}(t)F_j\rho F_k^\dagger\Big\}\\
&= \mathrm{tr}\Big\{2\frac{a_{N^2N^2}}{2N}\rho+F(t)\rho\Big\}+\mathrm{tr}\Big\{\rho F^\dagger(t)\Big\}+\mathrm{tr}\Big\{\sum_{j,k=1}^{N^2-1}a_{jk}(t)F_j\rho F_k^\dagger\Big\}\\
&= \mathrm{tr}\Big\{2\frac{a_{N^2N^2}}{2N}\rho+F(t)\rho\Big\}+\mathrm{tr}\Big\{F^\dagger(t)\rho\Big\}+\mathrm{tr}\Big\{\sum_{j,k=1}^{N^2-1}a_{jk}(t)F_k^\dagger F_j\rho\Big\}\\
&= \mathrm{tr}\Big\{2\frac{a_{N^2N^2}}{2N}\rho+F(t)\rho+F^\dagger(t)\rho+\sum_{j,k=1}^{N^2-1}a_{jk}(t)F_k^\dagger F_j\rho\Big\}\\
&= \mathrm{tr}\Big\{\Big(2G(t)+\sum_{j,k=1}^{N^2-1}a_{jk}(t)F_k^\dagger F_j\Big)\rho\Big\} \qquad (37.2)
\end{aligned}$$

نستنتج الآن عبارة $G(t)$:

$$\begin{aligned}
0=\mathrm{tr}\left(\mathcal{L}_t(\rho)\right) &= \mathrm{tr}\Big\{\Big(2G(t)+\sum_{j,k=1}^{N^2-1}a_{jk}(t)F_k^\dagger F_j\Big)\rho\Big\}\\
&\Rightarrow\ G(t)=\frac{-1}{2}\sum_{j,k=1}^{N^2-1}a_{jk}(t)F_k^\dagger F_j \qquad (38.2)
\end{aligned}$$

نلاحظ هنا أن ما هذا إلا الشرط $\sum_\alpha {K_\alpha}^\dagger K_\alpha=\mathbb{1}$ بطريقة تفاضلية، وبالتالي فإن المولد $\mathcal{L}_t$ يأخذ الشكل التالي:

$$\mathcal{L}_t(\rho)=-i[H(t),\rho]+\sum_{j,k=1}^{N^2-1}a_{jk}(t)\Big[F_j\rho F_k^\dagger-\frac{1}{2}\Big\{F_k^\dagger F_j,\rho\Big\}\Big] \qquad (39.2)$$

نلاحظ أن المصفوفة $j,k=1,...,N^2-1$, $a_{jk}(t)$ موجبة، بسبب ايجابية $c_{jk}(t+\epsilon,t)$ ومنه يمكن تقطيرها من أجل أي t. لتكن المصفوفة الواحدية $U(t)$ ومنه:

$$\sum_{j,k}^{N^2-1}u_{mj}(t)a_{jk}(t)u_{nk}^*(t)=\gamma_m(t)\delta_{mn} \qquad (40.2)$$

حيث γ_m هي القيم الذاتية وهي موجبة. سنعرف الآن مؤثرات جديدة $\mathrm{V_k}(t)$:

$$\mathrm{V_k}(t) = \sum_{j=1}^{N^2-1} u^*_{kj}(t) F_j \quad , \quad F_j = \sum_{k=1}^{N^2-1} u_{kj}(t)\mathrm{V_k}(t) \tag{41.2}$$

نعوض في المعادلة (39.2) نجد:

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[H(t),\rho] + \sum_{j,k=1}^{N^2-1} a_{jk}(t)\Bigg[\sum_{k=1}^{N^2-1} u_{kj}(t)\mathrm{V_k}(t)\rho \sum_{j=1}^{N^2-1} \mathrm{V_j}^\dagger(t) u^*_{jk}(t) \\ -\frac{1}{2}\Bigg\{\sum_{j=1}^{N^2-1} \mathrm{V_j}^\dagger(t) u^*_{jk}(t) \sum_{k=1}^{N^2-1} u_{kj}(t)\mathrm{V_k}(t),\rho\Bigg\}\Bigg] \tag{42.2}$$

نقوم بتغيير الأدلة التالي:

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[H(t),\rho] + \sum_{j,k=1}^{N^2-1} a_{jk}(t)\Bigg[\sum_{m=1}^{N^2-1} u_{mj}(t)\mathrm{V_m}(t)\rho \sum_{n=1}^{N^2-1} \mathrm{V_n}^\dagger(t) u^*_{nk}(t) \\ -\frac{1}{2}\Bigg\{\sum_{n=1}^{N^2-1} \mathrm{V_n}^\dagger(t) u^*_{nk}(t) \sum_{m=1}^{N^2-1} u_{mj}(t)\mathrm{V_m}(t),\rho\Bigg\}\Bigg] \tag{43.2}$$

ومنه:

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[H(t),\rho] \sum_{m=1}^{N^2-1}\sum_{n=1}^{N^2-1} \left(\sum_{j,k=1}^{N^2-1} u_{mj}(t) a_{jk}(t) u^*_{nk}(t)\right)\mathrm{V_m}(t)\rho\mathrm{V_n}^\dagger(t) \\ -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N^2-1}\sum_{m=1}^{N^2-1}\left\{\left(\sum_{j,k=1}^{N^2-1} u_{mj}(t) a_{jk}(t) u^*_{nk}(t)\right)\mathrm{V_n}^\dagger(t)(t)\mathrm{V_m}(t),\rho\right\} \tag{44.2}$$

باستعمال العلاقة (40.2) نحصل على:

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[H(t),\rho] \sum_{m=1}^{N^2-1}\sum_{n=1}^{N^2-1} \gamma_m \delta_{mn} \mathrm{V_m}(t)\rho\mathrm{V_n}^\dagger(t) \\ -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N^2-1}\sum_{m=1}^{N^2-1}\left\{\gamma_m \delta_{mn}\mathrm{V_n}^\dagger(t)(t)\mathrm{V_m}(t),\rho\right\} \tag{45.2}$$

بالجمع على n :

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[H(t),\rho] \sum_{m=1}^{N^2-1} \gamma_m \mathrm{V_m}(t)\rho\mathrm{V_m}^\dagger(t) - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N^2-1}\left\{\gamma_m \mathrm{V_m}^\dagger(t)(t)\mathrm{V_m}(t),\rho\right\} \tag{46.2}$$

ومنه نحصل على النتيجة المرجوة:

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[H(t),\rho] + \sum_k \gamma_k(t)\left[\mathrm{V_k}(t)\rho\mathrm{V_k}^\dagger(t) - \frac{1}{2}\left\{\mathrm{V_k}^\dagger(t\mathrm{V_k}(t)),\rho\right\}\right] \tag{47.2}$$

بالنسبة للجانب الثاني من النظرية، نفرض أن بعض الديناميكيات تعطى بمعادلة تفاضلية كـ (47.2) وبما أنها معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى، فإنه توجد عائلة مستمرة من المنتشرات التي تحقق:

$$\varepsilon_{(t_2,t_0)} = \varepsilon_{(t_2,t_1)}\varepsilon_{(t_1,t_0)} \tag{48.2}$$

$$\varepsilon_{(t,t)} = \mathbb{1} \tag{49.2}$$

من أجل $t_2 \geq t_1 \geq t_0$، من الواضح أن هذه التطبيقات تحفظ الأثر نأخذ كمثال:

$$\mathrm{tr}\big(\varepsilon_{(t_2,t_0)}\rho(t_0)\big) = \mathrm{tr}(\rho(t_2)) = 1 = \mathrm{tr}(\rho(t_0)) \tag{50.2}$$

والبقية بنفس الطريقة. الهدف هنا هو إثبات أنه من أجل أي لحظة $t_2 \geq t_1$ أن التطبيقات الديناميكية $\varepsilon_{(t_2,t_1)}$ هي: $UDMs$ ، أو مكافئة لتطبيقات موجبة تماما. لهذا سنستخدم بعض التقريبات. باستخدام نظرية "معادلة تقسيم الوقت" يمكننا كتابة التطبيق على الشكل التالي:

$$\varepsilon_{(t_2,t_1)} = \lim_{\max|t'_{j+1}-t'_j|\to 0} \prod_{j=n-1}^{0} e^{\mathcal{L}_{t'_j}(t'_{j+1}-t'_j)} \tag{51.2}$$

حيث $t_2 = t'_n \geq t'_{n-1} \geq ... \geq t_0 = t_1$.

من المعادلة(14.2) لدينا من أجل $\epsilon \lll 1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) &= \frac{\rho(t+\epsilon-\rho(t))}{\epsilon} = \mathcal{L}_t\rho(t) \\ \Rightarrow \rho(t+\epsilon) &= \rho(t) + \mathcal{L}_t\rho(t)\epsilon \\ &= (1+\mathcal{L}_t\epsilon)\rho(t) \\ &= e^{\mathcal{L}_t\epsilon}\rho(t) \end{aligned} \tag{52.2}$$

من أجل مجال زمني كبير $[0,t]$. نقوم بتقسيم هذا المجال إلى فترات زمنية صغيرة جدا حيث: $0 = t_1 < t_2 < ... < t_j < t_{j+1} < ... < t_n = t$ حيث: $t_{j+1} - t_j = \epsilon$ ومنه:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(t_2,t_1)} &= \lim_{\max|t'_{j+1}-t'_j|\to 0} e^{\sum_j \mathcal{L}t'_j(t'_{j+1}-t'_j)} \\ &= \lim_{\max|t'_{j+1}-t'_j|\to 0} \prod_{j=n-1}^{0} e^{\mathcal{L}_{t'_j}(t'_{j+1}-t'_j)} \end{aligned} \tag{53.2}$$

الآن، نأخذ أي عنصر من هذا الجداء: $\tau_l = t'_{l+1} - t'_l \geq 0 \quad , \quad e^{\mathcal{L}_{t'_l}\tau_l}$وبما أن الثوابت $\gamma_k(t)$ هي موجبة من أجل أي لحظة زمنية، ومنه يمكننا كتابة المولد عند لحظة t'_l ك:

$$\mathcal{L}_{t'_l}(.) = -i[H(t'_l),(.)] + \sum_k \left[\tilde{\mathrm{V}}_k(t'_l)(.)\tilde{\mathrm{V}}_k^\dagger(t'_l) - \frac{1}{2}\Big\{\tilde{\mathrm{V}}_k^\dagger(t'_l)\tilde{\mathrm{V}}_k(t'_l),(.)\Big\}\right]. \tag{54.2}$$

حيث: $\tilde{\mathrm{V}}_k(t'_l) = \sqrt{\gamma_k(t'_l)}\mathrm{V}_k(t'_l)$. الآن نقوم بتقسيم المولد إلى مجموع عدة أجزاء :

$$\mathcal{L}_{t'_l} = \sum_{k=0}^{M} \tilde{\mathcal{L}}_k. \tag{55.2}$$

حيث:

$$\tilde{\mathcal{L}}_0(.) = -i[H(t'_l),(.)] - \sum_m^M \frac{1}{2}\big\{\tilde{\mathrm{V}}_m^\dagger(t'_l)\tilde{\mathrm{V}}_m(t'_l),(.)\big\} \tag{56.2}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_k(.) = \tilde{\mathrm{V}}_k(t'_l)(.)\tilde{\mathrm{V}}_k^\dagger(t'_l) \quad , \quad k = 1,...M \tag{57.2}$$

