N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de

la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ E C H A H I D HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

Décroissance générale de quelques systèmes en thermoélasticité avec dissipation de type mémoire

Présenté par: Asma Ben Moussa

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Président	Hadj Ammar Tedjani	MCA/Prof.	Univ. El Oued
Rapporteur	Abdelfeteh Fareh	M.C.A	Univ. El Oued
Examinateur	Nisse Khadidja	MCA/MC	Univ. El Oued

Année universitaire 2018 – 2019

Dédicace

Avant tout je remercie le bon **Dieu** le tout puisant, qui m'a donné la force et le courage pour poursuivre mes études

Je dédie ce travail :

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel celui qui s'est toujours sacrifié pour me fait réussir
A toi mon père **Mohamed Chaouki**.

A la lumière de mes efforts, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur.
Maman que j'adore "**Guemari Saïda**".

À mes frères **Mohamed Amine** et **Mohamed Mounir** qui m'ont toujours aidé et encourager qui étaient toujours à mes côtés je vous remercie pour avoir pris soin de moi, à ma chère sœur **Mardhia** et son époux et son fils **Khalil** qui étaient auprès de moi touts les moments.

A mon cher fiancé **Ben Moussa Abd Allah** et toute sa famille.

A toutes mes aimes.

Asma

Remerciements

Avant tout je remercie le bon Dieu de m'avoir mettre sur le bon chemin pour pouvoir réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de travail **Dr. Abdelfeteh Fareh**, je le remercie de m'avoir encadrer, orienter aider et conseiller.

J'adresse mes sincèresremerciements à mon enseignant **Mr. Moumen Bakouche Mohamed** et pour tout mes enseignants qui m'ont soutenue pendant toute mon parcoure universitaire.

Je tiens également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger notre travail.

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :

H^1, H^1_0, $\mathrm{W}^{1,\mathrm{p}}$	Espaces de Sobolev.
$\lvert \cdot \rvert$	La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.
$\lVert \cdot \rVert_{\mathrm{E}}$	La norme sur E.
$C([a,b])$	$f : [a,b] \to \mathbb{R}, f$ est continue .
$g * f$	Produit de convolution .
C_0^∞	Espace de support compact.
$D^\alpha u = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}u, \quad \lvert\alpha\rvert = \sum_{i=1}^N \alpha_i$	Dérivées partielles.

Table des matières

Introduction générale

Dans ce mémoire on a étudié deux types de problèmes thermoélastiques, le premier caractérise un problème de type Timoshenko dont les variables sont le déplacement transversal φ, l'angle de filament ψ et la différence du température θ d'une poutre de longueur $L = 1$, le second problème est en élasticité poreuse dont les variables sont le déplacement φ et la fraction volumique ψ. Dans chacun de ces problèmes nous avons considéré une amortissement de type mémoire liée à la second variable. Le terme mémoire est caractérisé par un intégral dépend d'une fonction de relaxation g qui remplie certaines conditions de régularités et de décroissances. Nous avons montré que les solutions des systèmes décroissent (quand t tend vers l'infini) d'une manière liée au tau de décroissance de la fonction g et qui unifie plusieurs sortes de décroissance (polynômiale, exponentielle, trigonométrique, ..., etc) et qu'on l'appele décroissance générale.

Le modèle

En 1921 Timoshenko a étudié le système

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} = \kappa\left(\varphi_x + \psi\right)_x, & \text{dans} \quad (0,L)\times\mathbb{R}_+, \\ \rho_2\psi_{tt} = b\psi_{xx} - \kappa\left(\varphi_x+\psi\right), & \text{dans} \quad (0,L)\times\mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{1}$$

Il a remarqué que l'axe central d'une poutre subite à une flexion fait un angle avec le perpendiculaire à la section de la poutre, cet angle est appelé "angle de filament". La stabilisation du système (1) a prit beaucoup d'intérêt dépuis longtemps, des différentes dissipations ont été ajoutées à ce système pour examiner leurs effets sur la stabilité de la solution du système non amorti.

Parmi les études faites sur cette direction on montionne celle de Ammar Khodja et autres [2] (2003), qui ont ajouté un terme mémoire au système (1), ils ont étudié le système

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} = \kappa\left(\varphi_x + \psi\right)_x, & \text{dans} \quad (0,L)\times\mathbb{R}_+, \\ \rho_2\psi_{tt} = b\psi_{xx} - \kappa\left(\varphi_x+\psi\right) - \displaystyle\int_0^t g\left(t-s\right)\psi_{xx}\left(x,s\right)ds, & \text{dans} \quad (0,L)\times\mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{2}$$

avec les conditions aux limites

$$\varphi\left(0,t\right) = \varphi\left(L,t\right) = \psi\left(0,t\right) = \psi\left(L,t\right) = 0.$$

Ils ont imposé sur g les hypothèses

$$g > 0,\ \exists k_0, k_1, k_2 > 0 : -k_0 g \le g' \le -k_1 g,\ \left|g''\right| \le k_2 g \quad \text{et} \quad b - \int_0^\infty g\left(s\right)ds > 0 \tag{3}$$

et les coefficients du système vérifient la condition $\dfrac{\kappa}{\rho_1} = \dfrac{b}{\rho_2}$, et montrer que :

1) si g décroit exponentiellement $\left(g'\left(t\right) \le g\left(0\right)e^{-\mu t}\right)$ alors l'énergie du système $\mathrm{E}\left(t\right)$ décroit exponentiellement

$$\mathrm{E}\left(t\right) \le \mathrm{E}\left(0\right)e^{-\xi t},\ t \ge 0,$$

2) si g décroit polynômiallement $\left(g'\left(t\right) \le b_0\left(1+t\right)^{-p}, p \ge 2\right)$ alors l'énergie $\mathrm{E}\left(t\right)$ décroit polynômiallement

$$\mathrm{E}\left(t\right) \le \frac{C\mathrm{E}\left(0\right)}{\left(1+t\right)^p},\ t \ge 0.$$

En 2006 Guesmia et Messaoudi [8] affaiblissent la condition (3) à la condition

$$g > 0,\ \exists \xi > 0 : g' \le -\xi g^p, \quad \text{et} \quad b - \int_0^\infty g\left(s\right)ds > 0 \tag{4}$$

et obtiennent une décroissance exponentielle pour $p = 1$ et polynômiale pour $\frac{3}{2} \le p \le 2$.

En 2009 Messaoudi et Mustfa [13] remplacent la condition (4) par la condition

$$g > 0,\ \exists \xi > 0 : g' \le -\xi\left(t\right)g, \quad \text{et} \quad b - \int_0^\infty g\left(s\right)\mathrm{ds} > 0 \tag{5}$$

où $\xi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante. Ils montrent que l'énergie associée à la solution vérifie l'inégalité

$$\mathrm{E}(t) \leq \mathrm{E}(0) \exp\left(-\int_0^t \xi(s)\, ds\right), \ t \geq 0. \tag{6}$$

La dérnière estimation est un cas général qui contient les résultats exponentiel et plynômial comme cas particuliers.

En 2011, Messaoudi et Fareh [10] ont ajouté un effet thermique au système (2) et étudier le tau de décroissance de la solution du système

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = \kappa(\varphi_x + \psi)_x - \theta_x, & \text{dans} \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_2 \psi_{tt} = \alpha \psi_{xx} - \kappa(\varphi_x + \psi) + \theta - \displaystyle\int_0^t g(t-s)\, \psi_{xx}(x,s)\, \mathrm{ds}, & \text{dans} \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_3 \theta_t = k\theta_{xx} - \varphi_{tx} - \psi_t, & \text{dans} \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

sous la condition (5). Dans le cas des vitesses égaux ils ont obtenu le résultat (6).
En 2013 [11] ils ont considéré le cas des vitesses différentes ($\dfrac{\kappa}{\rho_1} \neq \dfrac{\alpha}{\rho_2}$) et obtenir

$$\mathrm{E}(t) \leq \frac{C(\mathrm{E}(0) + \mathrm{E}_*(0))}{\int_0^t \xi(s)\, \mathrm{ds}}, \ t \geq 0.$$

Dans ce mémoire on va détailler ces deux publications dans le Chapitre 2.

Récemment, Apalara [1] a étudié le système (2) dans le cas poreux

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = \mu \varphi_{xx} + b\psi_x, & \text{dans} \quad (0,L) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_2 \psi_{tt} = \alpha \psi_{xx} - b\varphi_x + \xi\psi - \displaystyle\int_0^t g(t-s)\, \psi_{xx}(x,s)\, \mathrm{ds}, & \text{dans} \quad (0,L) \times \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{7}$$

où ψ représente la fraction volumique entre la volume de la matière sur la volume de la région qu'elle occupe. Sous les conditions aux limites suivantes

$$\varphi_x(0,t) = \varphi_x(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = 0.$$

Il a obtenu une décroissance générale dans le cas des vitesses égaux. Ce système sera l'objet de notre troisième chapitre.
Le terme mémoire $\displaystyle\int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(x,s)\mathrm{ds}$ signifie que la valeur de ψ_{xx} à l'instant t cumule l'ensemble des états à l'intervalle $(0,t)$ avec coefficient $g(t-s)$ à l'instant s, dont le nom mémoire qui a obtenu.

La méthode

La méthode utilisé dans ce mémoire est la méthode des multiplicateurs. Elle consiste à construire une fonctionnelle de Lyapunov $\mathcal{L}(t)$ équivalante à l'énergie $\mathrm{E}(t)$ cette fonctionnelle vérifie les conditions de la fonction de Lyapunov décrivent dans le chapitre 1. La construction se fait en étapes chaque étape consiste à choisir une fonctionnelle $I_i, K_i, ...$ dont la dérivée vérifie une estimation qui contient un terme de l'énergie avec coefficient négative, la fonctionnelle de Lyapunov $\mathcal{L}(t)$ est une combinaison de ces fonctionnelles dont les coefficients sont choisies d'une manière où on obtient d'une part l'équivalence entre $\mathcal{L}(t)$ et $\mathrm{E}(t)$ et d'autre part $\mathcal{L}'(t) \leq -\xi(t)\mathrm{E}(t)$ ce qui permet d'obtenir notre résultat de décroissance de la manière suivante :

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\omega\xi(t)\mathcal{L}(t)$$

donc

$$\frac{\mathcal{L}'(t)}{\mathcal{L}(t)} \leq -\omega\xi(t), \ t \geq 0,$$

une intégration donne

$$\mathcal{L}(t) \leq C\mathcal{L}(0) \exp\left(-\omega \int_0^t \xi(s)\, \mathrm{ds}\right).$$

L'équivalence entre $\mathcal{L}(t)$ et $\mathrm{E}(t)$ conduit au résultat désiré.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre on ressemble les notions de bases qu'on ait besoin dans ce mémoire, on fait un petit rappel sur les espaces de Sobolev et sur la notion de stabilité des système dynamique.

1.1 Espace L^p

Définition 1.1.1. *[3] Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p < \infty$, on définit :*

$$\mathrm{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \ \textit{mesurable} \ \ \textit{et} \quad \int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{dx} < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{dx} \right)^{1/p},$$

c'est un espace de Banach.

1.2 Espaces de Sobolev

Définition 1.2.1. *[3] Etant donnés un entier $m \geq 1$ et un réel $1 \leqslant p < \infty$, on définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^p; \forall |\alpha| \leq m; \ \ \exists \, g_\alpha \in \mathrm{L}^p \ \ \textit{telle que} \ \ \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi; \ \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}.$$

Pour $p = 2$ on note :

$$\mathrm{H}^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

L'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{\mathrm{L}^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{\mathrm{L}^p},$$

et l'espace H^m est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{\mathrm{H}^m} = (u, v)_{\mathrm{L}^2} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

Définition 1.2.2. *[5] On note $\mathrm{H}_0^m(\Omega)$ l'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^m(\Omega)$.*

1.3 Quelques inégalités utiles

Les inégalités suivantes sont d'une grande utilité.

Inégalité de Young :

Soient p et q deux réels conjugués : $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, alors

$$\forall (a,b)\in \mathbb{R}_+^2 : \quad |ab| \leqslant \frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}.$$

En particulier si $u, v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega |uv| \leqslant \varepsilon \int_\Omega |u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega |v|^2, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Inégalité de Hölder :

Soient $f \in \mathrm{L}^p$ et $g \in \mathrm{L}^q$ avec $1 \leq p < \infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p. Alors $fg \in \mathrm{L}^1$ et

$$\|fg\|_{\mathrm{L}^1} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^p}\|g\|_{\mathrm{L}^q}.$$

Remarque Dans le cas : $p=q=2$ l'inégalité de Hölder est connue sous l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

L'inégalité de Poincaré classique :

- On suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p) telle que

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}. \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

En particulier l'expression $\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p}$ définie une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|u\|_{\mathrm{W}^{1,p}}$ sur $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, et l'expression $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ est un produit scalaire qui induit la norme $\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2}$.

L'inégalité de Poincaré-Wirtinger :

Soient $p \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p < \infty$ et Ω un domaine (c'est-à -dire un ouvert connexe) lipschitzien (c'est-à -dire borné et à frontière lipschitzienne) de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une constante C, dépend uniquement de Ω et p, telle que, pour toute fonction u de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, on a

$$\|u-u_\Omega\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}$$

où $\left(u_\Omega = \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega u(x)\mathrm{d}x\right)$ est la valeur moyenne de u sur Ω, le nombre $|\Omega|$ désigne la mesure de Lebesgue du domaine Ω.

Dans le cas où $u_\Omega = 0$ on a :

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}.$$

Théorème 1.1. *[3] Soient $f \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ et $g \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.*
Alors, pour presque tout $x \in \Omega$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur Ω.
De plus, pour

$$(f*g)(x) = \int_\Omega f(x-y)g(y)dy,$$

on a $f*g \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ et

$$\|f * g\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^1}\|g\|_{\mathrm{L}^p}.$$

On a besoin du

Lemme 1.1. *[3] Soient $f \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ et $g \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, alors,*

$$f * g \in W^{1,p}(\Omega) \quad \textit{et} \quad (f * g)' = f * g'.$$

1.4 Notions fondamentales de la stabilité

Théorème 1.2. *[7] Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant la condition suivant :*

Pour tout $T > 0$, $\exists k$, C telle que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k|x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0,T]$$
$$|f(t,x_0)| \leq C, \forall t \in [0,T],$$

alors le système

$$\begin{cases} x_t(t) = f(t,x), \forall t > 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

admet une solution unique $x(t,t_0,x_0)$, satisfait :

$$x(t,t_1,x_1) = x(t,x_0), \forall t \geq t_1 \geq t_0,$$

où, $x_1 = x(t_1)$.

Définition 1.4.1 (Point d'équilibre). *[7]*
Un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est un point d'équilibre du système (1.1) si

$$\forall t \geq 0, \quad f(t,x_0) = 0.$$

La théorie de Lyapunov s'intéresse par le comportement d'une solution $x(t,t_0,\overline{x_0})$ qui commence en un point $\overline{x_0} \neq x_0$ et $\|\overline{x_0} - x_0\| < \delta$ pour un $\delta > 0$ assez petit. Pour simplifier les chose on prend $x_0 = 0$ et on note $\overline{x_0}$ par x_0.

Définition 1.4.2 (Stabilité). *[6]*
On dit que $x = 0$ est un point d'équilibre stable (au sens de Lyapunov), si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall t_0 \geqslant 0, \quad \exists \delta = \delta(t_0,\varepsilon) > 0, \qquad \textit{tel que} \qquad \|x_0\| < \delta \Longrightarrow \|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon, \forall t \geqslant t_0.$$

Autrement dit, la stabilité au sens de Lyapunov à l'origine, veut dire que pour tout $t \geqslant t_0$, la solution associée à la condition initiale (t_0,x_0) reste au voisinage de l'origine si x_0 est au voisinage de l'origine. En d'autres termes, pour tout $t \geqslant t_0$, une petite perturbation de la condition initiale autour de l'origine donne naissance à une solution $x(t)$ qui reste proche de l'origine. Notons bien que la stabilité du système n'implique pas la convergence des solutions vers l'origine, c'est pourquoi la notion de stabilité toute seule est insuffisante pour l'étude du comportement des solutions.

Définition 1.4.3 (Stabilité exponentielle). *[6]*
On dit que :

i) l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre exponentiellement stable (noté ES), s'il existe un voisinage de l'origine noté U_0, $\exists \lambda_1 > 0$ et $\exists \lambda_2 > 0$, tels que

$$\|x(t)\| \leqslant \lambda_1 \|x_0\| e^{-\lambda_2(t-t_0)}, \quad \forall x_0 \in U_0, \ \forall t \geqslant t_0 \geqslant 0.$$

Dans ce cas, la constante λ_2 est appelée le taux de décroissance ou aussi la vitesse de convergence.

ii) l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable (noté GES), si $U_0 = \mathbb{R}^n$.

Définition 1.4.4 (Fonctions de classe $\mathcal{K}$). *[9]*
Soit $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$ et $\varphi : [0, a] \to \mathbb{R}^+$ une application continue, on dit que φ appartient à la classe $\mathcal{K}$ si :

1. *φ est strictement croissante.*
2. *$\varphi(0) = 0$.*

Définition 1.4.5 (Fonctions de classe $\mathcal{K}^\infty$). *[9]*
Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application continue, on dit que φ appartient à la classe $\mathcal{K}^\infty$ si : $\varphi \in \mathcal{K}$ et $\lim\limits_{r\to+\infty} \varphi(r) = +\infty$.

1.4.1 Théorie de Lyapunov

L'utilisation des fonctions définies positives est une technique parmi les plus efficaces pour analyser la stabilité d'un système gouverné par une équation différentielle ordinaire.

Définition 1.4.6 (Fonction de Lyapunov). *[6] On considère le système (1.1). Soit U_0 un voisinage de zéro et $\mathcal{L} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable sur $\mathbb{R}^n$.*

- *On dit que $\mathcal{L}$ est une fonction de Lyapunov au sens large en 0, si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*
  - *i. $\mathcal{L}$ est définie positive $\mathcal{L}(\cdot, x) > 0$ pour $\forall x \neq 0$.*
  - *ii. $\mathcal{L}_t(\cdot, x) \leqslant 0$ pour tout $x \in U_0$.*
- *Si de plus $\mathcal{L}_t(\cdot, x) < 0$ pour tout $x \in U_0\backslash\{0\}$ on dit que $\mathcal{L}$ est une fonction de Lyapunov stricte en 0.*

Théorème 1.3. *[6] On considère le système (1.1). Si ce système admet une fonction de Lyapunov au sens large sur U_0, alors l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre stable.*

Théorème 1.4. *[6] Considèrons le système (1.1). Supposons que ce système admet une fonction de Lyapunov $\mathcal{L}(t, x)$ et supposons qu'il existe des constantes c_1, c_2, c_3 et $c_4 > 0$, telles que, $\forall x \in U_0$, $\forall t \geqslant t_0$ on a :*

$$c_1\|x\|^2 \leqslant \mathcal{L}(t, x) \leqslant c_2\|x\|^2 \tag{1.2}$$

$$\mathcal{L}_t(t, x) \leqslant -c_3\|x\|^2 \tag{1.3}$$

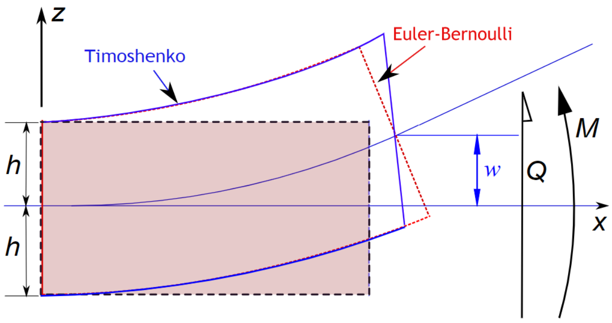
$$\|\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(t, x)\| \leqslant c_4\|x\|, \tag{1.4}$$

alors, $x = 0$ est un point d'équilibre exponentiellement stable. Si $U_0 = \mathbb{R}^n$, alors l'origine est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable.

Chapitre 2

Décroissance générale d'un système thermoélastique de type Timoshenko

Dans la théorie développée par Timoshenko en 1921, pour représenter les effets de cisaillement et la flexion rotationnelle d'une poutre de longueur L. Les variables indépandentes sont le deplacement transversal φ, l'angle de filament ψ et la différence de température θ, en un point d'abscisse x, a l'instant t. L'angle de filament est l'angle fait par l'axe central avec le perpendiculaire à la section transversal après la flexion, comme illustré dans la figure ci-dessous.