حيث M هو الحد الأعلى في المجموع على k في (15.2). من جهة لدينا:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_0(\rho) &= -i[H(t_l'),(\rho)] - \sum_m^M \frac{1}{2}\{\tilde{\mathrm{V}}_m^\dagger(t_l')\tilde{\mathrm{V}}_m(t_l'),(\rho)\} = -iH(t_l')\rho + iH(t_l') \\ &- \sum_m \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{V}}_m^\dagger(t_l')\tilde{\mathrm{V}}_m(t_l')\rho - \sum_m \frac{1}{2}\rho\tilde{\mathrm{V}}_m^\dagger(t_l')\tilde{\mathrm{V}}_m(t_l') \qquad (58.2)\\ e^{\tilde{\mathcal{L}}_0\tau}\rho &= e^{\left[-iH(t_l')-\sum_m \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{V}}_m^\dagger(t_l')\tilde{\mathrm{V}}_m(t_l')\right]\tau}\rho e^{\left[iH(t_l')-\sum_m \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{V}}_m^\dagger(t_l')\tilde{\mathrm{V}}_m(t_l')\right]\tau} \qquad (59.2)\end{aligned}$$

المعادلة الأخيرة من الشكل $O\rho O^\dagger$، وبالتالي فهي موجبة تماما من أجل أي τ. من ناحية أخرى، من أجل $\tau > 0$:

$$e^{\tilde{\mathcal{L}}_k\tau}\rho = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\tau^m}{m!}\tilde{\mathrm{V}}_k^m(t_l')\rho\tilde{\mathrm{V}}_k^{\dagger m}(t_l') \qquad (60.2)$$

العبارة الأخيرة لها شكل كروس $\sum_m O_m\rho O_m^\dagger$أيضا، ومنه فهي ايجابية تامة لأجل كل k. الآن يمكننا استعمال صيغة لي-تروتر دون أي إشكال(لاحظ الملحق 3):

$$e^{\mathcal{L}_{t_l'}\tau} = e^{\left(\sum_{k=0}^M \tilde{\mathcal{L}}_k\right)\tau} = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^N e^{\frac{\tilde{\mathcal{L}}_k}{n}}\right)^n \qquad (61.2)$$

نلاحظ هنا أن العبارة الأخيرة (الجداء اللامتناهي) ماهي إلا تركيبة تطبيقات الموجبة تماما $e^{\tilde{\mathcal{L}}_k\tau/n}$ وهي موجبة تماما لكل τ. وبما أن هذا ينطبق على كل لحظة t_l' لصيغة تقسيم الوقت (51.2). وبالتالي فإن التطبيق $\varepsilon_{(t_2,t_1)}$ هو موجب تماما لأي t_2 و t_1 لأنه مجرد تركيبة أخرى من التطبيقات الموجبة تماما.
يمكن أن تؤخذ هذه النتيجة كنتيجة كونية لأعمال أ. كوساكوسكي [15--17] و ج.ليندبلاد [18] ، الذين قاموا بتحليل هذه المشكلة لحالة المعادلات المتجانسة للزمن، أي عندما تكون $UDMs$ تعتمد فقط على الفرق $\tau = t_2 - t_1$ ، $\varepsilon_{(t_2,t_1)} = \varepsilon_\tau$ ومنه فهي تشكل أحد معاملات شبه الزمرة (وليس زمرة لأن مقلوبيها ليسوا دائما UDM كما أثبتنا ذلك سابقا.) وكما نعلم، في إطار فرضية الاستمرارية، يمكن تعريف $\varepsilon_\tau = e^{\mathcal{L}\tau}$ حيث المولد $\mathcal{L}$ مستقل عن الزمن، وله الشكل:

$$\mathcal{L}\rho(t) = -i[H,\rho(t)] + \sum_k \gamma_k\left[V_k\rho(t)V_k^\dagger - \frac{1}{2}\{V^\dagger V,\rho(t)\}\right] \qquad (62.2)$$

هذه هي النتيجة التي أثبتتها جوريني و كوساكوسكي و سيدارشان [17] شبه الزمر ذات الأبعاد المحدودة وليندبلاد [18] لأنظمة الأبعاد اللانهائية مع المولدات المحدودة، أي للمجموعات شبه المستمرة بشكل موحد [19].

الفصل الثالث

الوصف المجهري: حالة ماركوفية

الفصل 3

الوصف المجهري : حالة ماركوفية

1.3 تمهيد:

تختلف ديناميكيات الأنظمة الكمومية المفتوحة عن نظيرتها المغلقة، حيث تعنى ديناميكيات الأنظمة الكمومية المفتوحة بالتطبيقات الكونية والاستمرارية في الزمن.
عموما، لن نستطيع التحكم مطلقا في المحيط لأنه سيكون خارج سيطرتنا أو له عدد لا نهائي من درجات الحرية. بحيث يكون حساب مؤثرات كروس المرتبطة صعبة وغير عملية. لهذا سيتم استعمال تقنيات أخرى لتسهيل الحسابات. كما سنعالجه في هذا القسم.

2.3 معادلة ناكاجيما-زوانزيغ

نفترض أن النظام A نظام مفتوح مقترن بالنظام B الذي يلعب دور المحيط. ومنه هاملتون النظام الكلي يعطى بـ:

$$H = H_A + H_B + V \tag{1.3}$$

حيث: H_A و H_B هما هاملتونا النظامان A و B على الترتيب، وV يمثل التفاعل بينهما. سنستخدم التقريب الذي أدخل من طرف ناكاجيما [20] و زوانزيغ [21] وباستخدام مؤثرات الإسقاط (وهي موسعة في [22,2])
في هذه الطريقة سنعرف مؤثري الإسقاط المتعامدين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ في فضاء هيلبرت المشترك(نظام+محيط) $H = H_A \otimes H_B$
حيث: $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$، $\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}$ و $\mathcal{P}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\mathcal{P} = 0$ ، و تعطى عبارتيهما كالتالي:

$$\mathcal{P}\rho = \mathrm{tr}_B(\rho) \otimes \rho_B \tag{2.3}$$

$$\mathcal{Q}\rho = (1 - \mathcal{P})\rho \tag{3.3}$$

حيث: $\rho \in H$ هي الحالة الكلية للنظام، و $\rho_B \in H_B$ هي الحالة الابتدائية للمحيط، وهي حالة ثابتة (هذا ليس ضروريا، فقط لتفادي تعقيد الحسابات). نفرض أن النظام B (المحيط) في البداية في حالة اتزان حراري، ومنه نكتب:

$$\rho_B = \rho_{th} = \frac{e^{-\beta H_B}}{\mathrm{tr}(e^{-\beta H_B})} \tag{4.3}$$

حيث: $\beta = 1/T$ ، نلاحظ هنا أن $\mathcal{P}\rho$ يعطي كل المعلومات الضرورية حول النظام المختزل ρ_A، إذ أن معرفة ديناميكيات $\mathcal{P}\rho$ تفضي إلى معرفة التطور الزمني للنظام المختزل:

$$\mathcal{P}\rho = \mathrm{tr}_B(\rho) \otimes \rho_B = \rho_A \otimes \rho_B \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho &= \frac{d}{dt}\rho_A \otimes \rho_B + \rho_A \otimes \cancelto{0}{\frac{d}{dt}\rho_B} \\ &= \frac{d}{dt}\rho_A \otimes \rho_B \end{aligned} \tag{6.3}$$

ننطلق من معادلة فان-نيومن (5.1) للنظام الكلي:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H_A + H_B + V, \rho(t)] \tag{7.3}$$

من المعادلات (2.3)، (3.3) و(7.3) نجد:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho(t) &= \frac{d}{dt}\rho_A \otimes \rho_B \\ &= \mathrm{tr}_B\left(\frac{d}{dt}\rho\right) \otimes \rho_B \\ &= \mathcal{P}\frac{d}{dt}\rho = -i\mathcal{P}[H_A + H_B + V, \rho(t)] \end{aligned} \tag{8.3}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{Q}\rho(t) &= \frac{d}{dt}(1-\mathcal{P})\rho(t) = -i[H_A + H_B + V, \rho(t)] + i\mathcal{P}[H_A + H_B + V, \rho(t)] \\ &= -i\mathcal{Q}[H_A + H_B + V, \rho(t)] \end{aligned} \tag{9.3}$$

نعيد ترتيب المعادلتين الأخيرتين:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho(t) = -i\mathcal{P}[H_A + H_B + V, \rho(t)] \tag{10.3}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{Q}\rho(t) = -i\mathcal{Q}[H_A + H_B + V, \rho(t)] \tag{11.3}$$

وكما هو المعتاد في نظرية الاضطراب، يجب العمل في إطار تمثيل التفاعل فيما يتعلق بالهاملتونين الجزئيين:

$$\tilde{\rho}(t) = e^{i(H_A+H_B)t}\rho(t)e^{-i(H_A+H_B)t} \tag{12.3}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_B\left[\tilde{\rho}(t)\right] &= \mathrm{tr}_B\left[e^{i(H_A+H_B)t}\rho(t)e^{-i(H_A+H_B)t}\right] \\ &= e^{iH_At}\,\mathrm{tr}_B\left[e^{iH_Bt}\rho(t)e^{-iH_Bt}\right]e^{-iH_At} \\ &= e^{iH_At}\big(\mathrm{tr}_B\,\rho(t)\big)e^{-iH_At} = \tilde{\rho}_A(t) \end{aligned} \tag{13.3}$$

نشير هنا أن مؤثرات الإسقاط تبقى محفوظة تحت هاتين العملية والمعادلتين (10 . 3) و (11 . 3) يمكن كتابتهما في إطار تمثيل التفاعل كـ:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\tilde{\rho}(t) = \mathcal{P}\frac{d}{dt}\tilde{\rho}(t) = -i\mathcal{P}\left[\tilde{V}(t), \tilde{\rho}(t)\right] \tag{14.3}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t) = \mathcal{Q}\frac{d}{dt}\tilde{\rho}(t) = -i\mathcal{Q}\left[\tilde{V}(t), \tilde{\rho}(t)\right] \tag{15.3}$$

سنستعمل الترميز التالي $\mathcal{V}(t).\equiv -i\big[\tilde{V}(t),.\big]$ ثم بإدخال المساواة $\mathbb{1} = \mathcal{P} + \mathcal{Q}$ بين $\mathcal{V}(t)$ و $\tilde{\rho}(t)$، المعادلتين (14 . 3) و (15 . 3) يمكن كتابتهما كالتالي:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\tilde{\rho}(t) = \mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{P}\tilde{\rho}(t) + \mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t) \tag{16.3}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t) = \mathcal{Q}\mathcal{V}(t)\mathcal{P}\tilde{\rho}(t) + \mathcal{Q}\tilde{\rho}(t) \tag{17.3}$$

التبرير:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{P}\tilde{\rho}(t)+\mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t) &= -i\mathcal{P}\Big[\mathrm{V}\tilde{(t)},\mathcal{P}\tilde{\rho}(t)\Big]-i\mathcal{P}\Big[\mathrm{V}\tilde{(t)},\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t)\Big]\\
&= -i\mathcal{P}\Big(\tilde{\mathrm{V}}(t)\mathcal{P}\tilde{\rho}(t)-\mathcal{P}\tilde{\rho}(t)\tilde{\mathrm{V}}(t)+\tilde{\mathrm{V}}(t)\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t)-\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t)\tilde{\mathrm{V}}(t)\Big)\\
&= -i\Big(\mathcal{P}\tilde{\mathrm{V}}(t)\mathcal{P}\tilde{\rho}(t)-\tilde{\rho}(t)\tilde{\mathrm{V}}(t)+\mathcal{P}\tilde{\mathrm{V}}(t)\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t)\Big)\\
&= -i\Big(\cancel{\mathcal{P}\tilde{\mathrm{V}}(t)\mathcal{P}\tilde{\rho}(t)}-\mathcal{P}\tilde{\rho}(t)\tilde{\mathrm{V}}(t)+\mathcal{P}\tilde{\mathrm{V}}(t)\tilde{\rho}(t)-\cancel{\mathcal{P}\tilde{\mathrm{V}}(t)\mathcal{P}\tilde{\rho}(t)}\Big)\\
&= -i\mathcal{P}\big[\tilde{\mathrm{V}}(t),\tilde{\rho}(t)\big]=\mathcal{P}\mathcal{V}(t)\tilde{\rho}(t)=\frac{d}{dt}\mathcal{P}\tilde{\rho}(t) \qquad (18.3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}\mathcal{V}(t)\mathcal{P}\tilde{\rho}(t)+\mathcal{Q}\mathcal{V}(t)\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t) &= -i\mathcal{Q}\big[\tilde{\mathrm{V}}(t),\mathcal{P}\tilde{\rho}(t)\big]-i\mathcal{Q}\big[\tilde{\mathrm{V}}(t),\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t)\big]\\
&= -i\mathcal{Q}\Big(\tilde{\mathrm{V}}(t)\mathcal{P}\tilde{\rho}(t)-\mathcal{P}\tilde{\rho}(t)\tilde{\mathrm{V}}(t)+\tilde{\mathrm{V}}(t)\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t)-\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t)\tilde{\mathrm{V}}(t)\Big)\\
&= -i\Big(\mathcal{Q}\tilde{\mathrm{V}}(t)\mathcal{P}\tilde{\rho}(t)+\mathcal{Q}\tilde{\mathrm{V}}(t)\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t)-\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t)\tilde{\mathrm{V}}(t)\Big)\\
&= -i\Big(\mathcal{Q}\tilde{\mathrm{V}}(t)\tilde{\rho}(t)-\cancel{\mathcal{Q}\tilde{\mathrm{V}}(t)\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t)}+\cancel{\mathcal{Q}\tilde{\mathrm{V}}(t)\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t)}-\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t)\tilde{\mathrm{V}}(t)\Big)\\
&= -i\mathcal{Q}\Big(\tilde{\mathrm{V}}(t)\tilde{\rho}(t)-\tilde{\rho}(t)\tilde{\mathrm{V}}(t)\Big)=-i\mathcal{Q}\big[\tilde{\mathrm{V}}(t),\tilde{\rho}(t)\big]=\frac{d}{dt}\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t)
\end{aligned}
$$
(19.3)

بمكاملة المعادلة (16 . 3)نجد

$$\mathcal{P}\tilde{\rho}(t)=\mathcal{P}\tilde{\rho}(0)+\int_0^t ds\mathcal{P}\mathcal{V}(s)\mathcal{P}\tilde{\rho}(s)+\int_0^t ds\mathcal{P}\mathcal{V}(s)\mathcal{Q}\tilde{\rho}(s) \qquad (20.3)$$

حيث وضعنا الحد الأول للتكامل 0 وهذا لن يؤثر على التعميم، من ناحية أخرى، المعادلة الثانية هي عبارة عن معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى بطرف ثاني من الشكل:

$$y'+f(x)y=r(x) \qquad (21.3)$$

حيث حل المعادلة المتجانسة $y'+f(x)y=0$ يعطى بـ: $v(x)=Ce^{-\int_0^x f(t)dt}\equiv v(x,0)$ ، نكتب حل المعادلة (21.3) على الشكل:

$$y=u(x)v(x,0) \qquad (22.3)$$

نعوض (22.3) في (21.3):

$$
\begin{aligned}
u(x)v'(x,0) &+ u'(x)v(x,0)+f(x)u(x)v(x,0)=r(x)\\
v(x,0)u'(x) &+ u(x)\big[\cancelto{0}{v'(x,0)+f(x)v(x,0)}\ \big]=r(x)\\
v(x,0)u'(x) &= r(x)\\
u'(x) &= v^{-1}(x,0)r(x)\\
u(x) &= \int_0^x v^{-1}(s,0)r(s)ds\\
y &= \left[\int_0^x v^{-1}(s,0)r(s)ds+d\right]v(x,0)\\
&= v(x,0)\int_0^x v^{-1}(s,0)r(s)ds+d.v(x,0) \qquad (23.3)
\end{aligned}
$$

من أجل $x=0$ ، لدينا:

$$\begin{aligned} y(x=0) &= d \qquad (24.3) \\ y(x) &= v(x,0)\int_0^x v^{-1}(s,0)r(s)ds + y(0)v(x,0) \\ &= \int_0^x v(x,0)v^{-1}(s,0)r(s)ds + y(0)v(x,0) \\ &= \int_0^x v(x,0)v(0,s)r(s)ds + y(0)v(x,0) \\ &= \int_0^x v(x,s)r(s)ds + y(0)v(x,0) \\ &= \int_0^x e^{-\int_s^x f(t)dt} r(s)ds + y(0)e^{-\int_0^x f(t)df} \qquad (25.3) \end{aligned}$$

هذا في حالة الدوال، ويمكن تعميم الحل حتى في حالة المؤثرات، حيث حل المعادلة المتجانسة:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t) = \mathcal{Q}\mathcal{V}(t)\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t) \qquad (26.3)$$

يعطى بتحليل دايسون بالمنتشر:

$$\mathcal{G}(t,s) = \mathcal{T}e^{\int_s^t dt'\mathcal{Q}\mathcal{V}(t')} \qquad (27.3)$$

ومنه حل المعادلة الثانية يكتب على الشكل التالي:

$$\mathcal{Q}\tilde{\rho}(t) = \mathcal{G}(t,0)\mathcal{Q}\tilde{\rho}(0) + \int_0^t ds\mathcal{G}(t,0)\mathcal{Q}\mathcal{V}(s)\mathcal{P}\tilde{\rho}(s) \qquad (28.3)$$

بتعويض المعادلة (20 . 3)في المعادلة (28 . 3)نجد:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\tilde{\rho}(t) = \mathcal{P}\rho(0) + \int_0^t ds\mathcal{P}\mathcal{V}(s)\mathcal{P}\tilde{\rho}(s) + \int_0^t ds\mathcal{P}\mathcal{V}(s)\mathcal{G}(s,0)\mathcal{Q}\tilde{\rho}(0) \\ + \int_0^t ds \int_0^s du\mathcal{P}\mathcal{V}(s)\mathcal{G}(s,u)\mathcal{Q}\mathcal{V}(u)\mathcal{P}\tilde{\rho}(u) \qquad (29.3) \end{aligned}$$

المعادلة الأخيرة هي الشكل التكاملي لمعادلة ناكاجيما-زوانزيغ وبمفاضلتها نتحصل على:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\tilde{\rho}(t) = \mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{P}\tilde{\rho}(t) + \mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{G}(t,0)\mathcal{Q}\tilde{\rho}(0) + \int_0^t du\mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{G}(t,)\mathcal{Q}\mathcal{V}(u)\mathcal{P}\tilde{\rho}(u \qquad (30.3)$$

هذه المعادلة تسمى معادلة ناكاجيما-زوانزيغ العامة.
الآن نستعمل الفرضية التالية: $\mathcal{P}\mathcal{V}(t)=0$ نجد:

$$\mathcal{P}\mathcal{V}(t)\rho = -i\,\mathrm{tr}_B\left[\tilde{V}(t), \rho_A\otimes\rho_B\right]\otimes\rho_B = -i\Big[\mathrm{tr}_B\left(\tilde{V}(t)\rho_B\right), \rho_A\Big]\otimes\rho_B = 0 \qquad (31.3)$$

وبالتالي من أجل كل ρ ومنه كل ρ_A لدينا $\mathrm{tr}_B\left(\tilde{B}(t)\rho_B\right)=0$ ،أما إن لم تكن محققة (حيث أنها ليست الحالة العامة في معظم الحالات العملية) شرط أن تتبادل ρ_B مع H_B فنعرف هاملتون تفاعل جديد مع تغيير في عبارة الطاقة الأصلية للنظام A [24,23].

$$V' = V - \mathrm{tr}_B\left(V\rho_B\right)\otimes\mathbb{1} \qquad , \qquad H'_A = H_A + \mathrm{tr}_B\left(V\rho_B\right)\otimes\mathbb{1} \qquad (32.3)$$

ومع ذلك فإن الهاملتون الكلي يبقى نفسه.

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_B\left(\tilde{V}'(t)\rho_B\right) &= \mathrm{tr}_B\left(e^{i\left(H'_A+H_B\right)t}V'e^{-i\left(H'_A+H_B\right)t}\rho_B\right) \\ &= e^{iH'_At}\,\mathrm{tr}_B\left(e^{iH_Bt}Ve^{-iH_Bt}\rho_B\right)e^{-iH'_At} \\ &- e^{iH'_At}\,\mathrm{tr}_B\left(V\rho_B\right)e^{-iH'_At}\,\mathrm{tr}_B\left(e^{iH_Bt}\rho_Be^{-iH_Bt}\right) \\ &= e^{iH'_At}\,\mathrm{tr}_B\left(V\rho_B\right)e^{-iH'_At} - e^{iH'_At}\left(V\rho_B\right)e^{-iH'_At} = 0 \end{aligned} \tag{33.3}$$

محققة.

الفرضية الثانية التي نستعملها هنا أيضا $\rho(0) = \rho_A(0) \otimes \rho_B(0)$ وهي الفرضية اللازمة للحصول على UDM. طبعا ستنشأ بعض الشكوك هنا حول ما إذا كان النظام B خارج سيطرتنا، فلا يوجد ضمان أن هذه النظرية محققة. ومع ذلك فإن التحكم في النظام A يكفي لضمان هذا الشرط، لأنه سيكون كافيا لإعداد حالة نقية في A، انظر [25] على سبيل المثال، وأيضا من خلال النظرية (التي برهنت على أنه من أجل ρ_A نقية فإن $\rho_{corr} = 0$) أي: النظام الكلي في اللحظة الابتدائية في حالة جداء تنسوري. هاتين الفرضيتين تسمحان بتلاشي الحد الثاني والثالث في المعادلة(29 . 3)ومنه تنتج المعادلة التكامل-تفاضلية

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\tilde{\rho}(t) = \int_0^t \mathcal{K}du(t,u)\mathcal{P}\tilde{\rho}(u) \tag{34.3}$$

حيث:

$$\mathcal{K}(t,u) = \mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{G}(t,u)\mathcal{Q}\mathcal{V}(u) \tag{35.3}$$

إذا كانت هذه النواة $\mathcal{K}(t,u) = \mathcal{K}(t-u)$ وهذا هو الحال بالنسبة للحالات الثابتة ρ_B يمكن حل هذه المعادلة باستعمال تحويل لابلاس [26] ، ولكن عادة ما يتحول إلى مشكلة مستعصية في الممارسة.