En suivant [12] les équations d'évolutions sont données par

$$\begin{cases} \rho\varphi_{tt} = T_x \\ \rho\kappa\psi_{tt} = h_x + f \\ \rho T_0\eta_t = q_x \end{cases} \tag{2.1}$$

et les équations constitutives sont

$$\begin{cases} T = \kappa\left(\varphi_x + \psi\right) - \theta, \\ h = \alpha\psi_x, \\ f = -\kappa(\varphi_x + \psi) + \theta - \displaystyle\int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(x,s)\mathrm{d}s, \\ q = k^*\theta_x, \;\; \rho\eta = \rho\theta + \frac{1}{T_0}(\varphi_x + \psi) \end{cases} \tag{2.2}$$

où ρ est la densité de masse, κ est le module d'élasticité, T_0 la température à l'instant $t = 0$, et α un coefficient constitutive. La substitution des équations (2.2) dans les équations (2.1) conduit au système

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} = \kappa(\varphi_x + \psi)_x - \theta_x & dans \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_2\psi_{tt} = \alpha\psi_{xx} - \kappa(\varphi_x + \psi) + \theta - \displaystyle\int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(x,s)\mathrm{d}s & dans \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_3\theta_t = k\theta_{xx} - \varphi_{xt} - \psi_t & dans \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{2.3}$$

où, on a posé $\rho = \rho_1, \rho\kappa = \rho_2$, $\rho T_0 = \rho_3$ et $k = \frac{k^*}{T_0}$ et on prend $L = 1$ pour simplicité. Dans le système (2.3) nous avons considéré que la dissipation produite par ψ est de la forme $\displaystyle\int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(x,s)\mathrm{d}s$

ce qui représente les cumulés des états $\psi_{xx}(\cdot, s)$ à la période $(0, t)$, on l'appelle alors, terme mémoire. Pour la fonction de relaxation g, on suppose qu'elle vérifie les hypothèses suivantes :

(H1) $g \ : \ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \ \mathbb{R}_+$ est une fonction différentiable décroissante satisfaisant :

$$g(0) > 0, \qquad \alpha - \int_0^{\infty} g(s)\mathrm{d}s = \ell > 0.$$

(H2) Il existe une fonction $\xi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ décroissante, difféentiable et satisfait :

$$g'(t) \leqslant -\xi(t)g(t), \qquad\qquad \forall t \geqslant 0.$$

On suppose que les fonctions inconnues φ, ψ et θ vérifient les conditions aux limites et initiale suivantes :

$$\begin{cases} \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = \theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, & t \geqslant 0. \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x),\ \theta(x,0) = \theta_0(x), & x \in (0,1). \\ \psi(x,0) = \psi_0(x),\ \psi_t(x,0) = \psi_1(x), & x \in (0,1) \end{cases}$$

On introduit l'espace de Hilbert (appelé espace d'énergie)

$$\mathcal{H} := \mathrm{H}_0^1(0,1) \times \mathrm{L}^2(0,1) \times \mathrm{H}_0^1(0,1) \times \mathrm{L}^2(0,1) \times \mathrm{L}^2(0,1).$$

Proposition 2.1. *Supposons que les hypothèses* (H1) *et* (H2) *sont satisfaites alors, pour tout* $((\varphi_0, \varphi_1), (\psi_0, \psi_1)) \in \left(\mathrm{H}_0^1(0,1) \times \mathrm{L}^2(0,1)\right)^2$ *et* $\theta_0 \in \mathrm{H}_0^1(0,1)$, *le système* (2.3) *admet une solution unique*

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi) &\in \left(C\left(\mathbb{R}_+; \mathrm{H}_0^1(0;1)\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}_+; \mathrm{L}^2(0;1)\right)\right)^2 \\ \theta &\in C\left(\mathbb{R}_+; \mathrm{L}^2(0;1)\right) \end{aligned}$$

Remarque 1. *La démonstration de cette proposition se fait à l'aide de la méthode de Feado-Galerkin, on renvoie pour plus de détailles au [14, 4] . Nous ne faisons pas la démonstration car elle est très longue et hors le sujet principal de ce mémoire.*

On définit l'énergie associée au système (2.3) par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_3 \theta^2 + \left(\alpha - \int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\psi_x^2 + \kappa\left(\varphi_x + \psi\right)^2\right]\mathrm{d}x + \frac{1}{2} g \circ \psi_x,$$

où, pour tout $v \in \mathrm{L}^2(0;1)$

$$(g \circ v)(t) = \int_0^1 \int_0^t g(t-s)(v(x,t) - v(x,s))^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

On vu facilement $\mathrm{E}(t) \geq 0$ par (H1) et c_0 constant positive.

2.1 Décroissance générale

Dans ce qui suit on va établir une décroissance générale de l'énergie associée au système (2.3) dans les deux cas :

a) des vitesses de propagations égaux

$$\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{\alpha}{\rho_2}. \tag{2.5}$$

b) des vitesses de propagations différentes

$$\frac{\kappa}{\rho_1} \neq \frac{\alpha}{\rho_2}. \tag{2.6}$$

Cas 1 : $\dfrac{\kappa}{\rho_1} = \dfrac{\alpha}{\rho_2}$.

Théorème 2.1. *Supposons que les hypothèses* (H1) *et* (H2) *sont satisfaites alors, pour tout est* $((\varphi_0, \varphi_1), (\psi_0, \psi_1)) \in \left(\mathrm{H}_0^1(0,1) \times \mathrm{L}^2(0,1)\right)^2$ *et* $\theta_0 \in \mathrm{H}_0^1(0,1)$*, le système* (2.3) *admet une solution unique* (φ, ψ, θ) *et l'énergie* $\mathrm{E}(\varphi, \psi, \theta, t)$ *vérifie*

$$\mathrm{E}(t) \leq \lambda e^{-\omega \int_0^t \xi(s)\mathrm{d}s} \quad \forall t \geq 0,$$

où ω *et* λ *sont deux constantes positives.*

Pour démontrer ce théorème, nous prsentons tout d'abord quelques résultats utiles.

Lemme 2.1. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, on a :*

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \psi_t(t) \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)\mathrm{dsdx} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[g \circ \psi_x - \left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\int_0^1 \psi_x^2(t)\mathrm{dx}\right] - \frac{1}{2}g' \circ \psi_x + \frac{1}{2}g(t)\int_0^1 \psi_x^2(t)\mathrm{dx}.
\end{aligned}$$

Preuve . On intègre par partie on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \psi_t(t) \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)\mathrm{dsdx} = -\int_0^1 \psi_{xt}(t)\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx} \\
&= -\int_0^1 \int_0^t g(t-s)\psi_{xt}(t)\left[\psi_x(s) - \psi_x(t) + \psi_x(t)\right]\mathrm{dsdx} \\
&= -\int_0^1 \int_0^t g(t-s)\psi_{xt}(t)\left[\psi_x(s) - \psi_x(t)\right]\mathrm{dsdx} - \int_0^1 \int_0^t g(t-s)\psi_{xt}(t)\psi_x(t)\mathrm{dsdx} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_0^1 \int_0^t \left[g(t-s)\left[\psi_x(s) - \psi_x(t)\right]^2 \mathrm{ds}\right]\mathrm{dx} - \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^t g'(t-s)\left[\psi_x(s) - \psi_x(t)\right]^2\mathrm{dsdx} \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\psi_x^2(t)\mathrm{dx} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[g \circ \psi_x - \left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\int_0^1 \psi_x^2(t)\mathrm{dx}\right] - \frac{1}{2}g' \circ \psi_x + \frac{1}{2}g(t)\int_0^1 \psi_x^2(t)\mathrm{dx}.
\end{aligned}$$

C'est ce que nous cherchons. □

Lemme 2.2. *On suppose que* (H1) *est vérifiée, alors :*

$$\int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)(v(t) - v(s))\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx} \leqslant c_0 g \circ v_x,$$

où c_0 *est une constante positive et pour tout* $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

Preuve . En appliquant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)(v(t) - v(s))\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx} &= \int_0^1 \left(\int_0^t g^{\frac{1}{2}}(t-s)g^{\frac{1}{2}}(t-s)(v(t) - v(s))\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx} \\
&\leq \int_0^1 \left(\left(\int_0^t |g^{\frac{1}{2}}(t-s)|^2\mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\
&\quad \times \left(\left(\int_0^t |g^{\frac{1}{2}}(t-s)|^2|(v(t) - v(s))|^2\mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \mathrm{dx} \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\left(\int_0^t g(t-s)(v(t) - v(s))^2\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx} \\
&\leq \left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\int_0^1 \int_0^t g(t-s)(v(t) - v(s))^2\mathrm{dsdx}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_0^t g(t-s)(v(t)-v(s))\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx} &\leq \left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\int_0^t g(t-s)\left(\int_0^1 (v(t)-v(s))^2\mathrm{dx}\right)\mathrm{ds}\\ &\leq \left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\int_0^t g(t-s)\left(C\int_0^1 (v_x(t)-v_x(s))^2\,\mathrm{dx}\right)\mathrm{ds}\\ &\leq \left(\int_0^\infty g(s)\mathrm{ds}\right)\int_0^t g(t-s)\left(C\int_0^1 (v_x(t)-v_x(s))^2\,\mathrm{dx}\right)\mathrm{ds}.\end{aligned}$$

On pose $c_0 = C\left(\int_0^\infty g(s)\mathrm{ds}\right)$, on aura

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_0^t g(t-s)(v(t)-v(s))\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx} &\leq c_0\int_0^1\int_0^t g(t-s)\left(v_x(t)-v_x(s)\right)^2\mathrm{dsdx}\\ &= c_0 g\circ v_x,\end{aligned}$$

d'après eq. (2.4) □

Remarque 2. *On utilise le lemme ci-dessus avec $-g'$ au lieu de g on obtient :*

$$\int_0^1\left(\int_0^t -g'(t-s)(v(t)-v(s))\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx} \leqslant -c_0 g'\circ v_x.$$

Lemme 2.3. *Pour toute $\psi\in \mathrm{H}^1(0,1)$, il existe une constante $c_0>0$ telle que*

$$\int_0^1\left(\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx} \leqslant c_0\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx}+c_0 g\circ\psi_x.$$

Preuve . En utilisant l'inégalité suivant : $(a+b)^2\leq 2a^2+2b^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left(\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}\leq 2\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}+2\int_0^1\left(\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}\\ &\leq 2\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}+2\int_0^1\left(\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(s)-\psi_x(t)+\psi_x(t)\right)\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}\\ &\leq 2\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}+2\int_0^1\left(\left(\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(s)-\psi_x(t)\right)\mathrm{ds}\right)+\left(\int_0^t \psi_x(t)g(t-s)\mathrm{ds}\right)\right)^2\mathrm{dx}\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité$(a+b)^2\leq 2a^2+2b^2$ une deuxième fois

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left(\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}\\ &\leq 2\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}+4\int_0^1\psi_x^2(t)\left(\int_0^t g(t-s)\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}+4\int_0^1\left(\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(s)-\psi_x(t)\right)\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}\\ &\leq\left(2+4\left(\int_0^\infty g(t-s)\mathrm{ds}\right)^2\right)\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}+4\int_0^1\left(\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(s)-\psi_x(t)\right)\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}\end{aligned}$$

On pose : $c_0=\max\left\{2+4\left(\int_0^\infty g(t-s)\mathrm{ds}\right)^2, 4\right\}$, et d'après lemme 2.2, on aura :

$$\int_0^1\left(\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}\leq c_0\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}+c_0 g\circ\psi_x.$$

□

Lemme 2.4. *Supposons que* (H1) *est vérifiée, alors, il existe une constante positive* c_0 *telle que :*

$$\int_0^1 u \int_0^t g(t-s)v_x(s)\mathrm{dsdx} \leqslant \varepsilon \int_0^1 u^2\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 v_x^2\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon} g\circ v_x.$$

pour tout $\varepsilon > 0$ *et pour tout* $u \in \mathrm{L}^2(0,1)$ *et* $v \in \mathrm{H}^1(0,1)$.

Preuve . En utilisant inégalité de Young on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u \int_0^t g(t-s)v_x(s)\mathrm{dsdx} &\leq \varepsilon \int_0^1 u^2\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)v_x(s)\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx}\\
&\leq \varepsilon \int_0^1 u^2\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)\left(v_x(s)+v_x(t)-v_x(t)\right)\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx}\\
&\leq \varepsilon \int_0^1 u^2\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \left(\left(\int_0^t v_x(t)g(t-s)\mathrm{ds}\right) + \left(\int_0^t g(t-s)\left(v_x(s)-v_x(t)\right)\mathrm{ds}\right)\right)^2 \mathrm{dx}.
\end{aligned}$$

Donc vu que $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 u \int_0^t g(t-s)v_x(s)\mathrm{dsdx}\\
&\quad\leq \varepsilon \int_0^1 u^2\mathrm{dx} + \frac{2c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \left(\int_0^t v_x(t)g(t-s)\mathrm{ds}\right)^2 dx + \frac{2c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)\left(v_x(s)-v_x(t)\right)\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx}\\
&\quad\leq \varepsilon \int_0^1 u^2\mathrm{dx} + \frac{2c_0}{\varepsilon}\int_0^1 v_x^2(x,t)\left(\int_0^\infty g(t-s)\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx} + \frac{2c_0}{\varepsilon}\left(\int_0^t g(t-s)\left(v_x(s)-v_x(t)\right)\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx}\\
&\quad\leq \varepsilon \int_0^1 u^2\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 v_x^2\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon} g\circ v_x,
\end{aligned}$$

où on a rénoté : $c_0 = \max\left\{2c_0\left(\int_0^\infty g(t-s)\mathrm{ds}\right)^2, 2c_0\right\}$. □

Lemme 2.5. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2), *l'énergie* $\mathrm{E}(t)$ *satisfait l'inégalité :*

$$\mathrm{E}'(t) = -\frac{k}{2}\int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{1}{2} g'\circ\psi_x - \frac{1}{2}g(t)\int_0^1 \psi_x^2(x,t)dx \leq 0. \tag{2.7}$$

Preuve . En multipliant $(2.3)_1$ par φ_t, $(2.3)_2$ par ψ_t et $(2.3)_3$ par θ puis on intègre sur $[0.1]$ et on utilise l'intégration par partie, on aura :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \rho_1\varphi_{tt}\varphi_t\mathrm{dx} &= \int_0^1 \kappa(\varphi_x+\psi)_x\varphi_t\mathrm{dx} - \int_0^1 \theta_x\varphi_t\mathrm{dx}.\\
&= \int_0^1 \kappa\varphi_{xx}\varphi_t\mathrm{dx} + \int_0^1 \kappa\psi_x\varphi_t\mathrm{dx} - \int_0^1 \theta_x\varphi_t\mathrm{dx}\\
&= -\int_0^1 \kappa\varphi_x\varphi_{xt}\mathrm{dx} + \int_0^1 \kappa\psi_x\varphi_t\mathrm{dx} - \int_0^1 \theta_x\varphi_t\mathrm{dx},
\end{aligned}$$

ce qu'on peut l'écrire

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left[\rho_1\varphi_t^2 + \kappa\varphi_x^2\right]\mathrm{dx} = \int_0^1 \kappa\psi_x\varphi_t\mathrm{dx} - \int_0^1 \theta_x\varphi_t\mathrm{dx}. \tag{1'}$$

On a encore

$$\int_0^1 \rho_2\psi_{tt}\psi_t\mathrm{dx} = \int_0^1 \alpha\psi_{xx}\psi_t\mathrm{dx} - \int_0^1 \kappa(\varphi_x+\psi)\psi_t\mathrm{dx} + \int_0^1 \theta\psi_t\mathrm{dx} - \int_0^1 \psi_t\int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(x,s)\mathrm{dsdx},$$

d'après lemme 2.2 :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_0^1 \rho_2\psi_t^2 \mathrm{dx} =& -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_0^1 \alpha\psi_x^2\mathrm{dx} - \int_0^1 \kappa\varphi_x\psi_t\mathrm{dx} - \int_0^1 \kappa\psi\psi_t\mathrm{dx} + \int_0^1 \theta\psi_t\mathrm{dx} \\
& - \int_0^1 \psi_t \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(x,s)\mathrm{dsdx} \\
=& -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_0^1 \alpha\psi_x^2\mathrm{dx} - \int_0^1 \kappa\varphi_x\psi_t\mathrm{dx} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \kappa\psi^2\mathrm{dx} + \int_0^1 \theta\psi_t\mathrm{dx} \\
& - \frac{1}{2}g(t)\int_0^1 \psi_x^2(t)\mathrm{dx} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[g\circ\psi_x - \left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\int_0^1 \psi_x^2(t)\mathrm{dx}\right] + \frac{1}{2}g'\circ\psi_x.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left[\rho_2\psi_t^2 + +\kappa\psi^2 + \left(\alpha - \int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\psi_x^2(t)\right]\mathrm{dx} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}g\circ\psi_x \\
&= \int_0^1 \kappa\varphi_x\psi_t\mathrm{dx} + \int_0^1 \theta\psi_t\mathrm{dx} - \frac{1}{2}g(t)\int_0^1 \psi_x^2(t)\mathrm{dx} + \frac{1}{2}g'\circ\psi_x. \qquad (2')
\end{aligned}
$$

et enfin

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \rho_3\theta_t\theta\mathrm{dx} =& k\int_0^1 \theta_{xx}\theta\mathrm{dx} - \int_0^1 \varphi_{xt}\theta\mathrm{dx} - \int_0^1 \psi_t\theta\mathrm{dx} \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho_3\theta^2\mathrm{dx} =& -k\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx} + \int_0^1 \varphi_t\theta_x\mathrm{dx} - \int_0^1 \psi_t\theta\mathrm{dx}. \qquad (3')
\end{aligned}
$$

La combinaison de $(1')$, $(2')$ et $(3')$ donne :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}'(t) =& \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_0^1 \left[\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_3\theta^2 + \left(\alpha - \int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\psi_x^2 + \kappa\left(\varphi_x + \psi\right)^2\right]\mathrm{dx} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{1}{2}g\circ\psi_x \\
=& -\frac{k}{2}\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx} + \frac{1}{2}g'\circ\psi_x - \frac{1}{2}g(t)\int_0^1 \psi_x^2(x,t)\mathrm{dx} \leq 0.
\end{aligned}
$$

□

Lemme 2.6. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, la fonctionnelle :*

$$
I(t) := -\int_0^1 \rho_2\psi_t \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s))\mathrm{dsdx},
$$

satisfait, pour (φ, ψ) solution de (2.3) et tout $\delta > 0$, l'estimation :

$$
\begin{aligned}
I'(t) \leq\; & -\left(\rho_2\int_0^t g(s)\mathrm{ds} - \delta\right)\int_0^1 \psi_t^2\mathrm{dx} + \delta\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2\mathrm{dx} + \delta c_0\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} \\
& + \delta c_0\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx} - \frac{c_0}{\delta}g'\circ\psi_x + c_0\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right)g\circ\psi_x.
\end{aligned} \qquad (2.8)
$$

Preuve . En dérivant $I(t)$ et on intègre par partie, on arrive à :

$$
\begin{aligned}
I'(t) =& -\int_0^1 \left[\alpha\psi_{xx} - \kappa\varphi_x - \kappa\psi + \theta - \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)\mathrm{ds}\right]\int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s))\mathrm{dsdx} \\
& - \int_0^1 \rho_2\psi_t \int_0^t g'(t-s)(\psi(t) - \psi(s))\mathrm{dsdx} - \int_0^t g(s)\mathrm{ds}\int_0^1 \rho_2\psi_t^2(t)\mathrm{dx}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I'(t) = & \int_0^1 \alpha\psi_x \int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right) \mathrm{dsdx} - \int_0^1 \theta \int_0^t g(t-s)(\psi(t)-\psi(s))\mathrm{dsdx} \\
& + \kappa \int_0^1 (\varphi_x+\psi) \int_0^t g(t-s)(\psi(t)-\psi(s))\mathrm{dsdx} \\
& - \int_0^1 \int_0^t g(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{ds} \int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{dsdx} \\
& - \int_0^1 \rho_2\psi_t \int_0^t g'(t-s)(\psi(t)-\psi(s))\mathrm{dsdx} - \int_0^t g(s)\mathrm{ds}\int_0^1 \rho_2\psi_t^2(t)\mathrm{dx}.
\end{aligned}
$$

En utilisant les inégalités de Young et de Poincaré, lemme 2.2 et remarque 2, on obtient :

$$
\int_0^1 \alpha\psi_x \int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{dsdx} \leq \varepsilon\alpha^2 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon} g\circ\psi_x \leq \delta \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c_0}{\delta} g\circ\psi_x,
$$

$$
-\int_0^1 \rho_2\psi_t \int_0^t g'(t-s)(\psi(t)-\psi(s))\mathrm{dsd}x \leq \varepsilon\rho_2^2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{c_0}{\varepsilon} g'\circ\psi_x \leq \delta\int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{c_0}{\delta} g'\circ\psi_x,
$$

$$
\kappa\int_0^1 (\varphi_x+\psi)\int_0^1 g(t-s)(\psi(t)-\psi(s))\mathrm{dsdx} \leq \varepsilon\kappa^2 \int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 + \frac{c_0}{\varepsilon} g\circ\psi_x \leq \delta\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 + \frac{c_0}{\delta} g\circ\psi_x,
$$

$$
\int_0^1 (-\theta)\int_0^t g(t-s)(\psi(t)-\psi(s))\mathrm{dsdx} \leq \varepsilon\int_0^1 \theta_x^2 + \frac{c_0}{\varepsilon} g\circ\psi_x \leq \delta\int_0^1 \theta_x^2 + \frac{c_0}{\delta} g\circ\psi_x,
$$

telles que $\delta = \max\left\{\varepsilon\rho_2^2, \varepsilon\alpha^2, \varepsilon\kappa^2, \varepsilon\right\}$.
Finalement,

$$
\begin{aligned}
& -\int_0^1 \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{dsdx} \\
& \leq \delta' \int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)\left[\psi_x(s)\right]\mathrm{ds}\right)^2 dx + \frac{c_0}{\delta'}\int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx} \\
& \leq \delta' \int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)\left[\psi_x(s)-\psi_x(t)+\psi_x(t)\right]\mathrm{ds}\right)^2 dx + \frac{c_0}{\delta'}\int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx} \\
& \leq 2\delta' \int_0^1 \psi_x^2 \left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx} + \left(2\delta' + \frac{c_0}{\delta'}\right)\int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx} \\
& \leq c_0\delta' \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} + c_0\left(\delta' + \frac{1}{\delta'}\right) g\circ\psi_x,
\end{aligned}
$$

tels que $c_0 = \max\left\{2\left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)^2, 2, c_0\right\}$ et $\delta = \max \delta' > 0$,

$$
\begin{aligned}
& -\int_0^1 \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{dsdx} \\
& \quad \leq \delta \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} + c_0\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right) g\circ\psi_x.
\end{aligned}
$$