من أجل تحويل هذه المعادلة التكامل-تفاضلية في المعادلة الماركوفية الرئيسية نود أن نحول التكامل على الجانب الأيمن من (34 . 3)إلى مولد على شكل (15.2) لتحقيق هذا يتمثل أول تخمين بديهي في محاولة جعل سلوك $\mathcal{K}(t,u)$ كدالة دلتا فيما يتعلق بـ $\tilde{\rho}(t)$. ولكي يكون ذلك صحيحا، يجب أن يكون زمن التغير المميز τ_A لـ $\tilde{\rho}(u)$ (والذي يرجع فقط إلى التفاعل مع B لأننا أزلنا بقية الديناميكيات من خلال أخذ تمثيل التفاعل.) أكبر بكثير من الزمن τ_B الذي يميز السرعة التي تتناقص بها النواة $\mathcal{K}(t,u)$ عند $|t-u| \geq 1$. بالطبع هذا النوع من التقريبات ينطوي في جوهره على بعض الافتراضات حول حجم B وقوة الهاملتونين. وليس هناك أي ضمان من حيث المبدأ بأن المعادلة الناتجة لها شكل (15.2) . ولقد تم دراسة العديد من الأعمال [27--31] بعناية ، حيث تم تمييز حدين:

***حد الاقتران الضعيف:** دعنا نعيد كتابة $V \longrightarrow \alpha V$ حيث يعبر α عن قوة التفاعل. ونظرا لصغر α يكون تغير $\tilde{\rho}(u)$ بطيئا، وعند النهاية $\alpha \longrightarrow 0$ نحصل على $\tau_A \longrightarrow \infty$ ومنه $\tau_A/\tau_B \longrightarrow \infty$ من أجل أي τ_B ثابت. طبعا بالنسبة $\alpha = 0$ لا يوجد التفاعل. ولذا يجب أن يتم ضبط عامل الزمن بشكل مناسب قبل أخذ الحد.

***حد الاقتران المفرد:** هذا يتوافق مع الحالة المعاكسة بطريقة أو بأخرى. هنا نحصل على $\tau_B \longrightarrow 0$ من خلال جعل $\mathcal{K}(t,u)$ تقترب من دالة دلتا. نشير هنا أنه يمكن للمرء بناء نماذج ماركوفية تصف النظام من الناحية المجهرية، انظر على سبيل المثال [33,32] . هاتان الحالتان شرطان كافيان للحصول على تطور ماركوفيان لكن غير لازمان.

3.3 حد الاقتران الضعيف

كما قلنا أعلاه، إذا افترضنا حد الاقتران الضعيف، فإن تغيير $\tilde{\rho}(t)$ يهمل خلال τ_B الزمن المميز لتغير النواة $\mathcal{K}(t,u)$. لتنفيذ هذا الحد، نعتبر مرة أخرى المعادلة (29 . 3) تحت الفرضيات $\mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{P} = 0$ و $\rho(0) = \rho_A(0) \otimes \rho_B(0)$.

$$\mathcal{P}\tilde{\rho}(t) = \mathcal{P}\rho(0) + \alpha^2\int_0^t ds\int_0^s du\mathcal{P}\mathcal{V}(s)\mathcal{G}(s,u)\mathcal{Q}\mathcal{V}(u)\mathcal{P}\tilde{\rho}(u) \tag{36.3}$$

حيث أعدنا كتابة هاملتون التفاعل على الشكل: $V \longrightarrow \alpha V$ (ومنه $\mathcal{V} \longrightarrow \alpha\mathcal{V}$) وبما أن الحالة الكلية للنظام في إطار تمثيل التفاعل تحقق معادلة فان ـ نيومن:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}(t) = -i\alpha\big[\tilde{V}(t), \tilde{\rho}(t)\big] \qquad (37.3)$$

نستطيع إرفاق الحالة الكلية في اللحظتين s و u (حيث: $u \leq s$) بالحل الواحدي:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(s) = \tilde{U}(s,u)\tilde{\rho}(u)\tilde{U}^{\dagger}(s,u) &= \tilde{\mathcal{U}}(s,u)\tilde{\rho}(u) \\ &\Rightarrow \tilde{\rho}(u) = \tilde{U}^{\dagger}(s,u)\tilde{\rho}(s)\tilde{U}(s,u) \equiv \mathcal{U}(u,s)\tilde{\rho}(s) \qquad (38.3) \end{aligned}$$

بإدخال هذا المؤثر في المعادلة (36 . 3) نجد:

$$\mathcal{P}\tilde{\rho}(t) = \mathcal{P}\rho(0) + \alpha^2 \int_0^t ds \int_0^s du \mathcal{P}\mathcal{V}(s)\mathcal{G}(s,u)\mathcal{Q}\mathcal{V}(u)\mathcal{P}\tilde{\mathcal{U}}(u,s)\tilde{\rho}(s) \qquad (39.3)$$

الآن : الحد داخل التكامل الثنائي سمح بتوسيع في قوى α التي أعطيت بالسلسلة الزمنية المرتبة لـ :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(s,u) &= \mathcal{T} e^{\alpha \int_s^t dt' \mathcal{Q}\mathcal{V}(t')} && (40.3) \\ \tilde{\mathcal{U}}(u,s) &= \Big[\tilde{\mathcal{U}}(s,u)\Big]^{\dagger} = \Big[\mathcal{T} e^{\alpha \int_u^s dt' \mathcal{V}}\Big]^{\dagger} = \mathcal{T}^* e^{\alpha \int_u^s dt' \mathcal{V}^{\dagger}(t')} && (41.3) \end{aligned}$$

حيث أخذ المرافق على كل عناصر التوسع و $\mathcal{T}^*$ يرمز للترتيب الزمني المعاكس، وهو يعرف بمثل تعريف $\mathcal{T}$ في (7) ولكن بترتيب في الاتجاه المعاكس. حيث المؤثرات في لحظات لاحقة تظهر في الحدود الأولى للجداء، وبالتالي في أدنى ترتيب نحصل على :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\tilde{\rho}(t) &= \mathcal{P}\rho(0) + \alpha^2 \int_0^t ds \int_0^s du \mathcal{P}\mathcal{V}(s)\mathcal{Q}\mathcal{V}(u)\mathcal{P}\tilde{\rho}(s) + \mathcal{O}(\alpha^3) \\ &= \mathcal{P}\rho(0) + \alpha^2 \int_0^t ds \int_0^s du \mathcal{P}\mathcal{V}(s)(\mathbb{1} - \mathcal{P})\mathcal{V}(u)\mathcal{P}\tilde{\rho}(s) + \mathcal{O}(\alpha^3) \\ &= \mathcal{P}\rho(0) + \alpha^2 \int_0^t ds \int_0^s du \mathcal{P}\mathcal{V}(s)\mathbb{1}\mathcal{V}(u)\mathcal{P}\tilde{\rho}(s) \\ &- \alpha^2 \int_0^t ds \int_0^s du \mathcal{P}\mathcal{V}(s) \cancelto{0}{\mathcal{P}\mathcal{V}(u)\mathcal{P}\tilde{\rho}(s)} + \mathcal{O}(\alpha^3) \\ &= \mathcal{P}\rho(0) + \alpha^2 \int_0^t ds \int_0^s du \mathcal{P}\mathcal{V}(s)\mathcal{V}(u)\mathcal{P}\tilde{\rho}(s) + \mathcal{O}(\alpha^3) \qquad (42.3) \end{aligned}$$

هنا استعملنا التحليل: $\mathcal{Q} = \mathbb{1} - \mathcal{P}$ و $\mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{P} = 0$. بعد تغيير $u \longrightarrow s - u$ نكتب المسقط $\mathcal{P}$ والمؤثرات $\mathcal{V}$ صراحة، نجد:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_A(t) &= \mathcal{P}\rho(0) + \alpha^2 \int_0^t ds \int_0^s du \mathcal{P}\mathcal{V}(s)\mathcal{V}(u)\,\mathrm{tr}_B(\tilde{\rho}(s)) \otimes \rho_B + \mathcal{O}(\alpha^3) \\ &= \mathcal{P}\rho(0) - i\alpha^2 \int_0^t ds \int_0^s du \mathcal{P}\mathcal{V}(s)\big[\tilde{V}(s-u), (\tilde{\rho}_A(s)) \otimes \rho_B\big] + \mathcal{O}(\alpha^3) \\ &= \mathcal{P}\rho(0) - i(-i)\alpha^2 \int_0^t ds \int_0^s du \mathcal{P}\big[\tilde{V}(s), \big[\tilde{V}(s-u), (\tilde{\rho}_A(s)) \otimes \rho_B\big]\big] + \mathcal{O}(\alpha^3) \\ &= \rho_A(0) - \alpha^2 \int_0^t ds \int_0^s du\, \mathrm{tr}_B \big[\tilde{V}(s), \big[\tilde{V}(s-u), \tilde{\rho}_A(s) \otimes \rho_B\big]\big] + \mathcal{O}(\alpha^3) \end{aligned}$$
$$(43.3)$$

1.3.3 تحليل V:

من أجل الاستمرار في الاشتقاق، نكتب هاملتون التفاعل على الشكل :

$$V = \sum_k A_k \otimes B_k \tag{44.3}$$

مع $A_k^\dagger = A_k$ و $B_k^\dagger = B_k$. بما أن V هرميتي ($V^\dagger = V$) يجب اختيار A_k و B_k هرميتيين.

إذا افترضنا أن V هو مجموع جداء أي مؤثرات عامة X_k و Y_k ، ومنه يمكن كتابته على الشكل التالي :

$$V = \sum_{k=1}^{n} X_k^\dagger \otimes Y_k + X_k \otimes Y_k^\dagger \tag{45.3}$$

حيث كل مؤثر يمكن تحليله إلى:

$$X_k = X_k^{(a)} + iX_k^{(b)} \tag{46.3}$$

حيث:

$$X_k^{(a)} = \frac{(X_k^\dagger + X_k)}{2} \quad , \quad X_k^{(b)} = \frac{i(X_k^\dagger - X_k)}{2} \tag{47.3}$$

وهي مؤثرات هرميتية:

$$X_k^{(a)\dagger} = \left(\frac{(X_k^\dagger + X_k)}{2}\right)^\dagger = \frac{(X_k + X_k^\dagger)}{2} = X_k^{(a)} \tag{48.3}$$

$$X_k^{(b)\dagger} = \left(\frac{i(X_k^\dagger - X_k)}{2}\right)^\dagger = \frac{-i(X_k - X_k^\dagger)}{2} = \frac{i(X_k^\dagger - X_k)}{2} = X_k^{(b)} \tag{49.3}$$

وبالمثل بالنسبة لـ Y_k ، $Y_k = Y_k^{(a)} + Y_k^{(b)}$ ، نعوض في المعادلة (45 . 3) نجد:

$$\begin{aligned}
V &= \sum_{k=1}^{n} \left(X_k^{(a)} - iX_k^{(b)}\right) \otimes \left(Y_k^{(a)} + iY_k^{(b)}\right) \\
&+ \left(X_k^{(a)} + iX_k^{(b)}\right) \otimes \left(Y_k^{(a)} - iY_k^{(b)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} X_k^{(a)} \otimes Y_k^{(a)} + \cancel{iX_k^{(a)} \otimes Y_k^{(b)}} - \cancel{iX_k^{(b)} \otimes Y_k^{(a)}} + X_k^{(b)} \otimes Y_k^{(b)} \\
&+ X_k^{(a)} \otimes Y_k^{(a)} - \cancel{iX_k^{(a)} \otimes Y_k^{(b)}} + \cancel{iX_k^{(b)} \otimes Y_k^{(a)}} + X_k^{(b)} \otimes Y_k^{(b)} \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} X_k^{(a)} \otimes Y_k^{(a)} + X_k^{(b)} \otimes Y_k^{(b)}
\end{aligned} \tag{50.3}$$