Ce qui confirme le résultat du lemme. □

Lemme 2.7. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, la fonctionnelle définie par :*

$$
J(t) := -\int_0^1 \left(\rho_1\varphi\varphi_t + \rho_2\psi\psi_t\right) dx,
$$

satisfait, pour (φ, ψ, θ) *solution de (2.3) et tout* $\varepsilon > 0$, *l'estimation :*

$$\begin{aligned} J'(t) \leq \quad & -\int_0^1 \left(\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2\right) \mathrm{dx} + \kappa(1+\varepsilon) \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 \, \mathrm{dx} \\ & + c_0 \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon} \int_0^1 \theta_x^2 \mathrm{dx} + c_0 g \circ \psi_x, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Preuve . Une différenciation directe en utilisant (2.3) et l'intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} J'(t) = & -\int_0^1 \left(\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2\right) \mathrm{dx} - \int_0^1 \varphi \left(\kappa \varphi_{xx} + \kappa \psi_x - \theta_x\right) \mathrm{dx} \\ & - \int_0^1 \psi \left[\alpha \psi_{xx} - \kappa \varphi_x - \kappa \psi + \theta - \int_0^t g(t-s) \psi_{xx}(s) \mathrm{ds}\right] \mathrm{dx} \\ = & -\int_0^1 \left(\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2\right) \mathrm{dx} + \kappa \int_0^1 \varphi_x \left(\varphi_x + \psi\right) \mathrm{dx} + \int_0^1 \varphi \theta_x \\ & + \alpha \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} + \kappa \int_0^1 \psi \left(\varphi_x + \psi\right) \mathrm{dx} - \int_0^1 \psi \theta \mathrm{dx} - \int_0^1 \psi_x \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) \mathrm{dsdx} \\ = & -\int_0^1 \left(\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2\right) \mathrm{dx} + \kappa \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right)^2 \mathrm{dx} + \alpha \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} \\ & - \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right) \theta \mathrm{dx} - \int_0^1 \psi_x \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) \mathrm{dsdx}. \end{aligned}$$

Le lemme 2.3 donne

$$-\int_0^1 \psi_x \left(\int_0^t g(t-s) \psi_x(x,s) \mathrm{ds}\right) \mathrm{dx} \leq c_0 \int_0^1 \psi_x^2(t) \mathrm{dx} + c_0 g \circ \psi_x.$$

De plus, en utilisant les inégalités de Young et de Poincaré, on obtient, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$-\int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right) \theta \mathrm{dx} \leq \varepsilon \kappa \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right)^2 \mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon} \int_0^1 \theta_x^2 \mathrm{dx}.$$

Alors, on obtient le résultat du lemme. □

Lemme 2.8. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, la fonctionnelle définie par*

$$K_1(t) := \int_0^1 \rho_1 \varphi_t \left(\alpha \psi_x - \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) \mathrm{dsdx}\right) + \int_0^1 \rho_2 \kappa \psi_t \left(\varphi_x + \psi\right) \mathrm{dx},$$

satisfait, pour (φ, ψ, θ) *solution de (2.3) et pour tout* $\varepsilon > 0$, *l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} K_1'(t) \leq \quad & \kappa \left[\varphi_x \left(\alpha \psi_x - \int_0^t g(t-s) \psi_x(x,s) \mathrm{ds}\right)\right]_{x=0}^{x=1} + \kappa \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 \mathrm{dx} - \kappa^2 \left(1 - \varepsilon c_0\right) \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right)^2 \mathrm{dx} \\ & + \varepsilon \int_0^1 \varphi_t^2 \mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon} \int_0^1 \theta_x^2 \mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon} \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} + \varepsilon g \circ \psi_x - \frac{c_0}{\varepsilon} g' \circ \psi_x. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Preuve . En dérivant $K_1(t)$ et on utilise (2.3) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_0^1 \rho_1 \alpha \varphi_t \psi_x \mathrm{dx} = & \int_0^1 \rho_1 \alpha \varphi_{tt} \psi_x \mathrm{dx} + \int_0^1 \rho_1 \alpha \varphi_t \psi_{xt} \mathrm{dx} \\ = & \alpha \int_0^1 \left(\kappa \varphi_{xx} + \kappa \psi_x - \theta_x\right) \psi_x \mathrm{dx} + \int_0^1 \rho_1 \alpha \varphi_t \psi_{xt} \mathrm{dx} \\ = & \alpha \kappa \left[\varphi_x \psi_x\right]_{x=0}^{x=1} - \alpha \kappa \int_0^1 \varphi_x \psi_{xx} \mathrm{dx} + \alpha \kappa \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} \\ & - \alpha \int_0^1 \psi_x \theta_x \mathrm{dx} + \int_0^1 \rho_1 \alpha \varphi_t \psi_{xt} \mathrm{dx}. \end{aligned}$$

Aussi,

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_0^1 \rho_1\varphi_t \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsd}x =& -\int_0^1 \rho_1\varphi_{tt}\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsd}x \\
=& -\int_0^1 (\kappa\varphi_{xx}+\kappa\psi_x-\theta_x)\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx} \\
& - g(0)\int_0^1 \rho_1\varphi_t\psi_x\mathrm{dx} - \int_0^1 \rho_1\varphi_t\int_0^t g'(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx}.
\end{aligned}
$$

Finalement,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_0^1 \rho_2\kappa\psi_t\left(\varphi_x+\psi\right)\mathrm{dx} =& \int_0^1 \rho_2\kappa\psi_t\left(\varphi_{xt}+\psi_t\right)\mathrm{dx} + \int_0^1 \rho_2\kappa\psi_{tt}\left(\varphi_x+\psi\right)\mathrm{dx} \\
=& \int_0^1 \rho_2\kappa\psi_t\left(\varphi_{xt}+\psi_t\right)\mathrm{dx} + \kappa\int_0^1 (\alpha\psi_{xx}-\kappa\varphi_x-\kappa\psi+\theta \\
& - \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)\mathrm{ds})\left(\varphi_x+\psi\right)\mathrm{dx} \\
=& -\int_0^1 \rho_2\kappa\psi_{xt}\varphi_t\mathrm{dx} + \kappa\rho_2\int_0^1 \psi_t^2\mathrm{dx} + \alpha\kappa\int_0^1 \psi_{xx}\varphi_x\mathrm{dx} - \alpha\kappa\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} \\
& - \kappa^2\int_0^1 \left(\varphi_x+\psi\right)^2\mathrm{dx} + \kappa\int_0^1 \theta\left(\varphi_x+\psi\right)\mathrm{dx} \\
& + \kappa\int_0^1 \varphi_{xx}\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx} - \kappa\left[\varphi_x(x,t)\int_0^t g(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{ds}\right]_{x=0}^{x=1} \\
& + \kappa\int_0^1 \psi_x\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx}.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
K_1'(t) =& \int_0^1 \rho_1\alpha\varphi_t\psi_{xt}\mathrm{dx} - \int_0^1 \rho_2\kappa\psi_{xt}\varphi_t\mathrm{dx} + \kappa\left[\varphi_x\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{ds}\right)\right]_{x=0}^{x=1} \\
& - \alpha\int_0^1 \psi_x\theta_x\mathrm{dx} + \kappa\rho_2\int_0^1 \psi_t^2\mathrm{dx} - \kappa^2\int_0^1 \left(\varphi_x+\psi\right)^2\mathrm{dx} + \kappa\int_0^1 \theta\left(\varphi_x+\psi\right)\mathrm{dx} \\
& + \int_0^1 \theta_x\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx} - g(0)\int_0^1 \rho_1\varphi_t\psi_x\mathrm{dx} - \int_0^1 \rho_1\varphi_t\int_0^t g'(t-s)\mathrm{dsdx}.
\end{aligned}
$$

(2.5) conduit à

$$
\begin{aligned}
K_1'(t) =& \kappa\left[\varphi_x\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{ds}\right)\right]_{x=0}^{x=1} - \alpha\int_0^1 \psi_x\theta_x\mathrm{dx} \\
& + \kappa\rho_2\int_0^1 \psi_t^2\mathrm{dx} - \kappa^2\int_0^1 \left(\varphi_x+\psi\right)^2\mathrm{dx} + \kappa\int_0^1 \theta\left(\varphi_x+\psi\right)\mathrm{dx} \\
& + \int_0^1 \theta_x\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx} - g(0)\int_0^1 \rho_1\varphi_t\psi_x\mathrm{dx} - \int_0^1 \rho_1\varphi_t\int_0^t g'(t-s)\mathrm{dsdx}.
\end{aligned}
$$

Encore, en utilisant les inégalités de Young et Poincaré et lemme 2.3, on a

$$
\begin{aligned}
\alpha\int_0^1 \psi_x\theta_x dx &\leq \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx}, \\
\kappa\int_0^1 \theta\left(\varphi_x+\psi\right)\mathrm{dx} &\leq \kappa^2\varepsilon c_0\int_0^1 \left(\varphi_x+\psi\right)^2\mathrm{dx} + \frac{C\kappa^2}{4\varepsilon}\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx},
\end{aligned}
$$

$$\int_0^1 \theta_x \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx} \leq \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon g\circ\psi_x,$$
$$-g(0)\int_0^1 \rho_1\varphi_t\psi_x \mathrm{dx} \leq \varepsilon\int_0^1 \varphi_t^2\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx},$$
$$\int_0^1 \rho_1\varphi_t \int_0^t g'(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx} \leq \varepsilon\int_0^1 \varphi_t^2\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_x^2 dx - \frac{c_0}{\varepsilon}g'\circ\psi_x.$$

En substituant ces inégalités dans l'expression de K_1 on obtient l'estimation (2.12). □

Pour estimer les termes au bords en (2.10), nous avons besoin de ce qui suit :

Soit $M \in C^1([0;1])$ définie par

$$M(x) = 2-4x, \text{ alors, } M(1) = -M(0) = -2. \tag{2.11}$$

Lemme 2.9. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, les fonctionnelles K_2 et K_3 définies par :*

$$K_2(t) := \int_0^1 \rho_2 M(x)\psi_t\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx},$$

et

$$K_3(t) := \int_0^1 \rho_1 M(x)\varphi_t\varphi_x\mathrm{dx},$$

vérifient, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} K_2'(t) \leq \;& -\left(\alpha\psi_x(1,t) - \int_0^t g(t-s)\psi_x(1,s)\mathrm{ds}\right)^2 - \left(\alpha\psi_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)\psi_x(0,s)\mathrm{ds}\right)^2 \\ & +\varepsilon\kappa\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_x^2 + c_0\int_0^1 \psi_t^2\mathrm{dx} + c_0\int_0^1 \theta_x^2 + \frac{c_0}{\varepsilon}g\circ\psi_x - c_0 g'\circ\psi_x, \end{aligned} \tag{2.12}$$

et

$$K_3'(t) \leq -\kappa\left(\varphi_x^2(1,t) + \varphi_x^2(0,t)\right) + c_0\left(\int_0^1 \varphi_x^2\mathrm{dx} + \int_0^1 \varphi_t^2\mathrm{dx} + \int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} + \int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx}\right). \tag{2.13}$$

Preuve . Une différenciation directe en utilisant (2.3), on aura

$$\begin{aligned} K_2'(t) =& \int_0^1 M(x)\left(\alpha\psi_{xx} - \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)\mathrm{ds}\right)\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx} \\ & - \int_0^1 M(x)\left(\kappa\varphi_x + \kappa\psi - \theta\right)\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx} \\ & + \int_0^1 \rho_2 M(x)\psi_t\left(\alpha\psi_{xt} - g(0)\psi_x - \int_0^t g'(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx} \\ =& \int_0^1 M(x)\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx} + \int_0^1 M(x)\theta\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx} \\ & - \kappa\int_0^1 M(x)\left(\varphi_x+\psi\right)\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\int_0^1 \rho_2\alpha M(x)\psi_t^2\mathrm{dx} \\ & - \int_0^1 \rho_2 M(x)\psi_t\left(g(0)\psi_x + \int_0^t g'(t-s)\left[\psi_x(s)+\psi_x(t)-\psi_x(t)\right]\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
K_2'(t) =& \left[\frac{1}{2}M(x)\left(\alpha\psi_x(x,t) - \int_0^t g(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{ds}\right)^2\right]_{x=0}^{x=1} \\
& - \frac{1}{2}\int_0^1 M'(x)\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx} \\
& - \kappa\int_0^1 M(x)\left(\varphi_x + \psi\right)\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx} \\
& + \int_0^1 M(x)\theta\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx} + \left[\rho_2 M(x)\alpha\psi_t^2\right]_{x=0}^{x=1} - \frac{\rho_2\alpha}{2}\int_0^1 M'(x)\psi_t^2\mathrm{dx} \\
& + \int_0^1 \rho_2 M(x)\psi_t\left(-g(0)\psi_x + \int_0^t g'(t-s)\left(\psi_x(t) - \psi_x(s)\right)\mathrm{ds} + \int_0^t g'(t-s)\psi_x(t)\right)\mathrm{dx} \\
=& - \left(\alpha\psi_x(1,t) - \int_0^t g(t-s)\psi_x(1,s)\mathrm{ds}\right)^2 - \left(\alpha\psi_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)\psi_x(0,s)\mathrm{ds}\right)^2 \\
& - \frac{1}{2}\int_0^1 M'(x)\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx} \\
& - \kappa\int_0^1 M(x)\left(\varphi_x + \psi\right)\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx} \\
& + \int_0^1 M(x)\theta\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx} - \frac{\rho_2\alpha}{2}\int_0^1 M'(x)\psi_t^2\mathrm{dx} \\
& + \int_0^1 \rho_2 M(x)\psi_t\left(-g(t)\psi_x + \int_0^t g'(t-s)\left(\psi_x(t) - \psi_x(s)\right)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx}.
\end{aligned}
$$

En utilisant les inégalités de Young et Poincaré, lemme 2.3 et 2.2 et eq. (2.11), on aura

$$
-\kappa\int_0^1 M(x)\left(\varphi_x + \psi\right)\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx} \le \varepsilon\kappa\int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right)^2\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_x^2 + \frac{c_0}{\varepsilon} g\circ\psi_x,
$$

$$
\int_0^1 M(x)\theta\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx} \le c_0\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_x^2 + \frac{c_0}{\varepsilon} g\circ\psi_x.
$$

Aussi, les inégalités de Young et Poincaré et les lemmes 2.3 et 2.2 appliquées aux autres termes conduit au résultat souhaité.
Pour K_3, on a,

$$
\begin{aligned}
K_3'(t) =& \int_0^1 \rho_1 M(x)\varphi_{tt}\varphi_x\mathrm{dx} + \int_0^1 \rho_1 M(x)\varphi_t\varphi_{xt}\mathrm{dx} \\
=& \int_0^1 M(x)\left(\kappa\varphi_{xx} + \kappa\psi_x - \theta_x\right)\varphi_x\mathrm{dx} + \int_0^1 \rho_1 M(x)\varphi_t\varphi_{xt}\mathrm{dx} \\
=& - \kappa\left(\varphi_x^2(1,t) + \varphi_x^2(0,t)\right) - \frac{\kappa}{2}\int_0^1 M'(x)\varphi_x^2\mathrm{dx} + \kappa\int_0^1 M(x)\psi_x\varphi_x\mathrm{dx} \\
& - \int_0^1 M(x)\theta_x\varphi_x\mathrm{dx} - \frac{\rho_1}{2}\int_0^1 M'(x)\varphi_t^2\mathrm{dx}.
\end{aligned}
$$

Des estimations similaires conduisent à (2.14). □

Lemme 2.10. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, la fonctionnelle*

$$
K_4 := \frac{1}{\kappa}K_1 + \frac{1}{4\varepsilon}K_2 + \frac{\varepsilon}{\kappa}K_3,
$$

satisfait, pour (φ, ψ, θ) *solution de (2.3) et pour tout* $\varepsilon > 0$*, l'estimation suivante :*

$$K_4'(t) \leq \quad -\left(\frac{3}{4}\kappa - \varepsilon c_0\right)\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_t^2 + \varepsilon c_0\int_0^1 \varphi_t^2\mathrm{dx} \\ +\frac{c_0}{\varepsilon^2}\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \theta_x^2 + \frac{c_0}{\varepsilon^2} g\circ\psi_x - \frac{c_0}{\varepsilon} g'\circ\psi_x. \tag{2.14}$$

Preuve . En utilisant l'inégalité :

$$\varphi_x\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right) \leq \varepsilon\int \varphi_x^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)^2,$$

et en substituant (2.12) et (2.14) dans l'expression de K_4', on obtient :

$$\begin{aligned} K_4'(t) \leq & \rho_2\int_0^1 \psi_t^2\mathrm{dx} - \kappa\,(1-\varepsilon c_0)\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx} \\ & + \varepsilon\int_0^1 \varphi_t^2\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} + \varepsilon g\circ\psi_x - \frac{c_0}{\varepsilon} g'\circ\psi_x \\ & + \frac{\kappa}{4}\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon^2}\int_0^1 \psi_x^2 + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_{\mathrm{t}}^2\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \theta_x^2 + \frac{c_0}{\varepsilon^2} g\circ\psi_x \\ & - \frac{c_0}{\varepsilon} g'\circ\psi_x + \varepsilon c_0\left(\int_0^1 \varphi_x^2\mathrm{dx} + \int_0^1 \varphi_t^2\mathrm{dx} + \int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} + \int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx}\right). \end{aligned}$$

D'après le inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on a :

$$\varphi_x^2 = (\varphi_x + \psi - \psi)^2 \leq 2\,(\varphi_x+\psi)^2 + 2\psi^2.$$

Aussi on intègre sur $[0,1]$ et on utilise l'inégalité de Poincaré, on a :

$$\int_0^1 \varphi_x^2\mathrm{dx} \quad \leq 2\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx} + 2\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx}. \tag{2.15}$$

Donc (2.14) est démontré. □

Lemme 2.11. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, la fonctionnelle*

$$K_5 := \frac{2c_0\varepsilon}{\rho_1} J + K_4,$$

satisfait, pour (φ, ψ, θ) solution de (2.3) et pour un ε assez petite, l'estimation suivante :

$$K_5'(t) \leq -\frac{\kappa}{2}\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx} - \mu\int_0^1 \varphi_t^2\mathrm{dx} + c_0\int_0^1 \psi_t^2\mathrm{dx} + c_0\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} + c_0\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx} + c_0 g\circ\psi_x - c_0 g'\circ\psi_x, \tag{2.16}$$

pour une constante $\mu > 0$.

Preuve . En dérivant K_5 et en utilisant (2.9) et (2.14) on obtient :

$$K_5'(t) \leq -\left(\frac{3}{4}\kappa - \varepsilon c_0\right)\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx} - c_0\varepsilon\int_0^1 \varphi_t^2\mathrm{dx} + \left(\frac{c_0}{\varepsilon} - 2\varepsilon\frac{c_0\rho_2}{\rho_1}\right)\int_0^1 \psi_t^2\mathrm{dx} \\ + \left(\varepsilon c_0 + \frac{c_0}{\varepsilon^2}\right)\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} + c_0\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx} + c_0 g\circ\psi_x - \frac{c_0}{\varepsilon} g'\circ\psi_x.$$

On choisis ε assez petite telle que $\dfrac{3}{4}\kappa - \varepsilon c_0 \geq \dfrac{\kappa}{2}$ et $\dfrac{c_0}{\varepsilon} - 2\varepsilon\dfrac{c_0\rho_2}{\rho_1} > 0$. □

Pour le reste de la démonstration on a besoin de définir la fonction

$$\omega(x) := -\int_0^x \psi(y,t)\mathrm{dy} + \left(\int_0^1 \psi(y,t)\mathrm{dy}\right) x. \tag{2.17}$$

On peut vérifier facilement que

$$\omega_x(x) = -\psi(x,t) + \int_0^1 \psi(y,t)\mathrm{dy},$$

$$\omega_t(x) := -\int_0^x \psi_t(y,t)\mathrm{dy} + \left(\int_0^1 \psi_t(y,t)\mathrm{dy}\right) x$$

et que ω est la solution de l'équation différentielle

$$-\omega_{xx} = \psi_x, \quad \omega(0) = \omega(1) = 0. \tag{2.18}$$

Lemme 2.12. *La fonction ω satisfait*

$$\int_0^1 \omega_x^2 \mathrm{dx} \le \int_0^1 \psi^2 \mathrm{dx}, \qquad \int_0^1 \omega_t^2 \mathrm{dx} \le C \int_0^1 \psi_t^2 \mathrm{dx}.$$

Preuve . En utilisent l'ingalité de Poincaré, l'intégration par partie et 2.18, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 \omega_x^2 \mathrm{dx} = \int_0^1 \omega_x \omega_x \mathrm{dx} = -\int_0^1 \omega_{xx}\omega \mathrm{dx} = \int_0^1 \psi\omega_x \mathrm{dx}\\ \le \varepsilon \int_0^1 \psi^2 \mathrm{dx} + \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 \omega_x^2 \mathrm{dx},\end{aligned}$$

pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 \omega_x^2 \mathrm{dx} &\le \frac{1}{2}\int_0^1 \psi^2 \mathrm{dx} + \frac{1}{2}\int_0^1 \omega_x^2 \mathrm{dx}\\ \int_0^1 \omega_x^2 \mathrm{dx} &\le \int_0^1 \psi^2 \mathrm{dx}\end{aligned}$$

et

$$\int_0^1 \omega_t^2 \mathrm{dx} \le C\int_0^1 \omega_{xt}^2 \mathrm{dx} \le C\int_0^1 \psi_t^2 \mathrm{dx}.$$

□

Lemme 2.13. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, la fonctionnelle K_6 définie par :*

$$K_6(t) := \int_0^1 \left(\rho_1\omega\varphi_t + \rho_2\psi_t\psi\right) \mathrm{dx},$$

satisfait, pour (φ,ψ,θ) solution de (2.3), et pour $0 < \varepsilon_1 < \dfrac{\ell}{2}$, l'estimation suivante :

$$K_6'(t) \le -\frac{\ell}{2}\int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} + \varepsilon_1\int_0^1 \varphi_t^2 \mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon_1}\int_0^1 \theta_x^2 \mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon_1}\int_0^1 \psi_t^2 \mathrm{dx} + c_0 g \circ \psi_x, \tag{2.19}$$

où ℓ est la constante définie dans (H1).

Preuve . Une différenciation directe utilisant (2.3) donne :

$$\begin{aligned}K_6'(t) =& \int_0^1 \rho_1\omega\varphi_{tt}\mathrm{dx} + \int_0^1 \rho_1\omega_t\varphi_t\mathrm{dx} + \int_0^1 \rho_2\psi_{tt}\psi\mathrm{dx} + \int_0^1 \rho_2\psi_t^2\mathrm{dx}\\ =& \int_0^1 \omega\left(\kappa\varphi_{xx} + \kappa\psi_x - \theta_x\right)\mathrm{dx} + \int_0^1 \rho_1 w_t\varphi_t\mathrm{dx}\\ &+ \int_0^1 \left(\alpha\psi_{xx} - \kappa\varphi_x - \kappa\psi + \theta - \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)\mathrm{ds}\right)\psi\mathrm{dx} + \int_0^1 \rho_2\psi_t^2\mathrm{dx}.\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie on arrive à

$$\begin{aligned}
K_6(t) =& -\kappa \int_0^1 \omega_x\varphi_x \mathrm{dx} + \kappa \int_0^1 \omega_x^2 \mathrm{dx} + \int_0^1 \omega_x\theta \mathrm{dx} + \rho_1 \int_0^1 \omega_t\varphi_t \mathrm{dx} \\
& - \alpha \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} - \kappa \int_0^1 \varphi_x\psi \mathrm{dx} - \kappa \int_0^1 \psi^2 \mathrm{dx} + \int_0^1 \theta\psi \mathrm{dx} + \int_0^1 \rho_2\psi_t^2 \mathrm{dx} \\
& - \int_0^1 \psi_x \left(\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t) - \psi_x(s)\right) \mathrm{ds} \right) \mathrm{dx} + \left(\int_0^t g(s) \mathrm{ds} \right) \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} \\
=&\kappa \left(\int_0^1 \omega_x^2 \mathrm{d}x - \int_0^1 \psi^2 \mathrm{dx} \right) + \int_0^1 \omega_x\theta \mathrm{dx} + \int_0^1 \rho_2\psi_t^2 \mathrm{dx} + \rho_1 \int_0^1 \omega_t\varphi_t \mathrm{dx} \\
& - \alpha \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} - \kappa \int_0^1 \left(w_x + \psi\right)\varphi_x \mathrm{dx} + \int_0^1 \theta\psi \mathrm{dx} \\
& - \int_0^1 \psi_x \left(\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t) - \psi_x(s)\right) \mathrm{ds} \right) \mathrm{dx} + \left(\int_0^t g(s) \mathrm{ds} \right) \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx}.
\end{aligned}$$

D'après lemme 2.12 et (2.18), on a

$$\begin{aligned}
K_6'(t) \leq & \int_0^1 \omega_x\theta \mathrm{dx} + \int_0^1 \rho_2\psi_t^2 \mathrm{dx} + \rho_1 \int_0^1 \omega_t\varphi_t \mathrm{dx} - \alpha \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} + \int_0^1 \theta\psi \mathrm{dx} \\
& - \int_0^1 \psi_x \left(\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t) - \psi_x(s)\right) \mathrm{ds} \right) \mathrm{dx} + \left(\int_0^t g(s) \mathrm{ds} \right) \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx}.
\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Young et Poincaré, remarque 2 et lemme 2.12, on arrive à :

$$\begin{aligned}
K_6'(t) \leq & -\left(\alpha - \int_0^t g(s) \mathrm{ds} - \varepsilon c_0 - \varepsilon_1 \right) \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} + \varepsilon_1 \int_0^1 \varphi_t^2 \mathrm{dx} \\
& + \frac{c_0}{\varepsilon_1} \int_0^1 \psi_t^2 \mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon} g \circ \psi_x + \frac{c_0}{\varepsilon_1} \int_0^1 \theta_x^2 \mathrm{dx}, \quad \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

Rappelant (H1), on en déduit

$$K_6'(t) \leq -\left(\ell - \varepsilon_1 - \varepsilon c_0\right) \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} + \varepsilon_1 \int_0^1 \varphi_t^2 \mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon_1} \int_0^1 \theta_x^2 \mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon_1} \int_0^1 \psi_t^2 \mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon} g \circ \psi_x$$

Ainsi, pour $0 \leq \varepsilon_1 \leq \dfrac{\ell}{2}$ on établi (2.19). □

Fin de la démonstration du Théeorème 2.1. Pour $N_1, N_2, N_3 > 0$, qui seront fixées ultérieurement, on définie la fonctionnelle de **Lyapunov** par :

$$\mathcal{L}(t) = N_1 E(t) + N_2 I(t) + N_3 K_6(t) + \frac{1}{\kappa} K_5(t).$$

En outre, en choisissant N_1 encore assez grand, on obtient

$$\mathcal{L}(t) \sim E(t).$$

en effet

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{L}(t) - N_1 E(t)\right| \leq & N_2\rho_2 \left| \int_0^1 \psi_t \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) \mathrm{dsdx} \right| + N_3 \int_0^1 \rho_1 \left|\omega\varphi_t\right| \mathrm{dx} \\
& - \frac{2c_0\varepsilon}{\kappa} \int_0^1 \left|\varphi\varphi_t\right| \mathrm{dx} + -\frac{2c_0\varepsilon\rho_2}{\rho_1\kappa} \int_0^1 \left|\psi_t\psi\right| \mathrm{dx} \\
& + \frac{1}{\kappa^2} \left| \int_0^1 \rho_1\varphi_t(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds})\mathrm{dx} \right| + N_3\rho_2 \int_0^1 \left|\psi_t\psi\right| \mathrm{dx} \\
& + \frac{\rho_2}{4\varepsilon\kappa} \left| \int_0^1 M(x)\psi_t(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds})\mathrm{dx} \right| + \frac{\rho_2}{\kappa} \int_0^1 \left|\psi_t\varphi_x\right| dx \\
& + \frac{\varepsilon\rho_1}{\kappa^2} \int_0^1 \left|M(x)\varphi_t\varphi_x\right| \mathrm{dx} + \frac{\rho_2}{\kappa} \int_0^1 \left|\psi_t\psi\right| \mathrm{dx}.
\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Young et Poincaré, les lemmes 2.2, 2.3 et on utilise la bornitude de la fonction $M(x)$

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}(t)-N_1E(t)|\leq&\left(N_2\rho_2\varepsilon+N_3\rho_2\varepsilon-\frac{2c_0\varepsilon^2\rho_2}{\rho_1\kappa}+\frac{\rho_2}{4\varepsilon\kappa}+\frac{\rho_1\varepsilon}{\kappa}+\frac{\rho_2M}{4\kappa}\right)\int_0^1\psi_t^2\\&+\left(\frac{N_2\rho_2}{4\varepsilon}+\frac{\rho_1c_0}{\kappa^2}+\frac{\rho_2M}{16\kappa\varepsilon}\right)g\circ\psi_x+\frac{\rho_2\varepsilon}{\kappa}\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2\mathrm{dx}\\&+\left(N_3\rho_1+\frac{N_3\rho_2}{4\varepsilon}-\frac{2c_0\rho_2C}{4\rho_1\kappa}+\frac{\rho_1\alpha c_0}{\kappa^2}+\frac{\rho_2\alpha M}{16\kappa\varepsilon}\right)\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}\\&+\left(\frac{N_3\rho_1}{4\varepsilon}-\frac{2c_0C}{4\kappa}+\frac{\varepsilon\rho_1}{\kappa^2}+\frac{\varepsilon^2\rho_1M}{\kappa^2}\right)\int_0^1\varphi_t^2\mathrm{dx}\\&+\left(\frac{\rho_1M}{4\kappa^2}-\frac{2c_0\varepsilon^2C}{\kappa}\right)\int_0^1\varphi_x^2\mathrm{dx}.\end{aligned}$$

Maintenant, on prend

$$\begin{aligned}\lambda=\max&\left\{\left(N_2\rho_2\varepsilon+N_3\rho_2\varepsilon-\frac{2c_0\varepsilon^2\rho_2}{\rho_1\kappa}+\frac{\rho_2}{4\varepsilon\kappa}+\frac{\rho_1\varepsilon}{\kappa}+\frac{\rho_2M}{4\kappa}\right),\left(\frac{N_2\rho_2}{4\varepsilon}+\frac{\rho_1c_0}{\kappa^2}+\frac{\rho_2M}{16\kappa\varepsilon}\right),\right.\\&\left(N_3\rho_1+\frac{N_3\rho_2}{4\varepsilon}-\frac{2c_0\rho_2C}{4\rho_1\kappa}+\frac{\rho_1\alpha c_0}{\kappa^2}+\frac{\rho_2\alpha M}{16\kappa\varepsilon}\right),\frac{\rho_2\varepsilon}{\kappa},\\&\left.\left(\frac{N_3\rho_1}{4\varepsilon}-\frac{2c_0C}{4\kappa}+\frac{\varepsilon\rho_1}{\kappa^2}+\frac{\varepsilon^2\rho_1M}{\kappa^2}\right),\left(\frac{\rho_1M}{4\kappa^2}-\frac{2c_0\varepsilon^2C}{\kappa}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$|\mathcal{L}(t)-N_1\mathrm{E}(t)|\leq\lambda\mathrm{E}(t)$$
$$(N_1-\lambda)\mathrm{E}(t)\leq\mathcal{L}(t)\leq(N_1+\lambda)\mathrm{E}(t).$$

Donc

$$\mathcal{L}\sim\mathrm{E}.$$

Il est clair que $\mathcal{L}$ est définie positive, il nous reste à vérifier que $\mathcal{L}'$ est définie négative pour appliquer la théorie de stabilité de Lyapunov.
En utilisant eq. (2.7), eq. (2.8), eq. (2.16) et eq. (2.19), on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(t)\leq&N_1\left(-\frac{k}{2}\int_0^1\theta_x^2\mathrm{dx}+\frac{1}{2}g'\circ\psi_x-\frac{1}{2}g(t)\int_0^1\psi_x^2(x,t)\mathrm{dx}\right)\\&+N_2\left(-\left(\rho_2\int_0^tg(s)\mathrm{ds}-\delta\right)\int_0^1\psi_t^2\mathrm{dx}+\delta\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx}+\delta c_0\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}\right.\\&\left.+\delta c_0\int_0^1\theta_x^2\mathrm{dx}-\frac{c_0}{\delta}g'\circ\psi_x+c_0\left(\delta+\frac{1}{\delta}\right)g\circ\psi_x\right)\\&+N_3\left(-\frac{\ell}{2}\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}+\varepsilon_1\int_0^1\varphi_t^2\mathrm{dx}+\frac{c_0}{\varepsilon_1}\int_0^1\theta_x^2\mathrm{dx}+\frac{c_0}{\varepsilon_1}\int_0^1\psi_t^2\mathrm{dx}+c_0g\circ\psi_x\right)\\&+\frac{1}{\kappa}\left(-\frac{\kappa}{2}\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx}-\mu\int_0^1\varphi_t^2\mathrm{dx}+c_0\int_0^1\psi_t^2+c_0\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}\right.\\&\left.+c_0\int_0^1\theta_x^2+c_0g\circ\psi_x-c_0g'\circ\psi_x.\right)\\&\leq-\left(\frac{N_3\ell}{2}-c_0-N_2\delta c_0\right)\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}-\left(\frac{N_1k}{2}-c_0-N_2\delta c_0-\frac{N_3c_0}{\varepsilon_1}\right)\int_0^1\theta_x^2\mathrm{dx}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(\mu - N_3\varepsilon_1)\int_0^1 \varphi_t^2 \mathrm{dx} - \left[\left(\rho_2\int_0^t g(s)\mathrm{ds} - \delta\right)N_2 - c_0 - N_3\frac{c_0}{\varepsilon_1}\right]\int_0^1 \psi_t^2\mathrm{dx}\\
&-\left(\frac{1}{2} - \delta N_2\right)\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2\,\mathrm{dx} + \left(N_2 c_0\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right) + N_3 c_0 + c_0\right) g\circ\psi_x\\
&+\left(\frac{N_1}{2} - N_2\frac{c_0}{\delta} - c_0\right) g'\circ\psi_x.
\end{aligned}
$$

Prenons $\delta = \dfrac{1}{4N_2}$ et posons $g_0 = \rho_2\displaystyle\int_0^{t_0} g(s)ds$ pour $t_0 > 0$ fixe. Alors, pour tout $t \geq t_0$ et pour $0 < \varepsilon_1 < \dfrac{\ell}{2}$ nous aurons :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq\ & -\left(\frac{N_3\ell}{2} - \frac{5c_0}{4}\right)\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} - \left(\frac{N_1 k}{2} - \frac{5c_0}{4} - \frac{N_3 c_0}{\varepsilon_1}\right)\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx}\\
&-(\mu - N_3\varepsilon_1)\int_0^1 \varphi_t^2\mathrm{dx} - \left(N_2 g_0 - \frac{1}{4} - \frac{N_3 c_0}{\varepsilon_1} - c_0\right)\int_0^1 \psi_t^2\mathrm{dx}\\
&-\frac{1}{4}\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2\,\mathrm{dx} + \left(4N_2^2 + N_3 c_0 + \frac{5c_0}{4}\right) g\circ\psi_x + \left(\frac{N_1}{2} - 4N_2^2 c_0 - c_0\right) g'\circ\psi_x.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

On choisit N_3 assez grand pour que

$$
c_1 = \frac{N_3\ell}{2} - \frac{5c_0}{4} > 0,
$$

aussi ε_1 assez petite pour que

$$
c_2 = \mu - N_3\varepsilon_1 > 0,
$$

et, on prendre N_2 assez grand pour que

$$
c_3 = N_2 g_0 - \frac{1}{4} - c_0 - \frac{N_3 c_0}{\varepsilon_1} > 0,
$$

enfin, nous prenons N_1 assez grand pour que

$$
c_4 = \frac{N_1 k}{2} + c_0 - \frac{N_3 c_0}{\varepsilon_1} > 0,
$$

et

$$
c_5 = \frac{N_1}{2} - 4N_2^2 c_0 - c_0 > 0.
$$

Par conséquent, eq. (2.20) prend la forme

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq & -c_1\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} - c_2\int_0^1 \varphi_t^2\mathrm{dx} - c_3\int_0^1 \psi_t^2\mathrm{dx} - c_4\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx}\\
&-\frac{1}{4}\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2\,\mathrm{dx} + c_5 g'\circ\psi_x + \left(4N_2^2 + N_3 c_0 + \frac{5c_0}{4}\right) g\circ\psi_x.
\end{aligned}
$$

Alors, il existe deux constantes positives λ et C, on a

$$
\mathcal{L}'(t) \leq -\lambda \mathrm{E}(t) + C g\circ\psi_x, \quad \forall t \geq t_0 \tag{2.21}
$$

En multipliant (2.21) par $\xi(t)$ et en utilisant (H1) et (H2), on arrive à

$$
\begin{aligned}
\xi(t)\mathcal{L}' &\leq -\lambda\xi(t)\mathrm{E}(t) + C\xi(t) g\circ\psi_x\\
&\leq -\lambda\xi(t)\mathrm{E}(t) - C g'\circ\psi_x\\
&\leq -\lambda\xi(t)\mathrm{E}(t) - C\mathrm{E}'(t).
\end{aligned}
$$

En utilisant le fait que $\xi'(t) \leq 0$, on obtient

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\xi(t)\mathcal{L}(t) + C\mathrm{E}(t)) \leq -\lambda\xi(t)\mathrm{E}(t), \quad \forall t \geq t_0.
$$

Encore une fois, en notant que
$$F=\xi\mathcal{L}+C\mathrm{E}\sim \mathrm{E}(t),$$
on obtient pour une constante positive
$$F'(t)\leq -\omega\xi(t)F(t),\quad \forall t\geq t_0.$$
En intégrant sur $[t_0,t]$ on a
$$\begin{aligned}F(t)&\leq F\left(t_0\right)\mathrm{e}^{-\omega\int_{t_0}^{t}\xi(s)\mathrm{ds}}\\ &\leq C\mathrm{e}^{-\omega\int_0^t\xi(s)\mathrm{ds}},\quad \forall t\geq t_0.\end{aligned}$$
□

Nous avons montrer que la solution du (2.3) vérifie l'inégalité du théorème 2.1 ce qui signifie qu'on a une décroissance générale de l'énergie dépend de la fonction de relaxation g.

Cas 2 : $\frac{\kappa}{\rho_1}\neq\frac{\alpha}{\rho_2}$.

Théorème 2.2. *Soient* $(\varphi_0,\psi_0)\in\left[\mathrm{H}^2(0,1)\cap\mathrm{H}_0^1(0;1)\right]^2$, $\theta_0\in\mathrm{H}_0^1(0;1)$ *et* $(\varphi_1,\psi_1)\in\left[\mathrm{H}^2(0,1)\right]^2$. *On suppose de plus que les hypothèses* (H1) *et* (H2) *sont vérifiées, alors, il existe deux constantes positives* ω *et* λ *pour lesquel la solution du système (2.3) satisfait l'éstimation :*
$$E(t)\leq\frac{\lambda}{\int_0^t\xi(s)\mathrm{ds}},\quad \forall t\geq t_0.$$

La démonstration du théorème se fait en plusieurs étapes, nous devons tout d'abord montrer quelques lemmes.

Lemme 2.14. *On suppose que* (H1) *est vérifiée, alors pour tout* $t>0$ *on a*
$$\int_0^1\left(\int_0^t g(t-s)(v(t)-v(s))\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}\leqslant g_0(t)g\circ v_x,$$
où on a noté $g_0(t):=\int_0^t g(s)ds$.

Preuve . En utilisent les inégalités de Cauchy-Schwarz et Poincaré, on obtient
$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_0^t g(t-s)(v(t)-v(s))\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}&=\int_0^1\left(\int_0^t g^{\frac{1}{2}}(t-s)g^{\frac{1}{2}}(t-s)(v(t)-v(s))\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}\\ &\leq\int_0^1\left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\left(\int_0^t g(t-s)(v(t)-v(s))^2\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx}\\ &\leq\left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\int_0^1\int_0^t g(t-s)(v(t)-v(s))^2\mathrm{dsdx}\\ &\leq\left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\int_0^t g(t-s)\left(\int_0^1(v(t)-v(s))^2\mathrm{dx}\right)\mathrm{ds}\\ &\leq\left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\int_0^t g(t-s)\left(C\int_0^1\left(v_x(t)-v_x(s)\right)^2\mathrm{dx}\right)\mathrm{ds},\end{aligned}$$
ce qui prouve le lemme. □

Remarque 3. *Pour* $-g'$ *au lieu de* g *et lemme 2.14 on obtient*
$$\int_0^1\left(\int_0^t -g'(t-s)(v(t)-v(s))\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}\leqslant -g(0)g'\circ v_x.$$

Lemme 2.15. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, la fonctionnelle*

$$I_1(t) := -\int_0^1 \rho_2\psi_t \int_0^t g(t-s)(\psi(t)-\psi(s))\mathrm{dsdx},$$

satisfait, pour (φ,ψ,θ) solution de (2.3), l'estimation :

$$\begin{aligned} I_1'(t) \leq \quad & -\left(\rho_2\int_0^t g(s)\mathrm{ds}-\delta\right)\int_0^1 \psi_t^2\mathrm{dx}+\delta\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx}+\delta c_0\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx} \\ & +\delta\int_0^1\theta_x^2\mathrm{dx}-c_\delta g'\circ\psi_x+c_\delta g_0(t)g\circ\psi_x, \end{aligned} \tag{2.22}$$

où c_δ est une constante dépend par δ.