ومنه يمكن اختيار :

$$A_k = 2X_k^{(a)} \quad , \quad B_k = 2Y_k^{(a)} \quad , \quad k = 1, ..., n \tag{51.3}$$

$$A_k = 2X_{k-n}^{(b)} \quad , \quad B_k = 2Y_{k-n}^{(b)} \quad , \quad k = n+1, ..., 2n \tag{52.3}$$

نعود الآن إلى المعادلة (44 . 3)

سنركز على المؤثرات A_k، لنفترض في الوقت الحالي أن طيف H_A متقطع، ولتكن $|\psi_\epsilon\rangle$ حالة ذاتية مرفقة بالقيمة الذاتية ϵ.
نعرف

$$A_k(\omega) = \sum_{\epsilon'-\epsilon=\omega} |\psi_\epsilon\rangle \langle\psi_\epsilon| A_k |\psi'_\epsilon\rangle \langle\psi_{\epsilon'}| \tag{53.3}$$

حيث نجمع على كل ϵ و ϵ' اللذان يكون الفرق بينهما هو ω.
وبالتالي المؤثر المعرف أعلاه هو مؤثر ذاتي لـ $\mathcal{L}^A = i[H_A, .]$ بالقيمة الذاتية$-i\omega$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^A A_k(\omega) &= i[H_A, A_k(\omega)] \\
&= iH_A A_k(\omega) - iA_k(\omega)H_A \\
&= iH_A |\psi_\epsilon\rangle \langle\psi_\epsilon| A_k |\psi_{\epsilon'}\rangle \langle\psi_{\epsilon'}| \\
&- i|\psi_\epsilon\rangle \langle\psi_\epsilon| A_k |\psi_{\epsilon'}\rangle \langle\psi_{\epsilon'}| H_A \\
&= i\epsilon A_k(\omega) - i\epsilon' A_k(\omega) \\
&= -i(\epsilon'-\epsilon)A_k(\omega) = -i\omega A_k(\omega)
\end{aligned} \tag{54.3}$$

بنفس الطريقة نجد:

$$\mathcal{L}^A A_k^\dagger(\omega) = i\omega A_k^\dagger(\omega) \tag{55.3}$$

ومنه كنتيجة لذلك:

$$A_k^\dagger(\omega) = A_k(-\omega) \tag{56.3}$$

وهذا محقق من أجل أي k. بالإضافة إلى ذلك:

$$\begin{aligned}
\left[H_A, A_k^\dagger(\omega)A_l(\omega)\right] &= A_k^\dagger(\omega)[H_A, A_l(\omega)] + \left[H_A, A_k^\dagger(\omega)\right]A_l(\omega) \\
&= -\omega A_k^\dagger(\omega)A_l(\omega) + \omega A_l^\dagger(\omega)A_l\omega = 0
\end{aligned} \tag{57.3}$$

من ناحية أخرى، كتابة $A_k(\omega)$ و $A_k^\dagger(\omega)$ في تمثيل التفاعل باحترام أساس H_A سهل جدا

$$\begin{aligned}
e^{\mathcal{L}^A t} A_k(\omega) &= e^{iH_A t} A_k(\omega) e^{-iH_A t} \\
&= e^{iH_A t} \sum_{\epsilon'-\epsilon=\omega} |\psi_\epsilon\rangle \langle\psi_\epsilon| A_k |\psi'_\epsilon\rangle \langle\psi_{\epsilon'}| e^{-iH_A t} \\
&= e^{i\epsilon t} \sum_{\epsilon'-\epsilon=\omega} |\psi_\epsilon\rangle \langle\psi_\epsilon| A_k |\psi'_\epsilon\rangle \langle\psi_{\epsilon'}| e^{-i\epsilon' t} = e^{-i\omega t} A_k(\omega)
\end{aligned} \tag{58.3}$$

بنفس الطريقة نجد:

$$e^{\mathcal{L}^A t} A_k^\dagger(\omega) = e^{iH_A t} A_k^\dagger(\omega) e^{-iH_A t} = e^{i\omega t} A_k^\dagger(\omega) \tag{59.3}$$

علاوة على ذلك، لاحظ أنه باستخدام علاقة تمام الأساس نجد:

$$\sum_\omega A_k(\omega) = \sum_{\epsilon'\epsilon} |\psi_\epsilon\rangle \langle\psi_\epsilon| A_k |\psi_{\epsilon'}\rangle \langle\psi_{\epsilon'}| = \mathbb{1} A_k \mathbb{1} = A_k \tag{60.3}$$

وبالمثل، باستخدام العلاقة: $A_k^\dagger = A_k$،

$$\sum_\omega A_k^\dagger(\omega) = A_k \tag{61.3}$$

ومنه، بإدراج هذا التحليل لـ A_k في (44 . 3) ومعالجتها في إطار تمثيل التفاعل نجد :

$$\tilde{V}(t) = \sum_{\omega,k} e^{-i\omega t} A_k(\omega) \otimes \tilde{B}_k(t) = \sum_{\omega,k} e^{i\omega t} A_k^\dagger(\omega) \otimes \tilde{B}_k^\dagger(t) \tag{62.3}$$

الآن، نعود إلى المعادلة (43.3)، باستعمال المساواة السابقة مع $\tilde{V}(s-u)$ والثانية بـ $\tilde{V}(s)$ يعطي :

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_A(t) = \rho_A(0) \quad &+ \quad \alpha^2 \int_0^t ds \sum_{\omega,\omega'} \sum_{k,l} e^{i(\omega'-\omega)s} \Gamma^s_{k,l}(\omega) \Big[A_l(\omega)\tilde{\rho}_A(s), A_k^\dagger(\omega')\Big] \\ &+ \quad e^{i(\omega-\omega')s} \Gamma^{s*}_{l,k}(\omega) \Big[A_l(\omega'), \tilde{\rho}_A(s) A_k^\dagger(\omega)\Big] + \mathcal{O}(\alpha^3)\end{aligned} \tag{63.3}$$

هنا كما أدرجنا الكميات :

$$\begin{aligned}\Gamma^s_{k,l}(\omega) &= \int_0^s du e^{i\omega u} \operatorname{tr}\Big[\tilde{B}_k(s)\tilde{B}_l(s-u)\rho_B\Big] \\ &= \int_0^s du e^{i\omega u} \operatorname{tr}\Big[\tilde{B}_k(s) B_l \rho_B\Big]\end{aligned} \tag{64.3}$$

حيث يتم تبرير الخطوة الأخيرة بتبادل ρ_B مع H_B. لاحظ الملحق4 . ثم نقوم بتغيير المتغير التالي $\tau = \alpha^2 t$ و $\sigma = \alpha^2 s$ نحصل على :

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_A(t) &= \tilde{\rho}_A(\tau/\alpha^2) \\ &= \rho_A(0) + \int_0^\tau d\sigma \sum_{\omega,\omega'} \sum_{k,l} e^{i(\omega'-\omega)\sigma/\alpha^2} \Gamma^{\sigma/\alpha^2}_{kl}(\omega) \Big[A_l(\omega)\tilde{\rho}_A(\sigma/\alpha^2), A_k^\dagger(\omega')\Big] \\ &+ \quad e^{i(\omega-\omega')\sigma/\alpha^2} \Gamma^{\sigma/\alpha^2 *}_{lk}(\omega) \Big[A_l(\omega'), \tilde{\rho}_A(\sigma/\alpha^2) A_k^\dagger(\omega')\Big] + \mathcal{O}(\alpha^3).\end{aligned} \tag{65.3}$$

من المعادلة الأخيرة نرى أنه عند النهاية $\alpha \longrightarrow 0$ (مع حفظ كون τ و σ محدودان)، مقياس الزمن لتغير $\tilde{\rho}_A(\tau/\alpha^2)$ هو τ فقط. ومنه نكتب:

$$\lim_{\alpha\to 0} \tilde{\rho}_A(t) = \lim_{\alpha\to 0} e^{iH_A\tau/\alpha^2} \rho_A(\tau/\alpha^2) e^{-iH_A\tau/\alpha^2} \equiv \tilde{\rho}_A(\tau) \tag{66.3}$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_A(\tau) &= \rho_A(0) + \lim_{\alpha\to 0} \int_0^\tau d\sigma \sum_{\omega,\omega'} \sum_{k,l} e^{i(\omega'-\omega)\sigma/\alpha^2} \Gamma^{\sigma/\alpha^2}_{kl}(\omega) \Big[A_l(\omega)\tilde{\rho}_A(\sigma/\alpha^2), A_k^\dagger(\omega')\Big] \\ &+ \quad e^{i(\omega-\omega')\sigma/\alpha^2} \Gamma^{\sigma/\alpha^2 *}_{lk}(\omega) \Big[A_l(\omega'), \tilde{\rho}_A(\sigma/\alpha^2) A_k^\dagger(\omega)\Big] + \mathcal{O}(\alpha^3) \\ &= \rho_A(0) + \lim_{\alpha\to 0} \int_0^\tau d\sigma \sum_{\omega,\omega'} \sum_{k,l} e^{i(\omega'-\omega)\sigma/\alpha^2} \Gamma^{\sigma/\alpha^2}_{kl}(\omega) \Big[A_l(\omega)\tilde{\rho}_A(\sigma), A_k^\dagger(\omega')\Big] \\ &+ \quad e^{i(\omega-\omega')\sigma/\alpha^2} \Gamma^{\sigma/\alpha^2 *}_{lk}(\omega) \Big[A_l(\omega'), \tilde{\rho}_A(\omega) A_k^\dagger(\omega)\Big].\end{aligned} \tag{67.3}$$

قبل الذهاب بعيدا في الاشتقاق، النتيجة الرياضية التي ستكون مفيدة بشكل خاص من الآن فصاعدا هي التالي :

توطئة ريمان-ليبزيك

لتكن الدالة $f(t)$
قابلة للمكاملة على المجال $[a,b]$ ومنه:

$$\lim_{x\to\infty}\int_a^b e^{ixt}f(t)dt=0 \qquad (68.3)$$

هناك العديد من الطرق للبرهان على هذا، هنا سنعرف الدالة $g(t)$ بالعبارة التالية:

$$g(t)=f(t)\big[\Theta(t-a)-\Theta(t-b)\big] \qquad (69.3)$$

ومنه:

$$\int_a^b e^{ixt}f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixt}g(t)dt=\hat{g}(x) \qquad (70.3)$$

حيث: $\hat{g}(x)$ ترمز لتحويل فوري لـ $g(t)$. من الواضح أن $g(t)$ إنجماعي المربع وبما أن تحويل فوري يحفظ الطويلة(بعض الأحيان يرمز إلى هذه بـ "نظرية $Parseval$") أي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{g}(x)|^2dx \qquad (71.3)$$

التي تدل أن $\hat{g}(x)$ هو أيضا إنجماعي المربع ومنه

$$\lim_{x\to\infty}\hat{g}(x)=0 \qquad (72.3)$$

بسبب هذه النتيجة وعند النهاية $\alpha\longrightarrow 0$ المعاملات المهتزة في المعادلة (67.3) مع $\omega'\neq\omega$ سيختفون.