Preuve . En dérivant $I_1(t)$ et en utilisant (2.3) et on intègre par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} I_1'(t) = & -\int_0^1\left[\alpha\psi_{xx}-\kappa\varphi_x-\kappa\psi+\theta-\int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)\mathrm{ds}\right]\int_0^t g(t-s)(\psi(t)-\psi(s))\mathrm{dsdx} \\ & -\int_0^1\rho_2\psi_t\int_0^t g'(t-s)(\psi(t)-\psi(s))\mathrm{dsdx}-\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\int_0^1\rho_2\psi_t^2(t)\mathrm{dx} \\ = & \int_0^1\alpha\psi_x\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{dsdx}+\kappa\int_0^1(\varphi_x+\psi)\int_0^t g(t-s)(\psi(t)-\psi(s))\mathrm{dsdx} \\ & -\int_0^1\theta\int_0^t g(t-s)(\psi(t)-\psi(s))\mathrm{dsdx}-\int_0^1\int_0^t g(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{ds}\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{dsdx} \\ & -\int_0^1\rho_2\psi_t\int_0^t g'(t-s)(\psi(t)-\psi(s))\mathrm{dsdx}-\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\int_0^1\rho_2\psi_t^2(t)\mathrm{dx}. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Young et Poincaré, lemme 2.14 et remarque 3, on obtient

$$-\int_0^1\rho_2\psi_t\int_0^t g'(t-s)(\psi(t)-\psi(s))\mathrm{ds}dx \leq \rho_2\delta\int_0^1\psi_t^2\mathrm{dx}-\frac{g(0)}{4\delta}g'\circ\psi_x,$$

$$\begin{aligned} \int_0^1\alpha\psi_x\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{dsdx} & \leq \frac{\delta}{2}\int_0^1\psi_x^2dx+\frac{1}{4\delta}\int_0^1\left(\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx} \\ & \leq \frac{\delta}{2}\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}+\frac{1}{4\delta}g_0(t)g\circ\psi_x, \end{aligned}$$

$$\kappa\int_0^1(\varphi_x+\psi)\int_0^1 g(t-s)(\psi(t)-\psi(s))\mathrm{ds}\ \mathrm{dx} \leq \delta\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx}+\frac{1}{4\delta}g_0(t)g\circ\psi_x,$$

$$\int_0^1-\theta\int_0^t g(t-s)(\psi(t)-\psi(s))\mathrm{dsdx} \leq \delta\int_0^1\theta_x^2+\frac{1}{4\delta}g_0(t)g\circ\psi_x.$$

Enfin, le dernier terme

$$\begin{aligned} & -\int_0^1\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{dsdx} \\ & \leq \frac{\delta}{4\left(\int_0^\infty g(s)\mathrm{ds}\right)^2}\int_0^1\left(\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx} \\ & +\frac{1}{4\delta}\int_0^1\left(\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)ds\right)^2\mathrm{dx}. \end{aligned}$$

On a

$$\int_0^1\left(\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx} \leq \int_0^1\left(\int_0^t g(t-s)\left[\psi_x(s)+\psi_x(t)-\psi_x(t)\right]\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}.$$

Alors vu que $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$ on a :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx} \\
&\quad \leq 2\int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)\psi_x(t)\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx} + 2\int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)\left[\psi_x(t)-\psi_x(s)\right]\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx} \\
&\quad \leq 2\left(\int_0^\infty g(s)\mathrm{ds}\right)^2 \int_0^1 \psi_x^2(t)\mathrm{dx} + 2\int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)\left[\psi_x(t)-\psi_x(s)\right]\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx},
\end{aligned}$$

et en utilisent lemme 2.14, pour $c_\delta = \max\left\{\frac{1}{4\delta}, \frac{-g(0)}{4\delta}\right\}$, on a

$$\begin{aligned}
-\int_0^1\int_0^t \quad & g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{dsdx} \\
\leq \quad & \frac{\delta}{2}\int_0^1 \psi_x^2(t)\mathrm{dx} + \left[\frac{\delta}{2\left(\int_0^\infty g(s)\mathrm{ds}\right)^2} + c_\delta\right]\int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(s)-\psi_x(t)\right)\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx} \\
\leq \quad & \frac{\delta}{2}\int_0^1 \psi_x^2(t)\mathrm{dx} + c_\delta g_0(t) g\circ\psi_x.
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.16. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, la fonctionnelle*

$$I_2(t) := -\int_0^1 \left(\rho_1\varphi\varphi_t + \rho_2\psi\psi_t\right)\mathrm{dx},$$

satisfait, pour (φ,ψ,θ) *solution de (2.3), l'estimation :*

$$\begin{aligned}
I_2'(t) \leq \quad & -\int_0^1 \left(\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2\right)\mathrm{dx} + 2\kappa\int_0^1 \left(\varphi_x+\psi\right)^2 \mathrm{dx} \\
& + c\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} + c\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx} + cg_0(t) g\circ\psi_x,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Preuve . Une différentiation directe en utilisant (2.3) implique que :

$$\begin{aligned}
I_2'(t) = & -\int_0^1 \left(\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2\right)\mathrm{dx} - \int_0^1 \varphi\left[\kappa\left(\varphi_x+\psi\right)_x - \theta_x\right]\mathrm{dx} \\
& - \int_0^1 \psi\left[\alpha\psi_{xx} - \kappa\left(\varphi_x+\psi\right) + \theta - \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)\mathrm{ds}\right]\mathrm{dx}
\end{aligned}$$

on intègre par partie

$$\begin{aligned}
I_2'(t) = & -\int_0^1 \left(\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2\right)\mathrm{dx} + \kappa\int_0^1 \varphi_x\left(\varphi_x+\psi\right)\mathrm{dx} + \int_0^1 \varphi\theta_x\mathrm{dx} \\
& + \alpha\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} + \kappa\int_0^1 \psi\left(\varphi_x+\psi\right)\mathrm{dx} - \int_0^1 \psi\theta\mathrm{dx} - \int_0^1 \psi_x\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx} \\
= & -\int_0^1 \left(\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2\right)\mathrm{dx} + \kappa\int_0^1 \left(\varphi_x+\psi\right)^2 \mathrm{dx} + \alpha\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} \\
& - \int_0^1 \left(\varphi_x+\psi\right)\theta\mathrm{dx} - \int_0^1 \psi_x\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx}
\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Young et Poincaré et les lemmes 2.14 et 2.3, on obtient

$$-\int_0^1 \left(\varphi_x+\psi\right)\theta\mathrm{dx} \leq \kappa\int_0^1 \left(\varphi_x+\psi\right)^2 \mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx},$$

$$-\int_0^1 \psi_x\left(\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx} \leq c_0\int_0^1 \psi_x^2(t)\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon}g_0(t)\ g\circ v_x.$$

Alors, on prend $c = \max\left\{c_0, \frac{c_0}{\varepsilon}\right\}$.
Donc le résultat du lemme s'ensuit. □

Lemme 2.17. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, la fonctionnelle :*

$$I_3(t) := \frac{\rho_1}{\kappa}\int_0^1 \varphi_t\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx} + \int_0^1 \rho_2\psi_t\left(\varphi_x+\psi\right)\mathrm{dx},$$

satisfait, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} I_3'(t) \leq\ & \frac{1}{2\varepsilon}\left(\alpha\psi_x(1,t) - \int_0^t g(t-s)\psi_x(1,s)\mathrm{ds}\right)^2 \\ & + \frac{1}{2\varepsilon}\left(\alpha\psi_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)\psi_x(0,s)\mathrm{ds}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{2}\left(\varphi_x^2(1,t)+\varphi_x^2(0,t)\right) \\ & + \rho_2\int_0^1 \psi_t^2\mathrm{dx} - \kappa(1-\varepsilon c)\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx} + \varepsilon\int_0^1 \varphi_t^2\mathrm{dx} + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx} \\ & + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} + \varepsilon g\circ\psi_x - \frac{c}{\varepsilon}g'\circ\psi_x + \left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa} - \rho_2\right)\int_0^1 \varphi_t\psi_{xt}\mathrm{dx}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Preuve . En dérivant $I_3(t)$ et en utilisant (2.3), on arrive à :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\rho_1}{\kappa}\int_0^1 \alpha\varphi_t\psi_x\mathrm{dx}\right) = \frac{\alpha}{\kappa}\int_0^1 \left(\kappa\left(\varphi_x+\psi\right)_x - \theta_x\right)\psi_x\mathrm{dx} + \frac{\rho_1\alpha}{\kappa}\int_0^1 \varphi_t\psi_{xt}\mathrm{dx}$$

En utilisant l'intégration par partie

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\rho_1}{\kappa}\int_0^1 \alpha\varphi_t\psi_x\mathrm{dx}\right) =& \alpha\left[\varphi_x\psi_x\right]_{x=0}^{x=1} - \alpha\int_0^1 \varphi_x\psi_{xx}\mathrm{dx} + \alpha\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} \\ & - \frac{\alpha}{\kappa}\int_0^1 \psi_x\theta_x\mathrm{dx} + \frac{\rho_1\alpha}{\kappa}\int_0^1 \varphi_t\psi_{xt}\mathrm{dx}. \end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\int_0^1 \rho_2\psi_t\left(\varphi_x+\psi\right)\mathrm{dx}\right) =& \int_0^1 \rho_2\psi_t\left(\varphi_{xt}+\psi_t\right)\mathrm{dx} \\ & + \int_0^1 \left(\alpha\psi_{xx} - \kappa\left(\varphi_x+\psi\right) + \theta - \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(x,s)\mathrm{ds}\right)\left(\varphi_x+\psi\right)\mathrm{dx} \\ =& -\int_0^1 \rho_2\psi_{xt}\varphi_t\mathrm{dx} + \rho_2\int_0^1 \psi_t^2\mathrm{dx} + \alpha\int_0^1 \psi_{xx}\varphi_x\mathrm{dx} - \alpha\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} \\ & - \kappa\int_0^1 \left(\varphi_x+\psi\right)^2\mathrm{dx} + \int_0^1 \theta\left(\varphi_x+\psi\right)\mathrm{dx} \\ & + \int_0^1 \varphi_{xx}(t)\int_0^t g(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{dsdx} - \left[\varphi_x(t)\int_0^t g(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{ds}\right]_{x=0}^{x=1} \\ & + \int_0^1 \psi_x(t)\int_0^t g(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{dsdx}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} -\frac{\rho_1}{\kappa}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_0^1 \varphi_t\int_0^t g(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{dsdx}\right) =& -\int_0^1 \left(\left(\varphi_x+\psi\right)_x - \frac{1}{\kappa}\theta_x\right)\int_0^t g(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{dsdx} \\ & - g(0)\frac{\rho_1}{\kappa}\int_0^1 \varphi_t\psi_x\mathrm{dx} - \frac{\rho_1}{\kappa}\int_0^1 \varphi_t\int_0^t g'(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{ds}\,\mathrm{dx}, \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
I_3'(t) =&\alpha \left[\varphi_x\psi_x\right]_{x=0}^{x=1} - \alpha\int_0^1 \varphi_x\psi_{xx}\mathrm{dx} + \alpha\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} - \frac{\alpha}{\kappa}\int_0^1 \psi_x\theta_x\mathrm{dx} + \frac{\rho_1\alpha}{\kappa}\int_0^1 \varphi_t\psi_{xt}\mathrm{dx}\\
&-\int_0^1 \rho_2\psi_{xt}\varphi_t\mathrm{dx} + \rho_2\int_0^1 \psi_t^2\mathrm{dx} + \alpha\int_0^1 \psi_{xx}\varphi_x\mathrm{dx} - \alpha\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx}\\
&-\kappa\int_0^1 \left(\varphi_x+\psi\right)^2\mathrm{dx} + \int_0^1 \theta\left(\varphi_x+\psi\right)\mathrm{dx} + \int_0^1\int_0^t g(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{ds}\varphi_{xx}(t)\mathrm{dx}\\
&-\left[\int_0^t g(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{ds}\varphi_x(t)\right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1\int_0^t g(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{ds}\psi_x(t)\mathrm{dx}\\
&-\int_0^1 \left(\left(\varphi_x+\psi\right)_x - \frac{1}{\kappa}\theta_x\right)\int_0^t g(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{dsdx}\\
&-g(0)\frac{\rho_1}{\kappa}\int_0^1 \varphi_t\psi_x(x,t)\mathrm{dx} - \frac{\rho_1}{\kappa}\int_0^1 \varphi_t\int_0^t g'(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{dsdx}.
\end{aligned}
$$

Pour estimer les termes au bords nous procédons comme suit : en utilisant les inégalités de Young et Poincaré, on a

$$
\begin{aligned}
&\left[\int_0^t \varphi_x(t)g(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{ds}\right]_{x=0}^{x=1}\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\left(\varphi_x^2(1,t)+\varphi_x^2(0,t)\right) + \frac{1}{2\varepsilon}\left(\alpha\psi_x(1,t) - \int_0^t g(t-s)\psi_x(1,s)\mathrm{ds}\right)^2\\
&+\frac{1}{2\varepsilon}\left(\alpha\psi_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)\psi_x(0,s)\mathrm{ds}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^1 \theta\left(\varphi_x+\psi\right)\mathrm{dx} \leq \varepsilon c\int_0^1 \left(\varphi_x+\psi\right)^2\mathrm{dx} + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx},
$$

$$
-\frac{\alpha}{\kappa}\int_0^1 \psi_x\theta_x\mathrm{dx} \leq \varepsilon\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx},
$$

aussi

$$
-g(0)\frac{\rho_1}{\kappa}\int_0^1 \varphi_t\psi_x(x,t)\mathrm{dx} \leq \varepsilon\int_0^1 \varphi_t^2\mathrm{dx} + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx},
$$

$$
\frac{1}{\kappa}\int_0^1 \theta_x\int_0^t g(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{dsdx} \leq \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx} + \varepsilon\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} + \varepsilon g\circ\psi_x.
$$

Enfin

$$
-\frac{\rho_1}{\kappa}\int_0^1 \varphi_t\int_0^t g'(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{dsdx} \leq \varepsilon\int_0^1 \varphi_t^2\mathrm{dx} + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} - \frac{c}{\varepsilon}g'\circ\psi_x.
$$

Donc, le résultat du lemme s'ensuit immédiatement. □

Lemme 2.18. *Soit (φ,ψ,θ) la solution forte du système (2.3), alors les fonctionnelles*

$$
I_4(t) := \rho_2\int_0^1 M(x)\psi_t\left(\alpha\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx},
$$

et

$$
I_5(t) := \rho_1\int_0^1 M(x)\varphi_t\varphi_x\mathrm{dx},
$$

satisfont, pour tout $\varepsilon>0$

$$
\begin{aligned}
I_4'(t) \leq\ & -\left(\alpha\psi_x(1,t) - \int_0^t g(t-s)\psi_x(1,s)\mathrm{ds}\right)^2 - \left(\alpha\psi_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)\psi_x(0,s)\mathrm{ds}\right)^2\\
&+\varepsilon\kappa\int_0^1 \left(\varphi_x+\psi\right)^2\mathrm{dx} + c\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\int_0^1 \varphi_x^2\mathrm{dx} + g_0(t)g\circ\psi_x\right)\\
&+c\int_0^1 \left(\psi_t^2+\theta_x^2\right)\mathrm{dx} - cg'\circ\psi_x,
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

et

$$I_5'(t) \le -\kappa\left(\varphi_x^2(1,t)+\varphi_x^2(0,t)\right)+c\int_0^1\left(\varphi_t^2+\varphi_x^2+\psi_x^2+\theta_x^2\right)\mathrm{dx}. \tag{2.26}$$

Preuve . En dérivant $I_4(t)$ et en utilisant une système (2.3) et eq. (2.11), on arrive à :

$$\begin{aligned}
I_4'(t) =& \int_0^1 M(x)\left(\alpha\psi_{xx}-\int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)\mathrm{ds}-\kappa\left(\varphi_x+\psi\right)+\theta\right)\\
&\times\left(\alpha\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx}+\rho_2\int_0^1 M(x)\psi_t\\
&\times\left(\alpha\psi_{xt}+\psi_x(t)\int_0^t g'(t-s)\mathrm{ds}-g(t)\psi_x(t)-\int_0^t g'(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx}\\
=&-\left(\alpha\psi_x(1,t)\mathrm{dx}-\int_0^t g(t-s)\psi_x(1,s)\mathrm{ds}\right)^2-\left(\alpha\psi_x(0,t)\mathrm{dx}-\int_0^t g(t-s)\psi_x(0,s)\mathrm{ds}\right)^2\\
&+2\int_0^1\left(\alpha\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}+2\rho_2\alpha\int_0^1\psi_t^2\mathrm{dx}\\
&-\kappa\int_0^1 M(x)\left(\alpha\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\left(\varphi_x+\psi\right)\mathrm{dx}\\
&+\int_0^1 M(x)\theta\left(\alpha\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx}\\
&+\rho_2\int_0^1 M(x)\psi_t\int_0^t g'(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{dsdx}-\rho_2 g(t)\int_0^1 M(x)\psi_t\psi_x\mathrm{dx}
\end{aligned}$$

En utilisant les lemmes 2.14, 2.3, les inégalités $(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2$, Young et Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}
&2\int_0^1\left(\alpha\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}\\
&=2\int_0^1\left(\left(\alpha-\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\psi_x+\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}\\
&\le 4\left(\alpha-\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)^2\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}+4\int_0^1\left(\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}\\
&\le c\left(\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}+g_0(t)g\circ\psi_x\right),
\end{aligned}$$

telle que $c=\max\left\{4\left(\alpha-\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)^2,4\right\}$.

Aussi,

$$\begin{aligned}
-\kappa&\int_0^1 M(x)\left(\alpha\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\left(\varphi_x+\psi\right)\mathrm{dx}\\
&\le\varepsilon\kappa\int_0^1\left(\varphi_x+\psi\right)^2\mathrm{dx}+\frac{\kappa}{4\varepsilon}\int_0^1\left(\alpha\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}\\
&\le\varepsilon\kappa\int_0^1\left(\varphi_x+\psi\right)^2\mathrm{dx}+\frac{\kappa\alpha^2}{4\varepsilon}\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}+\frac{\kappa}{4\varepsilon}g_0(t)g\circ\psi_x,
\end{aligned}$$

et,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 M(x)\theta\left(\alpha\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx}\\
&\quad\leq \varepsilon\int_0^1 (M(x)\theta)^2\,\mathrm{dx}+\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1\left(\alpha\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}\\
&\quad\leq 16\varepsilon\int_0^1\theta_x^2\mathrm{dx}+\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1\left(\alpha\psi_x-\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)^2\mathrm{dx}\\
&\quad\leq 16\varepsilon\int_0^1\theta_x^2\mathrm{dx}+\frac{c}{\varepsilon}\left(\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}+g_0(t)g\circ\psi_x\right).
\end{aligned}
$$

Finalement,

$$
\begin{aligned}
&\rho_2\int_0^1 M(x)\psi_t\int_0^t g'(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{ds}dx-\rho_2 g(t)\int_0^1 M(x)\psi_t\psi_x dx\\
&\leq c\int_0^1\left(\psi_t^2+\psi_x^2\right)\mathrm{dx}-cg'\circ\psi_x.
\end{aligned}
$$

Une combinaison de toutes les estimations ci-dessus conduit à (2.25). Pour prouver (2.26), nous différencions I_5 pour obtenir

$$
\begin{aligned}
I_5'(t)=&\int_0^1 M(x)\left(\kappa\left(\varphi_x+\psi\right)_x-\theta_x\right)\varphi_x\mathrm{dx}+\rho_1\int_0^1 M(x)\varphi_t\varphi_{xt}\mathrm{dx}\\
=&\frac{\kappa}{2}\left[M(x)\varphi_x^2(x)\right]_0^1+2\kappa\int_0^1\varphi_x^2(x)\mathrm{dx}+2\rho_1\kappa\int_0^1\varphi_t^2\mathrm{dx}\\
&+\kappa\int_0^1 M(x)\psi_x\varphi_x\mathrm{dx}-\kappa\int_0^1 M(x)\theta_x\varphi_x\mathrm{dx},
\end{aligned}
$$

enfin, on applique encore l'inégalité de Young, pour les deux dernières intégrales, on obtient l'estimation (2.26). □

Lemme 2.19. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, la fonctionnelle*

$$
I_6:=I_3+\frac{1}{2\varepsilon}I_4+\frac{\varepsilon}{2\kappa}I_5,
$$

satisfait, pour tout $0<\varepsilon<1$*, l'estimation suivante :*

$$
\begin{aligned}
I_6'(t)\leq\ &-\left(\frac{\kappa}{2}-\varepsilon c\right)\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx}+\frac{c}{\varepsilon}\int_0^1\left(\psi_t^2+\theta_x^2\right)\mathrm{dx}+c\varepsilon\int_0^1\varphi_t^2\mathrm{dx}+\frac{c}{\varepsilon^2}\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}\\
&+\frac{c}{\varepsilon^2}g_0(t)g\circ\psi_x-\frac{c}{\varepsilon}g'\circ\psi_x+\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa}-\rho_2\right)\int_0^1\varphi_t\psi_{xt}\mathrm{dx}.
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Preuve . D'après de (2.24) à (2.26) et utilisation de (2.15), on a

$$
\begin{aligned}
I_6'(t)\leq&\frac{1}{2\varepsilon}\left(\alpha\psi_x(1,t)-\int_0^t g(t-s)\psi_x(1,s)\mathrm{ds}\right)^2\\
&+\frac{1}{2\varepsilon}\left(\alpha\psi_x(0,t)-\int_0^t g(t-s)\psi_x(0,s)\mathrm{ds}\right)^2+\frac{\varepsilon}{2}\left(\varphi_x^2(1,t)+\varphi_x^2(0,t)\right)\\
&+\rho_2\int_0^1\psi_t^2\mathrm{dx}-\kappa(1-\varepsilon c)\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx}+\varepsilon\int_0^1\varphi_t^2\mathrm{dx}+\frac{c}{\varepsilon}\int_0^1\theta_x^2\mathrm{dx}\\
&+\frac{c}{\varepsilon}\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}+\varepsilon g\circ\psi_x-\frac{c}{\varepsilon}g'\circ\psi_x+\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa}-\rho_2\right)\int_0^1\varphi_t\psi_{xt}\mathrm{dx}\\
&-\frac{1}{2\varepsilon}\left(\alpha\psi_x(1,t)-\int_0^t g(t-s)\psi_x(1,s)\mathrm{ds}\right)^2-\frac{1}{2\varepsilon}\left(\alpha\psi_x(0,t)-\int_0^t g(t-s)\psi_x(0,s)\mathrm{ds}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\kappa\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx}+\frac{c}{2\varepsilon}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\int_0^1\varphi_x^2\mathrm{dx}+g_0(t)g\circ\psi_x\right)\\
&+\frac{c}{2\varepsilon}\int_0^1\left(\psi_t^2+\theta_x^2\right)\mathrm{dx}-\frac{c}{2\varepsilon}g'\circ\psi_x\\
&-\frac{\varepsilon}{2}\left(\varphi_x^2(1,t)+\varphi_x^2(0,t)\right)+\frac{c\varepsilon}{2\kappa}\int_0^1\left(\varphi_t^2+\varphi_x^2+\psi_x^2+\theta_x^2\right)\mathrm{dx}\\
\leq&-\left(\frac{\kappa}{2}-\varepsilon c\right)\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx}+\frac{c}{\varepsilon}\int_0^1\left(\psi_t^2+\theta_x^2\right)\mathrm{dx}+c\varepsilon\int_0^1\varphi_t^2\mathrm{dx}+\frac{c}{\varepsilon^2}\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}\\
&+\frac{c}{\varepsilon^2}g_0(t)g\circ\psi_x-\frac{c}{\varepsilon}g'\circ\psi_x+\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa}-\rho_2\right)\int_0^1\varphi_t\psi_{xt}\mathrm{dx}.
\end{aligned}
$$

□

Lemme 2.20. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, la fonctionnelle* K_1 *définie par :*

$$K_1:=I_6+\frac{1}{16}I_2,$$

satisfait, pour tout $\varepsilon>0$ *assez petite, l'estimation :*

$$
\begin{aligned}
K_1'\leq\ &-\frac{\kappa}{4}\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx}-\frac{\rho_1}{32}\int_0^1\varphi_t^2\mathrm{dx}+c\left(\int_0^1\psi_t^2\mathrm{dx}+\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}+\int_0^1\theta_x^2\mathrm{dx}\right)\\
&+c\left(g_0(t)g\circ\psi_x-g'\circ\psi_x\right)+\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa}-\rho_2\right)\int_0^1\varphi_t\psi_{xt}\mathrm{dx}.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Preuve . En exploitant (2.23) et (2.27), on arrive à

$$
\begin{aligned}
K_1'\leq&-\left(\frac{3\kappa}{8}-\varepsilon c\right)\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx}-\left(\frac{\rho_1}{16}-c\varepsilon\right)\int_0^1\varphi_t^2\mathrm{dx}+\left(\frac{c}{\varepsilon^2}+c\right)\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}\\
&+\left(\frac{c}{\varepsilon^2}+c\right)g_0(t)g\circ\psi_x-\frac{c_0}{\varepsilon}g'\circ\psi_x+\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa}-\rho_2\right)\int_0^1\varphi_t\psi_{xt}\mathrm{dx}\\
&+\left(\frac{c}{\varepsilon}-\frac{\rho_2}{16}\right)\int_0^1\psi_t^2\mathrm{dx}+\left(c+\frac{c}{\varepsilon}\right)\int_0^1\theta_x^2\mathrm{dx}.
\end{aligned}
$$

En choisissant ε assez petit pour que

$$\frac{3\kappa}{8}-\varepsilon c\geq\frac{\kappa}{4},\quad\frac{\rho_1}{16}-c\varepsilon\geq\frac{\rho_1}{32},\quad\frac{c}{\varepsilon}-\frac{\rho_2}{16}\geq 0,$$

on obtient (2.28). □

Maintenant, on fait rappel de la fonction ω définie ci-dessus et lemme 2.12, et les inégalités

$$\int_0^1\omega_x^2\mathrm{dx}\leq 4\int_0^1\psi^2\mathrm{dx}\qquad\int_0^1\omega_t^2\mathrm{dx}\leq 4\int_0^1\psi_t^2\mathrm{dx}.\tag{2.29}$$

Lemme 2.21. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, la fonctionnelle*

$$K_2(t):=\int_0^1\left(\rho_2\psi\psi_t+\rho_1\omega\varphi_t\right)\mathrm{dx}$$

satisfait,

$$K_2'(t)\leq-\frac{\ell}{2}\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}+\frac{c}{\varepsilon}\int_0^1\psi_t^2\mathrm{dx}+\varepsilon\int_0^1\varphi_t^2\mathrm{dx}+cg_0(t)g\circ\psi_x+\frac{1}{\ell}\int_0^1\theta_x^2\mathrm{dx}.\tag{2.30}$$

Preuve . En dérivant $K_2(t)$ et en utilisant (2.3) on arrive à :

$$\begin{aligned}
K_2'(t) =& \int_0^1 \left(\rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 \omega_t \varphi_t\right) \mathrm{dx} + \int_0^1 \omega \left(\kappa \left(\varphi_x + \psi\right)_x - \theta_x\right) \mathrm{dx} \\
&+ \int_0^1 \psi \left(\alpha \psi_{xx} - \kappa \left(\varphi_x + \psi\right) + \theta - \int_0^t g(t-s) \psi_{xx}(x,s) \mathrm{ds}\right) \mathrm{dx} \\
=& \int_0^1 \left(\rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 \omega_t \varphi_t\right) \mathrm{dx} - \alpha \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} + \int_0^1 \psi \theta \mathrm{dx} \\
&+ \int_0^1 \psi_x \int_0^t g(t-s) \psi_x(x,s) \mathrm{dsdx} - \kappa \int_0^1 \left(\omega_x + \psi\right)\left(\varphi_x + \psi\right) \mathrm{dx} - \int_0^1 \omega \theta_x \mathrm{dx} \\
=& \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 \mathrm{dx} + \rho_1 \int_0^1 \omega_t \varphi_t \mathrm{dx} - \kappa \int_0^1 \left(\omega_x + \psi\right)\left(\varphi_x + \psi\right) \mathrm{dx} + \int_0^1 \left(\omega_x + \psi\right) \theta \mathrm{dx} \\
&- \left(\alpha - \int_0^t g(s) \mathrm{ds}\right) \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} + \int_0^1 \psi_x \int_0^t g(t-s) \left(\psi_x(s) - \psi_x(t)\right) \mathrm{dsdx}.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\omega_x + \psi = \int_0^1 \psi(y,t) \mathrm{dy},$$

donne

$$-\kappa \int_0^1 \left(\omega_x + \psi\right)\left(\varphi_x + \psi\right) \mathrm{dx} = -\kappa \left(\int_0^1 \psi(y,t) \mathrm{dy}\right)^2 \leq 0$$

$$-\left(\alpha - \int_0^t g(s) \mathrm{ds}\right) \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} \leq -\ell \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx}.$$

En utilisant les inégalités de Young et Poincaré et (2.29), on a

$$\rho_1 \int_0^1 \omega_t \varphi_t \mathrm{dx} \leq \varepsilon \int_0^1 \varphi_t^2 \mathrm{dx} + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^1 \psi_t^2 \mathrm{dx}$$

$$\int_0^1 \left(\omega_x + \psi\right) \theta \mathrm{dx} = \left(\int_0^1 \psi(y,t) \mathrm{dy}\right) \int_0^1 \theta \mathrm{dx} \leq \frac{\ell}{4} \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} + \frac{1}{\ell} \int_0^1 \theta_x^2 \mathrm{dx},$$

et

$$\int_0^1 \psi_x \int_0^t g(t-s) \left(\psi_x(s) - \psi_x(t)\right) \mathrm{dsdx} \leq \frac{\ell}{4} \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} + c g_0(t) g \circ \psi_x.$$

La combinaison de toutes les estimations ci-dessus, (2.30) est établie. □

Notons que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t g(t-s) \psi_{xx}(s) \mathrm{ds}\right) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t g(s) \psi_{xx}(t-s) \mathrm{ds} \\
&= g(t) \psi_{0xx}(x) + \int_0^t g(s) \psi_{xxt}(t-s) \mathrm{ds}.
\end{aligned}$$

Pour calculer l'énergie de second ordre du système (2.3), on différentie les équations du système par rapport à t, on obtient

$$\begin{cases}
\rho_1 \varphi_{ttt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_{xt} + \theta_{tx} = 0 & dans \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+, \\
\rho_2 \psi_{ttt} - \alpha \psi_{txx} + \kappa(\varphi_{tx} + \psi_t) - \theta_t + g(t) \psi_{0xx}(x) & \\
\qquad\qquad + \int_0^t g(t-s) \psi_{xxt}(x,s) \mathrm{ds} = 0 & dans \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+, \\
\rho_3 \theta_{tt} - \kappa \theta_{txx} + \varphi_{xtt} + \psi_{tt} = 0 & dans \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+, \\
\varphi_t(0,t) = \varphi_t(1,t) = \psi_t(0,t) = \psi_t(1,t) = \theta_t(0,t) = \theta_t(1,t) = 0 & t \geqslant 0.
\end{cases} \tag{2.31}$$

Alors, l'énergie de second ordre est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_*(t) =&\frac{1}{2}g \circ \psi_{xt} + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\alpha - \int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\psi_{xt}^2(t)\mathrm{dx}\\ &+ \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\rho_1\varphi_{tt}^2 + \rho_2\psi_{tt}^2 + \rho_3\theta_t^2 + \kappa\left(\varphi_{xt} + \psi_t\right)^2\right]\mathrm{dx}.\end{aligned}$$

Lemme 2.22. *Soit* $\psi \in C^2\left(\mathbb{R}_+; \mathrm{H}_0^1(0,1)\right)$ *et* g *satisfait* (H1), *alors*

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \psi_{tt}(t)\int_0^t g(t-s)\psi_{xxt}(s)\mathrm{dsdx}\\ &\quad= -\frac{1}{2}g' \circ \psi_{xt} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[g \circ \psi_{xt} - \left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\int_0^1 \psi_{xt}^2(t)\mathrm{dx}\right] + \frac{1}{2}g(t)\int_0^1 \psi_{xt}^2(t)\mathrm{dx}\end{aligned}$$

Preuve . En utilisant l'intégration par parties par rapport à x, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \psi_{tt}(t)\int_0^t g(t-s)\psi_{xxt}(s)\mathrm{dsdx}\\ &= -\int_0^1 \psi_{xtt}(t)\int_0^t g(t-s)\psi_{xt}(s)\mathrm{dsdx}\\ &= -\int_0^1 \psi_{xtt}(t)\int_0^t g(t-s)\left(\psi_{xt}(s) - \psi_{xt}(t)\right)\mathrm{dsdx} - \int_0^1 \psi_{xtt}(t)\int_0^t g(t-s)\psi_{xt}(t)\mathrm{dsdx}\\ &=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^t g(t-s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\psi_{xt}(s) - \psi_{xt}(t)\right)^2\mathrm{dsdx} - \frac{1}{2}\left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_0^1 \psi_{xt}^2(t)\mathrm{dx}\\ &=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_0^1\int_0^t g(t-s)\left(\psi_{xt}(s) - \psi_{xt}(t)\right)^2\mathrm{dsdx}\\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^t g'(t-s)\left(\psi_{xt}(s) - \psi_{xt}(t)\right)^2\mathrm{dsdx}\\ &\quad -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\int_0^1 \psi_{xt}^2(t)\mathrm{dx}\right) + \frac{1}{2}g(t)\int_0^1 \psi_{xt}^2(t)\mathrm{dx}\\ &=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[g \circ \psi_{xt} - \left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\int_0^1 \psi_{xt}^2(t)\mathrm{dx}\right] - \frac{1}{2}g' \circ \psi_{xt} + \frac{1}{2}g(t)\int_0^1 \psi_{xt}^2(t)\mathrm{dx}\end{aligned}$$

□

Lemme 2.23. *Soit* (φ, ψ, θ) *la solution forte de (2.3), alors l'énergie* $E_*(t)$ *satisfait, pour tout* $t \geq 0$

$$E_*'(t) \leq \frac{1}{2}g' \circ \psi_{xt} - g(t)\int_0^1 \psi_{tt}\psi_{0xx}(x)\mathrm{dx}. \tag{2.32}$$

et

$$E_*(t) \leq M, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.33}$$

Preuve . En dérivant $\mathrm{E}(t)$, et en utilisant lemme 2.22 on aura

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_*(t) = \frac{\mathrm{dE}(t)}{\mathrm{dt}} &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\int_0^1 \left[\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_3\theta^2 + \left(\alpha - \int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\psi_x^2 + \kappa\left(\varphi_x + \psi\right)^2\right]\mathrm{dx} + \frac{1}{2}g \circ \psi_x\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\rho_1\varphi_{tt}^2 + \rho_2\psi_{tt}^2 + \rho_3\theta_t^2 + + \left(\alpha - \int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\psi_{xt}^2(t) + \kappa\left(\varphi_{xt} + \psi_t\right)^2\right]\mathrm{dx} + \frac{1}{2}g \circ \psi_{xt},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_*'(t) &= -k\int_0^1 \theta_{xt}^2\mathrm{dx} + \frac{1}{2}g' \circ \psi_{xt} - g(t)\int_0^1 \psi_{tt}\psi_{0xx}(x)\mathrm{dx} - \frac{1}{2}g(t)\int_0^1 \psi_{xt}^2(t)\mathrm{dx}\\ &\leq \frac{1}{2}g' \circ \psi_{xt} - g(t)\int_0^1 \psi_{tt}\psi_{0xx}(x)\mathrm{dx} \leq 0.\end{aligned}$$

Pour montrer (2.33), on utilisent

$$\frac{1}{2}g(t)\int_0^1\left(\sqrt{\rho_2}\psi_{tt}+\frac{1}{\sqrt{\rho_2}}\psi_{0xx}\right)^2\mathrm{dx}\geq 0,\quad \forall t\geq 0,$$

alors

$$\frac{1}{2}g(t)\int_0^1\left(\rho_2\psi_{tt}^2+\frac{1}{\rho_2}\psi_{0xx}^2\right)\mathrm{dx}\geq -g(t)\int_0^1\psi_{tt}\psi_{0xx}(x)\mathrm{dx}.$$

Ainsi,

$$E_*'(t)\leq\frac{1}{2}g(t)\int_0^1\left(\rho_2\psi_{tt}^2+\frac{1}{\rho_2}\psi_{0xx}^2\right)\mathrm{dx}\leq g(t)E_*(t)+\frac{1}{2\rho_2}g(t)\int_0^1\psi_{0xx}^2\mathrm{dx}.$$

Donc

$$\left(E_*'(t)-g(t)E_*(t)\right)e^{-\int_0^t g(s)\mathrm{ds}}\leq\frac{e^{-\int_0^t g(s)\mathrm{ds}}}{2\rho_2}g(t)\int_0^1\psi_{0xx}^2\mathrm{dx},$$

ce qui implique que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(E_*(t)e^{-\int_0^t g(s)\mathrm{ds}}\right)\leq\frac{1}{2\rho_2}g(t)\int_0^1\psi_{0xx}^2\mathrm{dx}.$$

Une intégration simple donne

$$E_*(t)e^{-\int_0^t g(s)\mathrm{ds}}-E_*(0)\leq\frac{1}{2\rho_2}\left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\int_0^1\psi_{0xx}^2\mathrm{dx}.$$

Puis,

$$E_*(t)e^{-\int_0^\infty g(s)\mathrm{ds}}\leq E_*(t)e^{-\int_0^t g(s)\mathrm{ds}}\leq E_*(0)+\frac{1}{2\rho_2}(\alpha-\ell)\int_0^1\psi_{0xx}^2\mathrm{dx},$$

ce qui donne (2.33). □

Soit $t_0>0$, et on pose $g_1=\displaystyle\int_0^{t_0}g(s)ds$. Pour $N_1,N_2,N_3>0$ qui seront determinées ultérieurement, on définie la fonctionnelle de Lyapunov par :

$$\mathcal{L}(t):=N_1\left(\mathrm{E}(t)+\mathrm{E}_*(t)\right)+N_2I_1(t)+N_3K_2(t)+K_1(t).$$

Rappelons que

$$\mathrm{E}'(t)\leq -k\int_0^1\theta_x^2\mathrm{dx}+\frac{1}{2}g'\circ\psi_x,\qquad E_*'(t)\leq -g(t)\int_0^1\psi_{tt}\psi_{0xx}(x)\mathrm{dx}.$$

En outre, en choisissant N_1 encore assez grand, on obtient

$$\mathcal{L}(t)\sim\left(\mathrm{E}(t)+\mathrm{E}_*(t)\right).$$

Et d'après (2.22), (2.28) et (2.30), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(t)\leq & N_1\left(-k\int_0^1\theta_x^2\mathrm{dx}+\frac{1}{2}g'\circ\psi_x-g(t)\int_0^1\psi_{tt}\psi_{0xx}(x)\mathrm{dx}\right)\\ &+N_2\left(-\left(\rho_2\int_0^t g(s)\mathrm{ds}-\delta\right)\int_0^1\psi_t^2\mathrm{dx}+\delta\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2\mathrm{dx}+\delta c_0\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}\right.\\ &\left.+\delta\int_0^1\theta_x^2\mathrm{dx}-c_\delta g'\circ\psi_x+c_\delta g_0(t)g\circ\psi_x.\right)\\ &+N_3\left(-\frac{\ell}{2}\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}+\frac{c}{\varepsilon}\int_0^1\psi_t^2\mathrm{dx}+\varepsilon\int_0^1\varphi_t^2\mathrm{dx}+cg_0(t)g\circ\psi_x+\frac{1}{\ell}\int_0^1\theta_x^2\mathrm{dx}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{3\kappa}{8}-\varepsilon c\right)\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx}-\left(\frac{\rho_1}{16}-c\varepsilon\right)\int_0^1\varphi_t^2\mathrm{dx}+\left(\frac{c}{\varepsilon^2}+c\right)\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}\\
&+\left(\frac{c}{\varepsilon^2}+c\right)g_0(t)g\circ\psi_x-\frac{c_0}{\varepsilon}g'\circ\psi_x+\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa}-\rho_2\right)\int_0^1\varphi_t\psi_{xt}\mathrm{dx}\\
&+\left(\frac{c}{\varepsilon}-\frac{\rho_2}{16}\right)\int_0^1\psi_t^2\mathrm{dx}+\left(c+\frac{c}{\varepsilon}\right)\int_0^1\theta_x^2\mathrm{dx}\\
\leq&-\left(\frac{\ell N_3}{2}-\delta N_2-c\right)\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}-\left(\frac{\rho_1}{32}-\varepsilon N_3\right)\int_0^1\varphi_t^2\mathrm{dx}\\
&-\left(\rho_2N_2g_1-\rho_2N_2\delta-\frac{cN_3}{\varepsilon}-c\right)\int_0^1\psi_t^2\mathrm{dx}-\left(\frac{\kappa}{4}-\delta N_2\right)\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx}\\
&-\left(kN_1-\delta N_2-c-\frac{1}{\ell}\right)\int_0^1\theta_x^2\mathrm{dx}+\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa}-\rho_2\right)\int_0^1\varphi_t\psi_{xt}\mathrm{dx}\\
&+C_{N_2N_3}g_0(t)g\circ\psi_x+\left(\frac{N_1}{2}-N_2c_\delta-c\right)g'\circ\psi_x-N_1g(t)\int_0^1\psi_{tt}\psi_{0xx}(x)\mathrm{dx}.
\end{aligned}
$$

En prenant $\delta=\dfrac{\kappa}{8N_2}$, on arrive à

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t)\leq&-\left(\frac{\ell N_3}{2}-\left(\frac{\kappa}{8}+c\right)\right)\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}-\left(\frac{\rho_1}{32}-\varepsilon N_3\right)\int_0^1\varphi_t^2\mathrm{dx}\\
&-\left(\rho_2N_2g_1-\frac{cN_3}{\varepsilon}-\left(\frac{\kappa\rho_2}{8}+c\right)\right)\int_0^1\psi_t^2\mathrm{dx}-\frac{\kappa}{8}\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx}\\
&-\left(kN_1-\frac{\kappa}{8}-c-\frac{1}{\ell}\right)\int_0^1\theta_x^2\mathrm{dx}+\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa}-\rho_2\right)\int_0^1\varphi_t\psi_{xt}\mathrm{dx}\\
&+C_{N_2N_3}g_0(t)g\circ\psi_x+\left(\frac{N_1}{2}-N_2c_\delta-c\right)g'\circ\psi_x-N_1g(t)\int_0^1\psi_{tt}\psi_{0xx}(x)\mathrm{dx},
\end{aligned}
$$

pour tout $t\geq t_0$. On choisit N_3 assez grand telle que $\dfrac{\ell N_3}{2}-\left(\dfrac{\kappa}{8}+c\right)>0$, alors on choisit $\varepsilon<\dfrac{\rho_1}{32N_3}$ obtenir $\dfrac{\rho_1}{32}-\varepsilon N_3>0$. Ensuite, on choisit N_2 assez grand telle que
$\rho_2N_2g_1-\dfrac{cN_3}{\varepsilon}-c>0$.
Par conséquent, on a pour tout $t\geq t_0$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t)\quad&\leq -c\left(\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}+\int_0^1\varphi_t^2\mathrm{dx}+\int_0^1\psi_t^2\mathrm{dx}+\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2\,\mathrm{dx}\right)\\
&-\left(kN_1-c-\frac{1}{\ell}\right)\int_0^1\theta_x^2\mathrm{dx}+cg_0(t)g\circ\psi_x+\left(\frac{N_1}{2}-c\right)g'\circ\psi_x\\
&+\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa}-\rho_2\right)\int_0^1\varphi_t\psi_{xt}\mathrm{dx}-N_1g(t)\int_0^1\psi_{tt}\psi_{0xx}(x)\mathrm{dx}.
\end{aligned}\tag{2.34}
$$

Pour estimer le terme $\left(\dfrac{\alpha\rho_1}{\kappa}-\rho_2\right)\displaystyle\int_0^1\varphi_t\psi_{xt}dx$ nous prouvons le lemme suivant :

Lemme 2.24. *Soit (φ,ψ,θ) est une solution forte de (2.3), alors pour toute $\varepsilon>0$ et $t\geq t_0$, on a*

$$
\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa}-\rho_2\right)\int_0^1\varphi_t\psi_{xt}\mathrm{dx}\leq\varepsilon\int_0^1\varphi_t^2\mathrm{dx}+\frac{c}{\varepsilon}\left(g_0(t)g\circ\psi_{xt}-g'\circ\psi_x\right)+\frac{c}{\varepsilon}\mathrm{E}(0)g(t).\tag{2.35}
$$

Preuve . On a, pour tout $t \geq t_0$,

$$\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa} - \rho_2\right) \int_0^1 \varphi_t \psi_{xt} \mathrm{dx} = \frac{\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa} - \rho_2\right)}{\displaystyle\int_0^t g(s)\mathrm{ds}} \int_0^1 \varphi_t \int_0^t g(t-s)\psi_{xt}(s)\mathrm{dsdx}$$
$$+ \frac{\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa} - \rho_2\right)}{\displaystyle\int_0^t g(s)\mathrm{ds}} \int_0^1 \varphi_t \int_0^t g(t-s)\left(\psi_{xt}(t) - \psi_{xt}(s)\right)\mathrm{dsdx}.$$

En utilisant le inégalité de Young, le fait que

$$\frac{\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa} - \rho_2\right)}{\displaystyle\int_0^t g(s)\mathrm{ds}} \leq \frac{1}{g_1}\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa} - \rho_2\right)$$

et lemme 2.14 (pour ψ_{xt}) on obtient, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa} - \rho_2\right)}{\displaystyle\int_0^t g(s)\mathrm{ds}} \int_0^1 \varphi_t \int_0^t g(t-s)\left(\psi_{xt}(t) - \psi_{xt}(s)\right)\mathrm{dsdx} \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 \varphi_t^2 \mathrm{dx} + \frac{c}{\varepsilon} g_0(t) g \circ \psi_{xt} \tag{2.36}$$

D'autre part, en intégrant par parties par rapport à t, en utilisant l'inégalité de Young et le fait que $\left(\psi_x(t) - \psi_{0x}\right)^2 \leq 2\psi_x^2(t) + 2\psi_{0x}^2$,on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa} - \rho_2\right)}{\displaystyle\int_0^t g(s)\mathrm{ds}} \int_0^1 \varphi_t \int_0^t g(t-s)\psi_{xt}(s)\mathrm{dsdx} \\
=&\frac{\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa} - \rho_2\right)}{\displaystyle\int_0^t g(s)\mathrm{ds}} \int_0^1 \varphi_t \left(g(0)\psi_x(t) - g(t)\psi_{0x} + \int_0^t g'(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx} \\
=&\frac{\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa} - \rho_2\right)}{\displaystyle\int_0^t g(s)\mathrm{ds}} \int_0^1 \varphi_t \left(g(t)\psi_x(t) - g(t)\psi_{0x} - \int_0^t g'(t-s)\left(\psi_x(t) - \psi_x(s)\right)\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx} \\
\leq&\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 \varphi_t^2 \mathrm{dx} + \frac{c}{\varepsilon} g^2(t) \int_0^1 \left(\psi_x^2(t) + \psi_{0x}^2\right)\mathrm{dx} - \frac{c}{\varepsilon} g' \circ \psi_x.
\end{aligned}$$