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_A(\tau)=\rho_A(0) &+ \int_0^\tau d\sigma\sum_\omega\sum_{k,l}\Gamma_{kl}^{\infty}(\omega)\Big[A_l(\omega)\tilde{\rho}_A(\sigma),A_k^\dagger(\omega)\Big]\\ &+ \Gamma_{lk}^{\infty *}(\omega)\Big[A_l(\omega),\tilde{\rho}_A(\sigma)A_k^\dagger(\omega)\Big]\\ &\equiv \rho_A(0)+\int_0^\tau d\sigma\tilde{\mathcal{L}}[\tilde{\rho}_A(\sigma)].\end{aligned} \qquad (73.3)$$

هنا العوامل تعطى بتحويل فوري:

$$\Gamma_{kl}^{\infty}(\omega)=\int_0^\infty due^{i\omega u}\,\mathrm{tr}\Big[\tilde{B}_k(u)B_l\rho_B\Big]. \qquad (74.3)$$

2.3.3 دوال الربط:

لجعل التكاملات السابقة تتقارب، يجب أن تتناقص دوال الربط الخاصة بالمحيط، $\mathrm{tr}\left[\tilde{B}_k(u)B_l\rho_B\right]$ ، بزيادة u. نقوم بتحليل المؤثرات B_k

$$\mathrm{tr}\left[\tilde{B}_k(u)B_l\rho_B\right]=\sum_\omega e^{-i\omega u}\,\mathrm{tr}\left[B_k(\omega)B_l\rho_B\right] \qquad (75.3)$$

المعادلة الأخيرة تبين أن دوال الارتباط دورية في u، وتكاملها بتوسع إلى مالا نهاية سيتباعد. الحل الوحيد الممكن لكسر الدورية هو افتراض أن النظام B له درجات حرية لا حصر لها، في حين أن طيف H_B مستمر، ثم كل شيء هو نفسه فقط باستبدال المجاميع بتكاملات [4]، ومنه:

$$B_k=\int_{-a}^{a}d\omega B_k(\omega) \qquad (76.3)$$

حيث a هو التردد الذاتي الأعظمي (يمكن أن يكون غير منته.) ومنه دوال الربط تصبح:

$$\operatorname{tr}\left[\tilde{B}_k(u)B_l\rho_B\right] = \int_{-a}^{a} d\omega e^{-i\omega u}\operatorname{tr}\left[B_k(\omega)B_l\rho_B\right] \tag{77.3}$$

وبالطبع هي غير دورية بسبب الاقتراح الأخير:

$$\lim_{u\to\infty}\operatorname{tr}\left[B_k(\omega)B_l\rho_B\right] = 0. \tag{78.3}$$

الخلاصة

العامة

الخلاصة العامة

في الحقيقة لا يوجد نظام كمومي معزول تماما، لأنها تعتبر حالة مثالية قصوى لا يمكن الوصول إليها، أي بمعنى آخر كل الأنظمة الكمومية تتأثر بشكل أو بآخر بالبيئة المحيطة بها أو حتى بأجهزة القياس خلال تتبع تطور نظام ما. ومع ذلك غالبا ما تختص الدراسة في البداية بالحالة المثالية، وهذا ما تم تناوله في هذه المذكرة. حيث عرجنا في البداية على تذكير حول الأنظمة الكمومية المغلقة أو بمصطلح آخر المعزولة. إن التطور الزمني للأنظمة الكمومية المعزولة تحكمه معادلة شرودينجر. وفي الحالة العامة سنصف النظام بمؤثر الكثافة ρ بدلا عن دالة الحالة $|\psi\rangle$ ومنه ستحكم التطور الزمني لها معادلة ليوفيل فان-نيومن. إن حل معادلة شرودينجر يفضي إلى أن التطور الذي يخضع له مؤثر الكثافة واحدي ويأخذ عدة أشكال حسب شروط المسألة.

بعد ذلك دخلنا إلى صلب الموضوع مباشرة، دراسة ديناميكيات الأنظمة الكمومية المفتوحة. يخضع تطور النظام المفتوح للتطبيقات الديناميكية وهي تعتمد بالإضافة إلى مؤثر التطور الواحدي على خصائص النظامين Aو B أيضا، كما تتعلق بالحالة الابتدائية للنظام A، ما دفع للبحث عن تطبيق يكون مستقل عن $\rho_A(t_0)$ يدعى "التطبيق الديناميكي الكوني" يتميز بكونه خطي وموجب تماما كما يجب أن يكون تقلصا، من جهة أخرى التطبيقات الديناميكية الكونية لا تقبل معكوسا إلا إذا كانت واحدية. تعاني التطبيقات الديناميكية الكونية من مشكل آخر، ألا وهو مشكل استمراريتها في الزمن، حيث أن تركيب التطبيقات على الشكل: $\varepsilon_{(t_2,t_0)} = \varepsilon_{(t_2,t_1)}\varepsilon_{(t_1,t_0)}$ ستظهر لنا إشكالية : كون التطبيق $\varepsilon_{(t_2,t_1)}$ ليس كونيا عموما. مما وجب البحث عن تقريبات أخرى لدراسة التطور الزمني للنظام المفتوح. إذا كان تأثير ρ_{corr} مهمل على الديناميكيات فإن النموذج الماركوفي يكون تقريبا جيدا للدراسة.

كما قمنا بدراسة البنية الرياضية للعملية الماركوفية الكلاسيكية. بتطبيق قوانين الاحتمالات وصولا إلى معادلة "شابمان-كولموغروف" التي يوجد تقابل بينها وبين قانون تركيب التطبيقات الديناميكية. أما كموميا: فيكون التطور ماركوفيا إذا وفقط إذا كان يكتب على شكل محدد (المعادلة(2.15)).

مجهريا من أهم المعادلات في دراسة تطور الأنظمة المفتوحة زمنيا، معادلة ناكاجيما-زوانزيغ والتي يمكن أن نميز بها حدين أو نهايتين :حد الاقتران الضعيف وحد الاقتران المفرد. يتميز حد الاقتران الضعيف بالنهاية $\alpha \longrightarrow 0$ أي أن التفاعل بين النظام والمحيط ضعيف وضعيف جدا حيث أن لهذه النهاية تطبيقات كثيرة نذكر منها:نظام ذو مستويين محمد بخزان من الهزازات التوافقية، أو استبدال النظام ذو مستويين بهزاز توافقي آخر بالإضافة إلى تطبيق آخر هو: تلاشي الطور التام لنظام ذو مستويين . أما بالنسبة لحد الاقتران المفرد فيبقى موضوعا للدراسة المستقبلية وهو يعتبر الحالة التكميلية إلى حد ما لحد الاقتران الضعيف ،حيث سنحصل على $\tau_B \longrightarrow 0$ من خلال جعل دوال الربط تقترب من دالة دلتا .ومع ذلك فإن حد الاقتران المفرد ليس مفيدا في الممارسة العملية مثل حد الاقتران الضعيف .ونحصل على حد الاقتران المفرد عن طريق أخذ النهاية $\alpha \longrightarrow 0$ وعلى الرغم من أنه غير واقعي للغاية ،إلا أنه من الممكن العثور على معادلات فعالة للتطور .ومن تطبيقاته :التفاعلات مع الحقول الخارجية العشوائية الكلاسيكية [20] ودراسة عمليات القياس المستمر [34,2] بالإضافة إلى هذا ستظل الحالة غير الماركوفية أيضا لدراسة مستقبلية ،وهي تعتبر أكثر مشاركة من نظيرتها الماركوفية وأحد أسباب صعوبة دراستها هو تلاشي عائلات التطور وظهور بنى جديدة أكثر تعقيدا (على سبيل المثال عائلات التطور التي تتقلص في النهاية فقط أي وجود تطبيقات تحقق $\|\varepsilon_{(t,s)}\| > 1$ من أجل t وs كيفيين) .هناك عدة طرق لمعالجة الحالات غير الماركوفية فعلى سبيل المثال عندما يكون المحيط مكونا من درجات حرية منتهية (انظر [35--37]) ما يسمح لنا بإجراء محاكاة عددية فعالة للنظام المغلق الكلي ،ثم من خلال تتبع درجات الحرية للمحيط نحصل على تطور النظام المفتوح ،وغيرها.

الملحقات

الملحقات

1- برهان العلاقة (19.1)

$$U(t,t_0)=e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}H(s)ds} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial U(t)}{\partial t} &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\big(e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}H(s)ds}\big)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Bigg(\sum_{i=0}^{\infty}\big(\frac{1}{n!}\big)\big(\frac{-i}{\hbar}\big)^n\Big(\int_0^t H(s)ds\Big)^n\Bigg)\\
&= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Bigg(\mathbb{1}+\big(\frac{-i}{\hbar}\big)\int_0^t H(s)ds+\frac{1}{2}\big(\frac{-i}{\hbar}\big)^2\Big(\int_0^t H(s)ds\Big)^2+...\\
&+ \big(\frac{1}{n!}\big)\big(\frac{-i}{\hbar}\big)^n\Big(\int_0^t H(s)ds\Big)^n+...\Bigg)
\end{aligned} \tag{2}$$

نعالج الحد n على حدة:

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Bigg(\big(\frac{1}{n!}\big)\big(\frac{-i}{\hbar}\big)^n\Big(\int_0^t H(s)ds\Big)^n\Bigg) &= \big(\frac{1}{n!}\big)\big(\frac{-i}{\hbar}\big)^{n-1}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_0^t H(s_1)ds_1\int_0^t H(s_2)ds_2...\int_0^t H(s_n)ds_n\Big)\\
&= \big(\frac{1}{n!}\big)\big(\frac{-i}{\hbar}\big)^{n-1}\Bigg(H(t)\int_0^t H(s_2)ds_2...\int_0^t H(s_n)ds_n\\
&+ \int_0^t H(s_1)ds_1H(t)...\int_0^t H(s_n)ds_n\\
&+ \int_0^t H(s_1)ds_1\int_0^t H(s_2)ds_2...\int_0^t H(s_{n-1})ds_{n-1}H(t)\Bigg)\\
&= \big(\frac{1}{n!}\big)\big(\frac{-i}{\hbar}\big)^{n-1}\big(nH(t)\big)\Bigg(\Big(\int_0^t H(s)ds\Big)^{n-1}\Bigg)\\
&= H(t)\frac{1}{(n-1)!}\big(\frac{-i}{\hbar}\big)^{n-1}\Bigg(\Big(\int_0^t H(s)ds\Big)^{n-1}\Bigg)
\end{aligned} \tag{3}$$

بالتعويض في المعادلة (2) نجد:

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial U(t)}{\partial t} &= H(t)\Bigg(I+\big(\frac{-i}{\hbar}\big)\int_0^t H(s)ds+\frac{1}{2}\big(\frac{-i}{\hbar}\big)^2\Big(\int_0^t H(s)ds\Big)^2+...+\big(\frac{1}{n!}\big)\big(\frac{-i}{\hbar}\big)^n\\
&\Big(\int_0^t H(s)ds\Big)^n+...\Bigg)\\
&= H(t)\Bigg(\sum_{i=0}^{\infty}\big(\frac{1}{n!}\big)\big(\frac{-i}{\hbar}\big)^n\Big(\int_0^t H(s)ds\Big)^n\Bigg)=H(t)\big(e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}H(s)ds}\big)=H(t)\,U(t)
\end{aligned} \tag{4}$$

2- برهان العلاقة (20.1):

$$U(t,t_0)=\mathcal{T}e^{\frac{-i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}H(s)ds} \quad (1)$$

لدينا من العلاقة (10.1) عبارة مؤثر التطور هي كالتالي:

$$U(t,t_0)=I+\frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt_1 H(t_1)+\frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2 H(t_1)H(t_2)$$
$$+\frac{1}{(i\hbar)^3}\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\int_0^{t_2}dt_3 H(t_1)H(t_2)H(t_3)+... \quad (2)$$

نعتبر التكامل ذو الرتبة n من العبارة الأخيرة:

$$I_n=\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2...\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_n H(t_1)H(t_2)...H(t_n) \quad (3)$$

لاحظ دايسون $(dyson)$ أن هذا التكامل هو تكامل على مدى كل المجال الزمني من t_0 إلى t مع القيد t_j قبل t_{j-1} حيث $(j\le n)$. بعبارة أخرى، يمكن كتابة I_n على الشكل:

$$I_n=\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2...\int_{t_0}^{t}dt_n\theta(t_1-t_2)\theta(t_2-t_3)...\theta(t_{n-1}-t_n)H(t_1)H(t_2)...H(t_n) \quad (4)$$

حيث θ هي دالة هيفسايد (دالة العتبة).