En notant que $\displaystyle\int_0^1 \psi_x^2(t)\mathrm{dx} \leq \frac{1}{\ell}E(t) \leq cE(0)$, $\forall t \geq 0$ et en utilisant le fait que g est bornée, la dernière inégalité donne

$$\frac{\left(\frac{\alpha\rho_1}{\kappa} - \rho_2\right)}{\displaystyle\int_0^t g(s)\mathrm{ds}} \int_0^1 \varphi_t \int_0^t g(t-s)\psi_{xt}(s)\mathrm{dsdx} \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 \varphi_t^2 \mathrm{dx} + \frac{c}{\varepsilon} g(t) E(0) - \frac{c}{\varepsilon} g' \circ \psi_x \tag{2.37}$$

Une combinaison de tout ce qui précède conduit à (2.35). $\square$

Lemme 2.25. *Soit (φ, ψ, θ) la solution forte de (2.3), alors pour toute $\varepsilon > 0$ et $t \geq t_0$, on a*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq \ & -c\left(\int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} + \int_0^1 \varphi_t^2 \mathrm{dx} + \int_0^1 \psi_t^2 \mathrm{dx} + \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right)^2 \mathrm{dx} + \int_0^1 \theta_x^2 \mathrm{dx}\right) \\
& + c g_0(t)\left(g \circ \psi_x + g \circ \psi_{txx}\right) + c g(t)\left(E(0) + E_*(0) + \int_0^1 \psi_{0xx}^2 \mathrm{dx}\right)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Preuve . Les inégalités de Young et (2.33) implique que

$$-\int_0^1 \psi_{tt}\psi_{0xx}\mathrm{dx} \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\psi_{tt}^2+\psi_{0xx}^2\right)\mathrm{dx} \leq c. \tag{2.39}$$

Puis on insère (2.35) et (2.39) dans (2.34) pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(t) \leq &-c\left(\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx}+\int_0^1 \varphi_t^2\mathrm{dx}+\int_0^1 \psi_t^2\mathrm{dx}+\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\mathrm{dx}\right)\\ &-\left(kN_1-c-\frac{1}{\ell}\right)\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{dx}+\varepsilon\int_0^1 \varphi_t^2\mathrm{dx}+cg_0(t)g\circ\psi_x\\ &+\left(\frac{N_1}{2}-\frac{c}{\varepsilon}-c\right)g'\circ\psi_x+\frac{c}{\varepsilon}g_0(t)g\circ\psi_{xt}+\frac{c}{\varepsilon}g(t)+N_1cg(t).\end{aligned}$$

On choisit ε assez petit et N_1 assez grand pour que

$$kN_1-c-\frac{1}{\ell}>0,\ \frac{N_1}{2}-\frac{c}{\varepsilon}-c>0,$$

$$\mathcal{L}(t)\geq cE(t),$$

ainsi, on obtient (2.38). Par conséquent, (2.38) devient

$$\mathcal{L}'(t)\leq -cE(t)+c\left[(1+g_0(t))\,g\circ\psi_x+g_0(t)g\circ\psi_{xt}\right]+cg(t), \quad \forall t\geq t_0. \tag{2.40}$$

Rappelant (H1), (H2), on peut facilement voir que

$$\xi(t)g\circ\psi_x(t)\leq -g'\circ\psi_x, \qquad \xi(t)g\circ\psi_{xt}(t)\leq -g'\circ\psi_{xt}.$$

Par conséquent, en multipliant (2.40) par $\xi(t)$, on obtient

$$\xi(t)E(t)\leq -c\xi(t)\mathcal{L}'(t)-c\left[(1+g_0(t))\,g'\circ\psi_x+g_0(t)g'\circ\psi_{xt}\right]+cg(t)\xi(t).$$

Intégration sur $[t_0,t]$, en utilisant (2.33), (2.32) et $2\mathrm{E}'(t)\leq g'\circ\psi_x$,
on obtient

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t \xi(s)E(s)\mathrm{ds}\leq\ & c\left(\xi(t_0)\,\mathcal{L}(t_0)-\xi(t)\mathcal{L}(t)+\int_{t_0}^t \xi'(s)\mathcal{L}(s)\mathrm{ds}\right)\\ &-c\int_{t_0}^t\left[(1+g_0(s))\,E'(s)+g_0(s)\left(E_*'(s)+g(s)\int_0^1 \psi_{tt}\psi_{0xx}(x)\mathrm{dx}\right)\right]\mathrm{ds}\\ &+c\int_{t_0}^t g(s)\xi(s)\mathrm{ds}.\end{aligned} \tag{2.41}$$

Rappelant que ξ est décroissante et (H1), on vérifie facilement que

$$\mathcal{L}(t_0)\leq c\left[E(t_0)+E_*(t_0)\right]\leq c,$$

$$\int_{t_0}^t \xi'(s)\mathcal{L}(s)\mathrm{ds}-\xi(t)\mathcal{L}(t)\leq 0,$$

$$g_0(s)\leq\int_0^\infty g(s)\mathrm{ds}=\alpha-\ell,$$

$$\int_{t_0}^t g(s)\xi(s)\mathrm{ds}\leq\xi(0)\int_0^\infty g(s)\mathrm{ds}=\xi(0)(\alpha-\ell).$$

Par conséquent, en utilisant (2.39), pour estimation (2.41) devient

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t \xi(s)\mathrm{E}(s)\mathrm{ds} &\leq c-c\int_{t_0}^t\left[E'(s)+\mathrm{E}_*'(s)\right]\mathrm{ds}+c\int_{t_0}^t g_0(s)g(s)\mathrm{ds}\\ &\leq c+\mathrm{E}(t_0)+\mathrm{E}_*(t_0)-E_*(t)+(\alpha-\ell)\int_0^\infty g(s)\mathrm{ds}\leq c.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Ainsi, rappelant que E est positif et non croissant, (2.42) on a

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(t)\int_0^t \xi(s)\mathrm{ds} \leq \int_0^t \xi(s)\mathrm{E}(s)\mathrm{ds} &= \int_0^{t_0} \xi(s)\mathrm{E}(s)\mathrm{ds} + \int_{t_0}^t \xi(s)\mathrm{E}(s)\mathrm{ds} \\ &\leq t_0\xi(0)\mathrm{E}(0) + c. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathrm{E}(t) \leq \frac{\lambda}{\int_0^t \xi(s)\mathrm{ds}} \quad \forall t \geq t_0.$$

Ce qui termine la preuve du théorème 2.2. □

Chapitre 3

Décroissance générale d'un système poreux-élastique

Les équations d'évolutions de base pour la théories unidimensionnelle des milieux poreux sont données par

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = T_x \\ \rho_2 \psi_{tt} = H_x + G \end{cases} \tag{3.1}$$

où T est le tenseur de contrainte, H le vecteur de contrainte équilibré et G la force corporelle équilibrée. Les variables φ et ψ sont le déplacement trensversal d'un point d'un matériau élastique solide et la fraction volumique, respectivement. Les équations constitutives sont :

$$\begin{cases} T = \mu\varphi_x + b\psi, \\ H = \alpha\psi_x - \displaystyle\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds}, \\ G = -b\varphi_x - \xi\psi. \end{cases} \tag{3.2}$$

En substituant (3.2) dans (3.1) on obtient

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = \mu\varphi_{xx} + b\psi_x & \textit{dans } (0,1)\times\mathbb{R}_+, \\ \rho_2\psi_{tt} = \alpha\psi_{xx} - b\varphi_x - \xi\psi - \displaystyle\int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(x,s)\mathrm{ds} & \textit{dans } (0,1)\times\mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{3.3}$$

où $\rho_1, \rho_2, \mu, b, \alpha$ sont constantes positives et vérifient $\mu\xi > b^2$. Comme le cas du système de Timoshenko, le terme $\int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(x,s)ds$ est représente le mémoire gardé par ψ au période du temps $(0,t)$ de tau g, une fonction qui vérifie les hypothèses (H1) et (H2) du Chapitre précédent. On suppose de plus que φ et ψ satisfont les conditions initiales et les conditions aux bords Neumann−Dirichlet :

$$\begin{cases} \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), & x \in [0,1]. \\ \varphi_x(0,t) = \varphi_x(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Notons que les conditions de Neumann sur φ ne nous permet pas d'appliqué l'inégalité de Poincaré ordinaire. Pour qu'on puisse la appliquée on remarque que de la première équation de (3.3) on a

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 \varphi(x,t)dx = 0, \tag{3.5}$$

ce qui donne, en résolvant (3.5) et en utilisant les conditions initiales sur φ,

$$\int_0^1 \varphi(x,t)dx = t\int_0^1 \varphi_1(x)dx + \int_0^1 \varphi_0(x)dx.$$

Par conséquent, si on pose

$$\overline{\varphi}(x,t) = \varphi(x,t) - t\int_0^1 \varphi_1(x)dx - \int_0^1 \varphi_0(x)dx,$$

$\overline{\varphi}$ satisfait (3.3) et de plus

$$\int_0^1 \overline{\varphi}(x,t)dx = 0, \quad \forall t \geq 0$$

ce qui nous permet d'utiliser l'inégalité de Poincaré sur $\overline{\varphi}$.
En outre, $(\overline{\varphi}, \psi)$ est une solution du système (3.3) avec les mêmes conditions aux bords et les conditions initiales suivantes

$$\overline{\varphi}_0(x) = \varphi_0(x) - \int_0^1 \varphi_0(x)dx \text{ et } \overline{\varphi}_1(x) = \varphi_1(x) - \int_0^1 \varphi_1(x)dx.$$

Dans ce qui suit on travaille avec $(\overline{\varphi}, \psi)$ mais on écrit (φ, ψ) pour simplifier les notation.

3.1 Décroissance générale

On désigne par $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} := \mathrm{H}_0^1(0,1) \times \mathrm{L}^2(0,1) \times \mathrm{H}_0^1(0,1) \times \mathrm{L}^2(0,1).$$

Lemme 3.1. *L'énergie du système (3.3) définie par*

$$\mathrm{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\rho_1\varphi_t^2 + \mu\varphi_x^2 + \rho_2\psi_t^2 + \xi\psi^2 + \left(\alpha - \int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\psi_x^2(t) + 2b\varphi_x\psi\right]\mathrm{dx} + \frac{1}{2}g \circ \psi_x, \tag{3.6}$$

satisfait,

$$E'(t) = \frac{1}{2}g' \circ \psi_x - \frac{1}{2}g(t)\int_0^1 \psi_x^2(t)\mathrm{dx} \leq \frac{1}{2}g' \circ \psi_x \leq 0. \tag{3.7}$$

Preuve . En multipliant $(3.1)_1$ par φ_t et $(3.1)_2$ par ψ_t dans L^2 puis on additionne, et on intègre par partie on obtient :

$$\begin{aligned}
\rho_1\int_0^1 \varphi_{tt}\varphi_t\mathrm{dx} &= \int_0^1 \mu\varphi_{xx}\varphi_t\mathrm{dx} + \int_0^1 b\psi_x\varphi_t\mathrm{dx} \\
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\rho_1\int_0^1 \varphi_t^2\mathrm{dx} &= -\int_0^1 \mu\varphi_x\varphi_{xt}\mathrm{dx} + \int_0^1 b\psi_x\varphi_t\mathrm{dx} \\
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_0^1 \left[\rho_1\varphi_t^2 + \mu\varphi_x^2\right]\mathrm{dx} &= \int_0^1 b\psi_x\varphi_t\mathrm{dx},
\end{aligned}$$

et, d'après lemme 2.1

$$\begin{aligned}
\rho_2\int_0^1 \psi_{tt}\psi_t\mathrm{dx} &= \int_0^1 \alpha\psi_{xx}\psi_t\mathrm{dx} - \int_0^1 b\varphi_x\psi_t\mathrm{dx} - \int_0^1 \xi\psi\psi_t\mathrm{dx} - \int_0^1 \psi_t\int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(x,s)\mathrm{dsdx} \\
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_0^1 \rho_2\psi_t^2\mathrm{dx} &= -\int_0^1 \alpha\psi_x\psi_{xt}\mathrm{dx} - \int_0^1 b\varphi_x\psi_t\mathrm{dx} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_0^1 \xi\psi^2\mathrm{dx} \\
&\quad - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[g \circ \psi_x - \left(\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\int_0^1 \psi_x^2(t)\mathrm{dx}\right] + \frac{1}{2}g' \circ \psi_x - \frac{1}{2}g(t)\int_0^1 \psi_x^2(t)\mathrm{dx}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_0^1 \left[\rho_2\psi_t^2 + \xi\psi^2 + \left(\alpha - \int_0^t g(s)\mathrm{ds}\right)\int_0^1 \psi_x^2(t)\mathrm{dx}\right]\mathrm{dx} + \frac{1}{2}g \circ \psi_x \\
&= -\int_0^1 b\varphi_x\psi_t\mathrm{dx} + \frac{1}{2}g' \circ \psi_x - \frac{1}{2}g(t)\int_0^1 \psi_x^2(t)\mathrm{dx}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{E}(t)=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\rho_1\varphi_t^2+\mu\varphi_x^2+\rho_2\psi_t^2+\xi\psi^2+\left(\alpha-\int_0^t g(s)ds\right)\int_0^1\psi_x^2(t)\mathrm{dx}+2b\varphi_x\psi\right]\mathrm{dx}+\frac{1}{2}g\circ\psi_x.$$

$$\mathrm{E}'(t)=\frac{1}{2}g'\circ\psi_x-\frac{1}{2}g(t)\int_0^1\psi_x^2(t)\mathrm{dx}\leq\frac{1}{2}g'\circ\psi_x\leq 0.$$

□

Lemme 3.2. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2), *la fonctionnelle définie par*

$$I(t):=-\int_0^1\rho_2\psi_t\int_0^t g(t-s)\left(\psi(t)-\psi(s)\right)\mathrm{dsdx},$$

satisfait, pour tous ε_1, $\varepsilon_2>0$, l'éstimation

$$\begin{aligned}I'(t)\leq\ & -\frac{\rho_2 g_0}{2}\int_0^1\psi_t^2\mathrm{dx}+3\varepsilon_1\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}+\varepsilon_2\int_0^1\varphi_x^2\mathrm{dx}\\ & -c_0g'\circ\psi_x+c_0\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)g\circ\psi_x,\end{aligned}\tag{3.8}$$

où $g_0=\displaystyle\int_0^{t_0}g(s)\mathrm{ds}.$

Preuve . En dérivant $I(t)$, on a

$$\begin{aligned}I'(t)=&-\int_0^1\rho_2\psi_{tt}\int_0^t g(t-s)\left(\psi(t)-\psi(s)\right)\mathrm{dsdx}-\int_0^t g(s)ds\int_0^1\rho_2\psi_t^2\mathrm{dx}\\
&-\int_0^1\rho_2\psi_t\int_0^t g'(t-s)\left(\psi(t)-\psi(s)\right)\mathrm{dsdx}\\
=&-\int_0^1\left[\alpha\psi_{xx}-b\varphi_x-\xi\psi-\int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(x,s)\mathrm{ds}\right]\\
&\times\int_0^t g(t-s)\left(\psi(t)-\psi(s)\right)\mathrm{dsdx}-\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\int_0^1\rho_2\psi_t^2\mathrm{dx}\\
&-\int_0^1\rho_2\psi_t\int_0^t g'(t-s)\left(\psi(t)-\psi(s)\right)\mathrm{dsdx}\\
=&\alpha\int_0^1\psi_x\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{dsdx}+b\int_0^1\varphi_x\int_0^t g(t-s)\left(\psi(t)-\psi(s)\right)\mathrm{dsdx}\\
&+\xi\int_0^1\psi\int_0^t g(t-s)\left(\psi(t)-\psi(s)\right)\mathrm{dsdx}\\
&-\int_0^1\int_0^t g(t-s)\psi_x(x,s)\mathrm{ds}\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{dsdx}\\
&-\rho_2\int_0^1\psi_t\int_0^t g'(t-s)\left(\psi(t)-\psi(s)\right)\mathrm{dsdx}-\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\int_0^1\rho_2\psi_t^2\mathrm{dx}.\end{aligned}$$

Et en utilisent les inégalités Young et de Poincaré et lemme 2.2, on a, pour tous δ, ε_1, $\varepsilon_2>0$

$$-\alpha\int_0^1\psi_x\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{dsdx}\leq\varepsilon_1\int_0^1\psi_x^2\mathrm{dx}+\frac{c_0}{\varepsilon_1}g\circ\psi_x,$$

$$b\int_0^1\varphi_x\int_0^t g(t-s)\left(\psi(t)-\psi(s)\right)\mathrm{dsdx}\leq\varepsilon_2\int_0^1\varphi_x^2\mathrm{dx}+\frac{c_0}{\varepsilon_2}g\circ\psi_x,$$

$$\xi\int_0^1\psi\int_0^t g(t-s)\left(\psi(t)-\psi(s)\right)\mathrm{dsdx}\leq\varepsilon_1\int_0^1\psi^2\mathrm{dx}+\frac{c_0}{\varepsilon_1}g\circ\psi_x,$$

$$-\rho_2 \int_0^1 \psi_t \int_0^t g'(t-s)\left(\psi(t)-\psi(s)\right)\mathrm{dsdx} \leq \rho_2 \delta \int_0^1 \psi_t^2 \mathrm{dx} - \frac{c_0}{\delta} g' \circ \psi_x$$

Finalement, on exploit l'inégalité $(a+b) \leq 2a^2 + 2b^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
&-\int_0^1 \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{ds} \int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{dsdx} \\
&\quad \leq \varepsilon' \int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)\left[\psi_x(s)+\psi_x(t)-\psi_x(t)\right]\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon'} \int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx} \\
&\quad \leq 2\varepsilon' \int_0^1 \psi_x^2(s)\mathrm{dx}\left(\int_0^t g(s)ds\right)^2 \mathrm{dx} + (2\varepsilon' + \frac{c_0}{\varepsilon'}) \int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{ds}\right)^2 \mathrm{dx} \\
&\quad \leq \varepsilon_1 \int_0^1 \psi_x^2(s)\mathrm{dx} + \frac{c_0}{\varepsilon_1} g \circ \psi_x.
\end{aligned}$$

D'aprés la continuité de la fonction $g > 0$ et puisque $g(0) > 0$, pour tout $t \geq t_0 > 0$, on a

$$\int_0^t g(s)\mathrm{ds} \geq \int_0^{t_0} g(s)\mathrm{ds} = g_0. \tag{3.9}$$

En substituant ces inégalités et (3.9) dans l'expression de $I(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
I'(t) \leq &-\rho_2[g_0-\delta]\int_0^1 \psi_t^2 \mathrm{dx} + 3\varepsilon_1 \int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} + \varepsilon_2 \int_0^1 \varphi_x^2 \mathrm{dx} \\
&- c_0 g' \circ \psi_x + c_0(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}) g \circ \psi_x,
\end{aligned}$$

on prend $\delta = \dfrac{g_0}{2}$, on obtient (3.8). □

Lemme 3.3. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, la fonctionnelle définie par*

$$J(t) := -\int_0^1 \rho_1 \varphi \varphi_t \mathrm{dx},$$

satisfait,

$$J'(t) \leq \quad -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 \mathrm{dx} + \frac{3\mu}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 \mathrm{dx} + c_0 \int_0^1 \psi_x^2 dx. \tag{3.10}$$

Preuve . L'estimation (3.10) suit facilement en utilisant les inégalités de Young et Poincaré

$$\begin{aligned}
J'(t) &= -\int_0^1 \rho_1 \varphi_t^2 \mathrm{dx} - \int_0^1 \varphi\left[\mu\varphi_{xx} + b\psi_x\right] dx \\
&= -\int_0^1 \left(\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2\right) dx + \mu \int_0^1 \varphi_x^2 dx + b \int_0^1 \varphi_x \psi dx + b \int_0^1 \psi \varphi_x dx \\
&\leq -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 \mathrm{dx} + \mu \int_0^1 \varphi_x^2 dx + b \int_0^1 \varphi_x \psi \mathrm{dx} \\
&\leq -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 \mathrm{dx} + \frac{3\mu}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 \mathrm{dx} + c_0 \int_0^1 \psi_x^2 dx.
\end{aligned}$$

On obtient (3.10). □

Lemme 3.4. *Soit* (φ, ψ) *la solution forte d'un système (3.3)*

$$K_1(t) := \int_0^1 \rho_2 \psi_t \psi \mathrm{dx} + \frac{b\rho_1}{\mu} \int_0^1 \psi \int_0^x \varphi_t(y)\mathrm{dydx},$$

satisfait, pour tout $\varepsilon_1 > 0$, l'estimation

$$\begin{aligned} K_1'(t) \leq \quad & -\beta \int_0^1 \psi^2 dx \ - \frac{\ell}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + c_0 g \circ \psi_x \\ & + \varepsilon_3 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_3}\right) \int_0^1 \psi_t^2 dx, \end{aligned} \tag{3.11}$$

où $\beta = \left(\xi - \dfrac{b^2}{\mu}\right) > 0.$

Preuve . Une différenciation directe en utilisant (3.3), conduit à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho_2 \psi_t \psi dx = & \int_0^1 \left[\alpha \psi_{xx} - b\varphi_x - \xi \psi - \int_0^t g(t-s) \psi_{xx}(x,s) ds\right] \psi dx + \int_0^1 \rho_2 \psi_t^2 dx \\ = & - \int_0^1 \alpha \psi_x^2 dx - b \int_0^1 \psi \varphi_x dx - \xi \int_0^1 \psi^2 dx \\ & + \int_0^1 \psi_x \int_0^t g(t-s) \psi_x(x,s) ds dx + \int_0^1 \rho_2 \psi_t^2 dx, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{b\rho_1}{\mu} \int_0^1 \psi \int_0^x \varphi_t(y) dy dx = & \frac{b\rho_1}{\mu} \int_0^1 \psi_t \int_0^x \varphi_t(y) dy dx + \frac{b\rho_1}{\mu} \int_0^1 \psi \int_0^x \varphi_{tt}(y) dy dx \\ = & \frac{b\rho_1}{\mu} \int_0^1 \psi_t \int_0^x \varphi_t(y) dy dx + \frac{b}{\mu} \int_0^1 \psi \int_0^x \left[\mu \varphi_{xx}(y) + b\psi_x(y)\right] dy dx \\ = & \frac{b\rho_1}{\mu} \int_0^1 \psi_t \int_0^x \varphi_t(y) dy dx + \frac{b}{\mu} \int_0^1 \psi \int_0^x \left[\mu \varphi_{xx}(y) + b\psi_x(y)\right] dy dx \\ = & \frac{b\rho_1}{\mu} \int_0^1 \psi_t \int_0^x \varphi_t(y) dy dx + b \int_0^1 \psi \varphi_x dx + \frac{b^2}{\mu} \int_0^1 \psi^2 dx. \end{aligned}$$