حيث $\theta(t)=1$ إذا كان $t>0$ و $\theta(t)=0$ إذا كان $t<0$. إذا كان من الممكن تبادل ترتيب التكامل، حيث:

$$\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2...\int_{t_0}^{t}dt_n f(t_1,...,t_n)=\frac{1}{n!}\sum_{\mathcal{T}}\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2...\int_{t_0}^{t}dt_n f(t_{\alpha_1},...,t_{\alpha_n}) \quad (5)$$

حيث $\sum_{\mathcal{T}}$ يرمز إلى الجمع على جميع التبادلات بين $(t_n,...,t_1)$ ($n!$ تبديلة)، ومنه يمكننا إعادة صياغة I_n على الشكل التالي:

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{1}{n!}\sum_{\mathcal{T}}\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2...\int_{t_0}^{t}dt_n\theta(t_{\alpha_1}-t_{\alpha_2})\theta(t_{\alpha_2}-t_{\alpha_3})...\theta(t_{\alpha_{n-1}}-t_{\alpha_n})H(t_{\alpha_1})H(t_{\alpha_2})...H(t_{\alpha_n})\\ &= \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2...\int_{t_0}^{t}dt_n\mathcal{T}\big(H(t_1)H(t_2)...H(t_n)\big)\end{aligned} \quad (6)$$

حيث المؤثر $\mathcal{T}$ يعرف بالعبارة التالية:

$$\mathcal{T}\big(H(t_1)H(t_2)...H(t_n)\big)=\sum_{\mathcal{T}}\theta(t_{\alpha_1}-t_{\alpha_2})\theta(t_{\alpha_2}-t_{\alpha_3})...\theta(t_{\alpha_{n-1}}-t_{\alpha_n})H(t_{\alpha_1})H(t_{\alpha_2})...H(t_{\alpha_n}) \quad (7)$$

وله خاصية التأثير على المؤثرات المتعلقة بالزمن، ويعيد ترتيبها بنفس التسلسل الزمني لحدوثها، بحيث تكون اللحظة الأخيرة هي الحد الأول في الجداء:

$$\mathcal{T}\big(H(t_1)H(t_2)...H(t_n)\big)=H(t_{j_1})H(t_{j_2})...H(t_{j_n}) \qquad , \qquad t_{j_1}>t_{j_2}>...>t_{j_n} \quad (8)$$

بتعويض العبارة (6) في العبارة (2) نجد:

$$\begin{aligned}
U(t,t_0) &= \mathcal{T}\Big(I+\frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt_1 H(t_1)+\frac{1}{2!}\frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t dt_1\int_0^t dt_2\big(H(t_1)H(t_2)\big)\\
&+ ...+\frac{1}{n!}\frac{1}{(i\hbar)^n}\int_{t_0}^t dt_1\int_{t_0}^t dt_2...\int_{t_0}^t dt_n\big(H(t_1)H(t_2)...H(t_n)\big)+...\Big)\\
&= \mathcal{T}\Big(\sum_n\frac{1}{(i\hbar)^n}\int_{t_0}^t dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2...\int_{t_0}^{t_n-1} dt_n H(t_1)H(t_2)...H(t_n)\Big)\\
&= \mathcal{T}e^{\frac{-i}{\hbar}\int_{t_0}^t H(s)ds} \qquad (9)
\end{aligned}$$

وهو ما أردنا البرهان عليه [2].

3- نظرية لي-تروتر:

نظرية:
ليكن L_1 و L_2 مؤثرين خطيين على فضاء باناخ المنته، ومنه:

$$e^{(L_1+L_2)} = \lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{L_1}{n}}e^{\frac{L_2}{2}}\right)^n \tag{1}$$

سنقدم برهانا مكونا من خطوتين [38] . أولاً ، دعنا نثبت أنه بالنسبة لأي مؤثرين خطيين A و B ، لدينا التعريف التالي:

$$A^n - B^n = \sum_{k=0}^{n-1} A^k(A-B)B^{n-k-1}. \tag{2}$$

نلاحظ ، في النهاية ، أننا نضيف ونطرح فقط جداء قوى Aو Bفي الجانب الأيمن من (2)، بحيث:

$$\begin{aligned} A^n - B^n &= A^n + (A^{n-1}B - A^{n-1}B) - B^n \\ &= A^n + (A^{n-1}B - A^{n-1}B + A^{n-2}B^2 - A^{n-2}B^2) - B^n \\ &= A^n + (A^{n-1}B - A^{n-1}B + A^{n-2}B^2 - A^{n-2}B^2 + ... \\ &... +AB^{n-1} - AB^{n-1}) - B^n \end{aligned} \tag{3}$$

نقوم الآن بتجميع الحدود الموجبة مع بعض:

$$A^n + A^{n-1}B + ... + AB^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} A^{k+1}B^{n-k-1} \tag{4}$$

والحدود السالبة مع بعض:

$$-A^{n-1}B - ... - AB^{n-1} - B = -\sum_{k=0}^{n-1} A^kB^{n-k} \tag{5}$$

أخيرا بتجميع الحدين الموجب والسالب نحصل على:

$$\begin{aligned} A^n - B^n &= \sum_{k=0}^{n-1} A^{k+1}B^{n-k-1} - A^kB^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} A^kAB^{n-k-1} - A^kBB^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} A^k(A-B)B^{n-k-1} \end{aligned} \tag{6}$$

وهو ما أردنا البرهان عليه.
الآن نرمز بـ:

$$X_n = e^{(L_1+L_2)/n} \quad , \quad Y_n = e^{L_1/n}e^{L_2/n} \tag{7}$$

نضع $A = X_n$ و $B = Y_n$ ونعوض في المعادلة (2)،

$$X_n^n - Y_n^n = \sum_{k=0}^{n-1} X_n^k(X_n - Y_n)Y_n^{n-k-1} \tag{8}$$

من ناحية لدينا:

$$\begin{aligned} \| X_n^k \| = \| \left(e^{(L_1+L_2)/n}\right)^k \| &\leq \| e^{(L_1+L_2)/n} \|^k \leq e^{\|L_1+L_2\| k/n} \\ &\leq e^{(\|L_1\|+\|L_2\|)k/n} \leq e^{\|L_1\|+\|L_2\|}, \quad \forall k \leq n. \end{aligned} \tag{9}$$

بنفس الطريقة نبرهن على أن:

$$\| Y_n^k \| \leq e^{\|L_1\|+\|L_2\|}, \quad \forall k \leq n. \tag{10}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \| X_n^n - Y_n^n \| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \| X_n^k (X_n - Y_n) Y_n^{n-k-1} \| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \| X_n^k \| \| (X_n - Y_n) \| \| Y_n^{n-k-1} \| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \| (X_n - Y_n) \| e^{2(\|L_1\|+\|L_2\|)} = n \| (X_n - Y_n) \| e^{2(\|L_1\|+\|L_2\|)}. \end{aligned} \tag{11}$$

من ناحية أخرى ، من خلال توسيع الدالة الأسية نجد:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n \| X_n - Y_n \| &= \lim_{n\to\infty} n \| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{L_1+L_2}{n}\right)^k - \sum_{k,j=0}^{\infty} \left(\frac{L_1}{n}^k\right) \left(\frac{L_2}{n}\right)^j \| \\ &= \lim_{n\to\infty} n \| \frac{L_1+L_2}{n} - \frac{L_1 L_2}{n^2} + \frac{1}{2} \frac{(L_1+L_2)^2}{n^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^3}) \| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} n \| \frac{1}{2n^2} [L_1, L_2] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \| = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

ومنه، نستنتج أن:

$$\lim_{n\to\infty} \| e^{L_1+L_2} - (e^{L_1/n} e^{L_2/n})^n \| = \lim_{n\to\infty} \| X_n^n - Y_n^n \| = 0 \tag{13}$$

بنفس الطريقة، يمكن أيضًا أن نبرهن أنه بالنسبة لمجموع N مؤثر:

$$e^{\sum_{k=1}^{N} L_k} = \lim_{n\to\infty} \left(\prod_{k=1}^{N} e^{\frac{L_k}{n}} \right)^n \tag{14}$$

4- إثبات العلاقة (63.3)

من المعادلة (43.3) لدينا:

$$\tilde{\rho}(t) = \rho_A(0) - \alpha^2 \int_0^t ds \int_0^s du \, \mathrm{tr}_B \left[\tilde{V}(s), \left[\tilde{V}(s-u), \tilde{\rho}_A(s) \otimes \rho_B \right] \right] + \mathcal{O}(\alpha^3) \tag{1}$$

من جهة أخرى لدينا عبارة $\tilde{V}(t)$ من المعادلة (62.3):

$$\tilde{V}(t) = \sum_{\omega,k} e^{-i\omega t} A_k(\omega) \otimes \tilde{B}_k(t) = \sum_{\omega,k} e^{i\omega t} A_k^\dagger(\omega) \otimes \tilde{B}_k^\dagger(t) \tag{2}$$

نقوم بتحليل العبارة (1)، ثم نعوض بالمعادلة (2) نجد:

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(t) \quad &= \quad \rho_A(0) \\
&- \quad \alpha^2 \int_0^t ds \int_0^s du \, \mathrm{tr}_B \left[\tilde{V}(s), \, \tilde{V}(s-u) \tilde{\rho}_A(s) \otimes \rho_B - \tilde{\rho}_A(s) \otimes \rho_B \, \tilde{V}(s-u) \right] \\
&+ \quad \mathcal{O}(\alpha^3) \\
&= \quad \rho_A(0) - \alpha^2 \int_0^t ds \int_0^s du \, \mathrm{tr}_B \Bigg[\tilde{V}(s) \, \tilde{V}(s-u) \tilde{\rho}_A(s) \otimes \rho_B \\
&- \quad \tilde{V}(s) \tilde{\rho}_A(s) \otimes \rho_B \, \tilde{V}(s-u) - \tilde{V}(s-u) \tilde{\rho}_A(s) \otimes \rho_B \, \tilde{V}(s) \\
&+ \quad \tilde{V}(s) \tilde{\rho}_A(s) \otimes \rho_B \, \tilde{V}(s-u) \Bigg] + \mathcal{O}(\alpha^3) \\
&= \quad \rho_A(0) - \alpha^2 \int_0^t ds \int_0^s du \, \mathrm{tr}_B \Bigg[\\
\textstyle\sum_{\omega',k} \quad & e^{i\omega' s} A_k^\dagger(\omega') \otimes \tilde{B}_k^\dagger(s) \sum_{\omega,l} e^{-i\omega(s-u)} A_l(\omega) \otimes \tilde{B}_l(s-u) \tilde{\rho}_A(s) \otimes \rho_B \\
&- \quad \sum_{\omega',l} e^{-i\omega' s} A_l(\omega') \otimes \tilde{B}_l(s) \tilde{\rho}_A(s) \otimes \rho_B \sum_{\omega,k} e^{i\omega(s-u)} A_k^\dagger(\omega) \otimes \tilde{B}_k^\dagger(s-u) \\
&- \quad \sum_{\omega,l} e^{-i\omega(s-u)} A_l(\omega) \otimes \tilde{B}_l(s-u) \tilde{\rho}_A(s) \otimes \rho_B \sum_{\omega',k} e^{i\omega' s} A_k^\dagger(\omega') \otimes \tilde{B}_k^\dagger(s) \\
&+ \quad \tilde{\rho}_A(s) \otimes \rho_B \sum_{\omega,k} e^{i\omega(s-u)} A_k^\dagger(\omega) \otimes \tilde{B}_k^\dagger(s-u) \sum_{\omega',l} e^{i\omega' s} A_l(\omega') \otimes \tilde{B}_l(s) \Bigg] \\
&+ \quad \mathcal{O}(\alpha^3) \\
&= \quad \rho_A(0) - \alpha^2 \int_0^t ds \sum_{\omega,\omega'} \sum_{k,l} e^{i(\omega'-\omega)s} \int_0^s du e^{i\omega u} \, \mathrm{tr}_B \left[\tilde{B}_k^\dagger(s) \tilde{B}_l(s-u) \rho_B \right] \\
\Bigg(\quad & A_k^\dagger(\omega') A_l(\omega) \tilde{\rho}_A(s) - A_l(\omega) \tilde{\rho}_A(s) A_k^\dagger(\omega') \Bigg) \\
&+ \quad e^{i(\omega-\omega')} \int_0^s du e^{-i\omega u} \, \mathrm{tr}_B \left[\rho_B \tilde{B}_k^\dagger(s-u) \tilde{B}_l(s) \right] \\
\Bigg(\quad & \tilde{\rho}_A(s) A_k^\dagger(\omega) A_l(\omega') - A_l(\omega') \tilde{\rho}_A(s) A_k^\dagger(\omega) \Bigg)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \rho_A(0) + \alpha^2 \int_0^t ds \sum_{\omega,\omega'} \sum_{k,l} e^{i(\omega'-\omega)s} \int_0^s du e^{i\omega u} \operatorname{tr}_B \Big[\tilde{B}_k(s)\tilde{B}_l(s-u) \\
&\rho_B \quad \Big]\Big[A_l(\omega)\tilde{\rho}_A(s), A_k^\dagger(\omega')\Big] \\
&+ \quad e^{i(\omega-\omega')} \int_0^s du e^{-i\omega u} \operatorname{tr}_B \Big[\rho_B^\dagger \tilde{B}_l^\dagger(s-u)\tilde{B}_k^\dagger(s)\Big]\Big[A_l(\omega'), \tilde{\rho}_A(s)A_k^\dagger(\omega)\Big] \\
&= \rho_A(0) + \alpha^2 \int_0^t ds \sum_{\omega,\omega'} \sum_{k,l} e^{i(\omega'-\omega)s}\Gamma_{k,l}^s(\omega)\Big[A_l(\omega)\tilde{\rho}_A(s), A_k^\dagger(\omega')\Big] \\
&+ \quad e^{i(\omega-\omega')s}\Gamma_{l,k}^{s*}(\omega)\Big[A_l(\omega'), \tilde{\rho}_A(s)A_k^\dagger(\omega)\Big] + \mathcal{O}(\alpha^3) \qquad (3)
\end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{k,l}^s(\omega) &= \int_0^s du e^{i\omega u} \operatorname{tr}\Big[\tilde{B}_k(s)\tilde{B}_l(s-u)\rho_B\Big] \\
&= \int_0^s du e^{i\omega u} \operatorname{tr}\Big[\tilde{B}_k(s)B_l\rho_B\Big] \qquad (4)
\end{aligned}$$

المراجع

[1] N. Zettili, Quantum Mchanics: Concepts and Application, Wiley, États-Unis (2009)

[2] H. P. Breuer, F. Petruccione, The Theory Of Openn Quntum System, OXFORD University Press, OXFORD (2002)

[3] D. A. Lidar, Lecture Notes on the Theory of Open Quantum Systems, University of Southern California, USA (2019).

[4] A. Rivas, S. F. Huelga, Open Quantum System. An Introduction, Springer Science and Business Media, Berlin (2012)

[5] J. D. Cresser, Quantum Physics Notes, Macquarie University, Sydney (2011)

[6] R. Dick, Advanced Quantum Mechanics: Materials and Photons, Springer Science and Business Media, Berlin (2016)

[7] L. Musland, Time development in open quantum systems, Thesis for the degree of Master of Physics, University of Oslo, Norway (2013)

[8] R. Gozzi, Open dynamics of su(3) quantum system, Thesis for the degree of Master of Physics, University of Bologna, Bologna (2016)

[9] P. $\check{S}TELMACHOVI\check{C}$, V. $BU\check{Z}EK$, Phys. Rev. A 64. (2001), 062106.

[10] D. Salgado, J. L. Sánchez-Gómez, Phys. Rev. A 70. (2004), 054102

[11] D. M. Tong, L. C. Kwek, C. H. Oh, J. -L. Chen and L. Ma, Phys. Rev. A 69 (2004), 054102.

[12] A. Galindo and P. Pascual, Quantum Mechanics (2 vols.), Springer, Berlin, 1990.

[13] A. Peres, Quantum Theory: Concepts and Methods, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[14] R. Alicki and K. Lendi, Quantum Dynamical Semigroups and Applica- tions, Lect. Notes Phys. 286, Springer, Berlin, 1987.

[15] A. Kossakowski, Rep. Math. Phys. 3 (1972), 247.

[16] A. Kossakowski, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 20 (1972), 1021.

[17] V. Gorini, A. Kossakowski and E. C. G. Sudarshan, J. Math. Phys. 17 (1976), 821.

[18] G. Lindblad, Commun. Math. Phys. 48 (1976), 119.

[19] K. -J. Engel and R. Nagel, One-Parameter Semigroups for Linear Evo- lution Equations, Springer, New-York, 2000.

[20] S. Nakajima, Progr. Theor. Phys. 20 (1958), 984.

[21] A. Su´arez, R. Silbey and I. Oppenheim, J. Chem. Phys 97 (1992), 5101.

[22] B. Fain, Irreversibilities in Quantum Mechanics, Kluwer Academic Publishers, New York, 2002.

[23] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg, Atom-Photon Interactions, John Wiley and Sons, New York, 1992.

[24] S. Kryszewski and J. Czechowska-Kryszk, Master equation - tutorial approach, arXiv:0801.1757 (2008).

[25] R. S. Whitney, J. Phys. A: Math. Theor. 41 (2008), 175304.

[26] E. B. Davies, Quantum Theory of Open Systems, Academic Press, London, 1976.

[27] E. B. Davies, Commun. Math. Phys. 39 (1974), 91.

[28] E. B. Davies, Math. Ann. 219 (1976), 147.

[29] V. Gorini and A. Kossakowski, J. Math. Phys. 17 (1976), 1298.

[30] A. Frigerio and V. Gorini, J. Math. Phys. 17 (1976), 2123.

[31] A. Frigerio, C. Novellone and M. Verri, Rep. Math. Phys. 12 (1977), 279.

[32] M. Ziman, P. ˇ Stelmachoviˇc and V. Buˇzek, Open Syst. Inf. Dyn. 12 (2005), 81.

[33] M. Ziman and V. Buˇzek, Phys. Rev. A 72 (2005), 022110.

[34] C. M. Caves and G. J. Milburn, Phys. Rev. A 36 (1987), 5543.

[35] V. V. Dobrovitski and H. A. De Raedt, Phys. Rev. E 67 (2003), 056702.

[36] E. Paladino, M. Sassetti, G. Falci, U. Weiss, Phys. Rev. B 77 (2008), 041303(R).

[37] N. P. Oxtoby, A. Rivas, S. F. Huelga and R. Fazio, New J. Phys. 11 (2009), 063028.

[38] A. Galindo and P. Pascual, Problemas de Mec´anica Cu´antica, Eudema, Madrid, 1989.

الملخص

الأنظمة الكمومية المفتوحة هي أنظمة لا يمكن إهمال تفاعلها وتبادلها للمعلومات مع محيطها. تلعب نظرية الأنظمة الكمومية المفتوحة دورا رئيسيا في الفيزياء الكمومية نظرا لأن العزل التام للأنظمة الكمومية غير ممكن عمليا. يحكم التطور الزمني للأنظمة المفتوحة تطبيقات ديناميكية تختلف في كثير من خصائصها عن التطبيقات التي تحكم الأنظمة المغلقة. صعوبة التعامل معها أوجب البحث عن تقريبات تسمح بتسهيل التعامل مع هذه الأنظمة، ويعد التقريب الماركوفي أحسن هذه التقريبات.

تتناول هذه المذكرة موضوع الأنظمة الكمومية المفتوحة، حيث نناقش بداية وبإيجاز الأنظمة الكمومية المغلقة والمعادلات التي تحكم تطورها والشكل العام لمؤثر التطور الواحدي. بعدها نتناول السمات الفيزيائية الرئيسية لديناميكيات الأنظمة الكمومية المفتوحة، ونعرض الخصائص العامة للتطبيقات الديناميكية والتطبيقات الديناميكية الكونية الكامنة وراء ديناميكيات الأنظمة المفتوحة. يلي ذلك عرض للبنية الرياضياتية للعمليات الماركوفية الكلاسيكية والكمومية. أخيرًا نشتق مجهريا المعادلات الديناميكية وندرس النهاية الماركوفية لها في حالة الاقتران أو التفاعل الضعيف، ونقدم بعضا من خصائصه.

الكلمات المفتاحية: الأنظمة الكمومية المفتوحة، الأنظمة الكمومية المغلقة، المحيط، التطبيق الديناميكي، التطبيق الديناميكي الكوني، الحالة الماركوفية.

Abstract

Open quantum systems are systems that interact and exchange information with the their environment. The theory of open quantum systems plays a major role in quantum physics because the total isolation of quantum systems is not possible. The evolution of open systems is controlled by dynamical maps, but the difficulty in dealing with them necessitated the search for approximations that would make it easier to deal with these systems, and the Markovian approximation is the best approximation.

This dissertation addresses the subject of Open Quantum System. We start by briefly discussing closed quantum systems and the equations that govern their development and the general form of the unitary evolution operator. Next, we focus on the main physical features of the dynamics of open quantum systems, and present the general properties of the dynamical maps and universal dynamical maps underlying open system dynamics. Then, we discuss the mathematical structure of classical and quantum Markov processes. Finally we give the microscopic derivations of dynamical equations and analyze the Markovian limit by considering the weak coupling limit procedure, as well as some of its properties.

Keywords: open quantum system, closed quantum system, environment, dynamical map, universal dynamical map, markovian case.