En utilisent l'intégration par parties et les inégalités de Young et de Cauchy$-$Schwarz, pour tout $\varepsilon_3 > 0$, on aura

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi_x \int_0^t g(t-s) \psi_x(x,s) ds dx \leq & \left(\delta + \int_0^t g(s) ds\right) \int_0^1 \psi_x^2 dx + c_0 g \circ \psi_x. \\ \frac{b\rho_1}{\mu} \int_0^1 \psi_t \int_0^x \varphi_t(y) dy dx \leq & \varepsilon_3 \int_0^1 \left(\int_0^x \varphi_t(y) dy\right)^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_3} \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ \leq & \varepsilon_3 \int_0^1 \left(\int_0^x \varphi_t(y) dy\right)^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_3} \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ \leq & \varepsilon_3 \int_0^1 \left(\left(\int_0^x 1 \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x \varphi_t^2(y) \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{c_0}{\varepsilon_3} \int_0^1 \psi_t^2 \mathrm{d}x \\ \leq & \varepsilon_3 \int_0^1 x \left(\int_0^x \varphi_t^2(y) dy\right) \mathrm{d}x + \frac{c_0}{\varepsilon_3} \int_0^1 \psi_t^2 \mathrm{d}x \\ \leq & \varepsilon_3 \int_0^1 \varphi_t^2 \mathrm{d}x + \frac{c_0}{\varepsilon_3} \int_0^1 \psi_t^2 \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} K_1'(t) \leq & -\left(\xi - \frac{b^2}{\mu}\right) \int_0^1 \psi^2 dx \ - \left(\alpha - \int_0^\infty g(s) ds - \delta\right) \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ & + c_0 g \circ \psi_x + \varepsilon_3 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_3}\right) \int_0^1 \psi_t^2 dx. \end{aligned}$$

On prend $\delta = \dfrac{\ell}{2}$ et $\beta = \left(\xi - \frac{b^2}{\mu}\right)$, on obtient le résultat. $\square$

Dans lemme suivant on utilise la condition des vitesses égaux

$$\frac{\mu}{\rho_1} = \frac{\alpha}{\rho_2} \tag{3.12}$$

Lemme 3.5. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, la fonctionnelle*

$$K_2(t) := b\int_0^1 \psi_x\varphi_t \mathrm{dx} + b\int_0^1 \varphi_x\psi_t \mathrm{dx} - \frac{b\rho_1}{\mu\rho_2}\int_0^1 \varphi_t \int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx},$$

satisfait, pour tout $\varepsilon_4 > 0$*, l'estimation*

$$K_2'(t) \leq \quad -\frac{b^2}{2\rho_2}\int_0^1 \varphi_x^2 \mathrm{dx} + c_0\varepsilon_4\int_0^1 \varphi_t^2 \mathrm{dx} + c_0\left(1+\frac{1}{\varepsilon_4}\right)\int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} - \frac{c_0}{\varepsilon_4} g' \circ \psi_x + c_0 g \circ \psi_x. \tag{3.13}$$

Preuve .

$$\begin{aligned}
K_2'(t) =& b\int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t \mathrm{dx} + b\int_0^1 \psi_x\varphi_{tt} \mathrm{dx} + b\int_0^1 \varphi_x\psi_{tt} \mathrm{dx} + b\int_0^1 \varphi_{xt}\psi_t \mathrm{dx} \\
& - \frac{b\rho_1}{\mu\rho_2}\int_0^1 \varphi_{tt}\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx} - \frac{b\rho_1}{\mu\rho_2}\int_0^1 \varphi_t\int_0^t g'(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx} \\
=& b\int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx + \frac{b}{\rho_1}\int_0^1 \psi_x\left[\mu\varphi_{xx} + b\psi_x\right]\mathrm{dx} \\
& + \frac{b}{\rho_2}\int_0^1 \varphi_x\left[\alpha\psi_{xx} - b\varphi_x - \xi\psi - \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(x,s)\mathrm{ds}\right]\mathrm{dx} \\
& + b\int_0^1 \varphi_{xt}\psi_t \mathrm{dx} - \frac{b}{\mu\rho_2}\int_0^1 \left[\mu\varphi_{xx} + b\psi_x\right]\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx} \\
& + \frac{b\rho_1}{\mu\rho_2}\int_0^1 \varphi_t\int_0^t g'(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2'(t) = \quad & -\frac{b^2}{\rho_2}\int_0^1 \varphi_x^2 \mathrm{dx} + \frac{b^2}{\rho_1}\int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} - \frac{b\xi}{\rho_2}\int_0^1 \varphi_x\psi \mathrm{dx} - \frac{b^2}{\mu\rho_2}\int_0^1 \psi_x\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx} \\
& + \frac{b\rho_1}{\mu\rho_2}\int_0^1 \varphi_t\int_0^t g'(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

En utilisant les inégalités de Young, de Cauchy−Schwarz et de Poincaré, pour $\delta_1, \varepsilon_4 > 0$, on a

$$-\frac{b\xi}{\rho_2}\int_0^1 \varphi_x\psi dx \leq \frac{b^2}{2\rho_2}\int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{\xi^2}{2\rho_2}\int_0^1 \psi^2 dx \leq \frac{b^2}{2\rho_2}\int_0^1 \varphi_x^2 dx + c_0\int_0^1 \psi^2 dx \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{b^2}{\mu\rho_2}\int_0^1 \psi_x\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx} =& \frac{b^2}{\mu\rho_2}\int_0^1 \psi_x\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{dsdx} \\
& - \frac{b^2}{\mu\rho_2}\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} \\
\leq & \left(\delta_1 - \frac{b^2}{\mu\rho_2}\right)\int_0^t g(s)\mathrm{ds}\int_0^1 \psi_x^2 \mathrm{dx} \\
& + \frac{c_0}{\delta_1}\int_0^1\int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)^2 \mathrm{dsdx}.
\end{aligned}$$

On pose $\delta_1 = \dfrac{b^2}{\mu\rho_2}$

$$-\frac{b^2}{\mu\rho_2}\int_0^1 \psi_x\int_0^t g(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx} \leq c_0 g \circ \psi_x, \tag{3.16}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{b\rho_1}{\mu\rho_2}\int_0^1 \varphi_t \int_0^t g'(t-s)\psi_x(s)\mathrm{dsdx}\\
&\leq \frac{b\rho_1}{\mu\rho_2}\int_0^1 \varphi_t \int_0^t g'(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)\mathrm{dsdx} - \frac{b\rho_1}{\mu\rho_2}\int_0^t g'(s)ds\int_0^1 \varphi_t\psi_x\mathrm{dx}\\
&\leq \frac{b\rho_1\varepsilon_4}{2\mu\rho_2}\int_0^1 \varphi_t^2\mathrm{dx} + \frac{b\rho_1}{2\mu\rho_2\varepsilon_2}\int_0^t g'(s)\mathrm{ds}\int_0^1\int_0^t g'(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)^2\mathrm{dsdx}\\
&\quad + \frac{b\rho_1 g(0)}{\mu\rho_2}\int_0^1 \varphi_t\psi_x dx - \frac{b\rho_1 g(t)}{\mu\rho_2}\int_0^1 \varphi_t\psi_x dx\\
&\leq \frac{b\rho_1\varepsilon_4}{2\mu\rho_2}\int_0^1 \varphi_t^2\mathrm{dx} + \frac{b\rho_1}{2\mu\rho_2\varepsilon_4}\underbrace{\int_0^t g'(s)\mathrm{ds}}_{<0}\int_0^1\int_0^t g'(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)^2\mathrm{dsdx}\\
&\quad + \frac{b\rho_1 g(0)}{\mu\rho_2}\int_0^1 \varphi_t\psi_x dx - \frac{b\rho_1\left(g(t)\right)^2}{2\mu\rho_2\varepsilon_4}\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx}\\
&\leq c_0\varepsilon_4\int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{c_0}{\varepsilon_4}g'\circ\psi_x + \frac{c_0}{\varepsilon_4}\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} + \frac{b\rho_1 g(0)}{\mu\rho_2}\int_0^1 \varphi_t\psi_x\mathrm{dx}.
\end{aligned}
$$

La substitution de (3.17) - (3.18) à (3.16), en prenant en considération (3.12), donne (3.13). □

Théorème 3.1. *On suppose que* (H1), (H2) *et (3.12) vérifiées. Alors, pour tout $t_0 > 0$, il existe deux constantes positives η et ω telles que l'énergie donnée par (3.6) vérifie*

$$
E(t) \leq \eta e^{-\omega\int_{t_0}^t \xi(s)\mathrm{ds}}, \quad \forall t \geq t_0 \tag{3.17}
$$

Preuve . On définie une fonction de **Lyapunov**

$$
\mathcal{L}(t) = NE(t) + N_1 I(t) + N_2 K_1(t) + N_3 K_2(t) + J(t), \tag{3.18}
$$

où N_1, N_2 et N_3 sont des constantes positives qui seront fixées ultérieurement.
En outre, en choisissant N encore assez grand, on obtient

$$
\mathcal{L}(t) \sim \mathrm{E}(t).
$$

En utilisent (3.7), (3.8), (3.10), (3.11), on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq &-\left[\frac{b^2N_3}{2\rho_2} - N_1\varepsilon_2 - \frac{3\mu}{2}\right]\int_0^1 \varphi_x^2\mathrm{dx} - \left[\rho_1 - c_0\varepsilon_4 N_3 - \varepsilon_3 N_2\right]\int_0^1 \varphi_t^2\mathrm{dx}\\
&-\left[\frac{\ell N_2}{2} - c_0N_3\left(1+\frac{1}{\varepsilon_4}\right) - 3\varepsilon_1 N_1 - c_0\right]\int_0^1 \psi_x^2\mathrm{dx} - \beta N_2\int_0^1 \psi^2\mathrm{dx}\\
&-\left[\frac{\rho_2 g_0}{2}N_1 - -c_0N_2\left(1+\frac{1}{\varepsilon_3}\right)\right]\int_0^1 \psi_t^2\mathrm{dx} + \left[\frac{N}{2} - N_1c_0 - \frac{c_0N_3}{\varepsilon_4}\right]g'\circ\psi_x\\
&+c_0\left[N_2 + N_1\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}\right) + N_3\right]g\circ\psi_x,
\end{aligned}
$$

où

$$
\varepsilon_1 = \frac{\ell N_2}{12N_1},\ \varepsilon_2 = \frac{b^2N_3}{4\rho_2 N_1},\ \varepsilon_3 = \frac{\rho_1}{4N_2},\ \varepsilon_4 = \frac{\rho_1}{4c_0N_3}.
$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq &-\left[\frac{\ell N_2}{4} - c_0N_3\left(1+N_3\right) - c_0\right]\int_0^1 \psi_x^2 dx - \beta N_2\int_0^1 \psi^2 dx - \frac{\rho_2}{2}\int_0^1 \varphi_t^2 dx\\
&-\left[\frac{b^2N_3}{4\rho_2} - \frac{3\mu}{2}\right]\int_0^1 \varphi_x^2 dx - \left[\frac{\rho_2 g_0}{2}N_2 - c_0N_2\left(1+N_2\right)\right]\int_0^1 \psi_t^2 dx\\
&+\left[\frac{N}{2} - c_0N_1 - c_0N_3^2\right]g'\circ\psi_x + c_0\left[N_2 + N_1^2\left(\frac{1}{N_2}+\frac{1}{N_3}\right) + N_3\right]g\circ\psi_x.
\end{aligned}
$$

On choisit N_3 assez grand pour que

$$\eta_1 = \frac{b^2 N_3}{4\rho_2} - \frac{3\mu}{2} > 0,$$

et, on prendre N_1 assez grand pour que

$$\eta_2 = \frac{\rho_2 g_0}{2} N_1 - c_0 N_2 \left(1 + N_2\right) > 0,$$

aussi, on prendre N_2 assez grand pour que

$$\eta_3 = \frac{\ell N_2}{4} - c_0 N_3 \left(1 + N_3\right) - c_0 > 0.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\eta_3 \int_0^1 \psi_x^2 dx - \eta_0 \int_0^1 \psi^2 dx - \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \eta_1 \int_0^1 \varphi_x^2 dx - \eta_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \left[\frac{N}{2} - c_0\right] g' \circ \psi_x + c_0 g \circ \psi_x, \tag{3.19}$$

où $\eta_0 = \beta N_2$.
D'autre part

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(t)| \leq & \rho_2 N_2 \int_0^1 |\psi_t \psi| \,\mathrm{dx} + \rho_2 N_1 \int_0^1 \left| \psi_t \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) \mathrm{ds} \right| \mathrm{dx} \\ & + N_3 \int_0^1 \left| b\psi_x \varphi_t + b\varphi_x \psi_t - \frac{\rho_1 b}{\mu \rho_2} \varphi_t \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) \mathrm{ds} \right| \mathrm{dx} \\ & + \frac{b\rho_1 N_2}{\mu} \int_0^1 \left| \psi \int_0^x \varphi_t(y) \mathrm{d}y \right| \mathrm{dx} + \rho_1 \int_0^1 |\varphi_t \varphi| \, dx \end{aligned}$$

En exploitant les inégalités de Young, de Cauchy$-$Schwarz et de Poincaré, on obtient

$$|\mathcal{L}(t)| \leq c \int_0^1 \left(\varphi_t^2 + \psi_t^2 + \psi_x^2 + \varphi_t^2 + \psi^2\right) dx + c g \circ \psi_x \leq c E(t).$$

Par conséquent, on a

$$|\mathcal{L}(t) - N E(t)| \leq c E(t).$$

Alors

$$(N - c) E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N + c) E(t). \tag{3.20}$$

Maintenant, en choisissant N assez grand pour que

$$\frac{N}{2} - c > 0, \quad N - c > 0,$$

et en exploitant (3.6), les estimations (3.19) et (3.20), respectivement, donne

$$\mathcal{L}'(t) \leq -k_1 E(t) + k_2 g \circ \psi_x, \quad \forall t \geq t_0, \tag{3.21}$$

et

$$c_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_2 E(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{3.22}$$

telle que $k_1, k_2, c_1, c_2 > 0$
En multipliant (3.21) par $\xi(t)$, on obtient

$$\xi(t) \mathcal{L}'(t) \leq -k_1 \xi(t) \mathrm{E}(t) + k_2 \xi(t) g \circ \psi_x, \quad \forall t \geq t_0. \tag{3.23}$$

Le dernier terme de (3.23) est estimé comme suit. En utilisant (H2), on a

$$\begin{aligned}
\xi(t) g \circ \psi_x = & \xi(t) \int_0^1 \int_0^t g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)^2 \mathrm{dsdx} \\
\leq & \int_0^1 \int_0^t \xi(t-s) g(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)^2 dsdx \\
\leq & -\int_0^1 \int_0^t g'(t-s)\left(\psi_x(t)-\psi_x(s)\right)^2 ds\mathrm{dx}=-g' \circ \psi_x \\
\leq & -2 E'(t) .
\end{aligned}$$

Ainsi, (3.23) devient

$$\xi(t) \mathcal{L}'(t) \leq -k_1 \xi(t) E(t)-2 k_2 E'(t), \quad \forall t \geq t_0,$$

qui peut être écrire comme

$$\left(\xi(t) \mathcal{L}(t)+2 k_2 E(t)\right)'-\xi'(t) \mathcal{L}(t) \leq-k_1 \xi(t) E(t), \forall t \geq t_0 .$$

En utilisant le fait que $\xi'(t) \leq 0$, $\forall t \geq 0$, on a

$$\left(\xi(t) \mathcal{L}'(t)+2 k_2 E(t)\right)' \leq-k_1 \xi(t) E(t), \quad \forall t \geq t_0 .$$

En exploitant (3.22), on peut facilement montrer que

$$\mathcal{R}(t)=\xi(t) \mathcal{L}(t)+2 k_2 E(t) \sim E(t). \tag{3.24}$$

Par conséquent, pour une constante positive λ_2, on obtient

$$\mathcal{R}'(t) \leq-\lambda_2 \xi(t) \mathcal{R}(t), \quad \forall t \geq t_0. \tag{3.25}$$

Une simple intégration de (3.25) sur $[t_0, t]$ conduit à

$$\mathcal{R}(t) \leq \mathcal{R}\left(t_0\right) e^{-\lambda_2 \int_{t_0}^t \xi(s) \mathrm{dx}}, \quad \forall t \geq t_0. \tag{3.26}$$

Donc

$$\mathrm{E}(t) \leq \mathrm{E}\left(t_0\right) e^{-\lambda_2 \int_{t_0}^t \xi(s) ds}, \quad \forall t \geq t_0 .$$

Ce qui termine la démonstration avec $\eta=\mathrm{E}\left(t_0\right)$ et $\omega=\lambda_2$. $\square$

Conclusion

Dans ce mémoire on examiné l'effet des dissipations faibles de type mémoire sur la stabilité des systèmes thermoélastique. On a constaté que ces dissipations peuvent conduire le système à une stabilité qui dépende du tau de décroissance ξ de la fonction de relaxation g du terme mémoire, et des vitesses des propagations des équations hyperboliques des systèmes, c'est à dire :

1. le tau de décroissance de la solution est majoré par
$$\eta \exp\left(-\omega \int_0^t \xi(s) ds\right),$$
dans le cas des vitesses égaux : $\dfrac{\kappa}{\rho_1} = \dfrac{\alpha}{\rho_2}$.
2. le tau de décroissance de la solution est majoré par
$$\frac{\lambda}{\int_0^t \xi(s) ds},$$
dans le cas des vitesses différentes $\dfrac{\kappa}{\rho_1} \neq \dfrac{\alpha}{\rho_2}$.

L'interêt de ces résultats est que : le retour du système à l'état de repos après une perturbation de type mémoire dépend de la fonction ξ qui définie le tau de décroissance de la mémoire associée à la fonction de relaxation g.

Bibliographie

[1] T. Apalara, General decay of solutions in one-dimensional porous-elastic system with memory, J. Math. Anal. Appl. Volume 469, (2), 2019, 457-471.

[2] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J.E. Muñoz Rivera, R. Racke, Energy decay for Timoshenko systems of Timoshenko type, J. Differential Equations, 194 (2003), 82–115.

[3] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Masson, Paris, 1983.

[4] M.M. Cavalcanti, D.V.N. Cavalcanti, and J.A. Soriano, Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping, Elect. J. Diff. Eqs. 44 (2002), 1-14.

[5] Z. Claude : éléments de Distributions et D'équations Aux Dérivées Partielles Dunod, Paris 2002.

[6] I. Ellouze. Etude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retard et des systèmes impulsifs. Optimisation et contrôle [math.OC]. Université Paul Verlaine - Metz ; Université de Sfax, 2010.

[7] A. Fareh, Cours de Doctorat.

[8] A. Guesmia and S. A. Messaoudi, On the control of solutions of a viscoelastic equation, Appl. Math. Comput., 206 (2008), 589-597.

[9] E. Moulay. Stabilité Des équations Différentielles Ordinaires. DEA. 2007.

[10] S. A. Messaoudi, A. Fareh, General decay for a porous thermoelastic system with memory : The case of equal speeds, Nonlinear analysis : TMA, 74 (2011), 6895-6906.

[11] S. A. Messaoudi and A. Fareh, General decay for a porous thermoelastic system with memory :The case of nonequal speeds, Acta Mathimatica Scientia, 33 (2013), 23-40.

[12] A. Magaña, R. Quintanilla, On the time decay of solutions in one-dimensional theories of porous materials, Int. J. Sol. Stuct., 43 (2006), 3414-3427.

[13] S. A. Messaoudi and M. I. Mustafa, On the stabilization of the Timoshenko system by a weak nonlinear dissipation, Math. Meth. Appl. Sci., 32 (2009), 454-469.

[14] A. Soufyane, Energy decay for Porous-thermo-elasticity systems of memory type, Applicable Analysis, 87 (4), (2008), 451-464.

Résumé

- L'objectif de ce mémoire est l'étude de la stabilité de quelques systèmes en thérmoélasticité dans le cas d'une dissipation de type mémoire.
- Nous avons utilisé la théorie de stabilité de Lyapunov et la méthode des multiplicateurs et obtenir une décroissance générale de la solution dont les décroissances exponentielle et polynômiale sont des cas particuliers.
- **Mots clés :** Décroissance générale, terme mémoire, élasticité poreuse, système de Timoshenko, théorie de Lyapunov.

Abstract

- The aim of this work is the study of the stability of some systems in porous and thermoelastic theory, with dissipations of memory type. We have use the Lyapunov theory and the multipliers method to obtain a general decay depends on ξ where the exponential and polynomial decay are secial cases.
- **Key words :** General decay, memory term, porous elasticity, Lyapunov theory Timoshenko system.

مــلـخص

- الهدف من هذه المذكرة هو دراسة بعض جمل في المرونة المسامية ومن صنف تيموشينكو مع وجود تبدد ذو حد الذاكرة .
- استعملنا في هذا العمل نظرية Lyapunov وطريقة المضاعفات للبرهان على الاضمحلال الشامل للجملة والذي يحوي حالتي الاضمحلال الاسي والجبري كحالات خاصة.
- **الكلمات المفتاحية :** الاضمحلال الشامل, حد ذو ذاكرة, جمل صنف تيموشينكو، المرونية المسامية, نظرية Lyapunov .