N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de

la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

Problèmes aux limites non locaux

Présenté par: Bennacer Chaima.
Sahraoui Fathia.

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Fareh Abdelfateh	MCA/Prof.	Président	Univ. El Oued
Ghendir Aoun Abdellatif	Prof.	Rapporteur	Univ. El Oued
Letofa Yacine	MCA/MC	Examinateur	Univ. El Oued

Année universitaire 2018 – 2019

Remerciements

En préambule à ce mémoire nous remerciant ALLAH qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces langues années d'étude.
En second lieu, nous tenons à remercier mes parents, qui mon encouragé et aidé à arriver à ce stade de ma formation.
Également je remercie infiniment notre encadreur Mr : **Abdellatif Ghendir Aoun**, son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.
Je tiens à remercier avec plus grande gratitude Monsieur **A. Fareh** de l'honneur qu'il me fait d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.
Je remercie également Monsieur **Y. Letoufa** d'avoir accepté d'être membre de ce jury.
Je remercie vivement les étudiants de Master Mathématique pour leur aide morale durant toute la période de préparation.
Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé et assisté.

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'étudier quelques problèmes aux limites associés à des équations différentielles posées sur des intervalles bornés et où les conditions aux bords sont non locales.

Les problèmes aux limites pour des équations différentielles ordinaires se posent dans les sciences physiques et les mathématiques appliquées. Dans certains de ces problèmes, les conditions filiales sont imposées localement. Dans autres cas, les conditions sont imposées non locales. Il est parfois préférable d'imposer des conditions non locales puisque les mesures nécessaires à une condition non locale peut être plus précis que la mesure donnée par une condition locale. Par exemple, le problème classique de Robin est donnée par

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), & t \in (0,\, 1) \\ x(0) = 0, \qquad x'(1) = 0. \end{cases}$$

Si la condition locale $x'(1) = 0$ est remplacé par la condition non locale $x(1) = x(\eta)$ (où $\eta \in (0,\, 1)$), alors le problème

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), & t \in (0,\, 1) \\ x(0) = 0, \qquad x(1) = x(\eta), \end{cases}$$

est une problème aux limites non locale. Ce travail est subdivisée en trois chapitres.

- Préliminaires
- Problème aux limites du premier ordre à trois points
- Problème aux limites du second ordre à trois points

Plus précisément, nous allons résumé les résultats concernant ces chapitres comme suit. Dans le première chapitre on sera consacrée aux préliminaires sur des notions générales utilisées dans les différents chapitres du travail, on présente la notion de quelques outils de base, comme application compact, le critère de compacité dans $C([a,b],\mathbb{R})$ et on présente le théorème d'Ascoli-Arzéla puis nous allons définir la fonction de Green pour son importance dans les démonstrations, enfin on présente le théorème de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder de point fixe.

Au deuxième chapitre, nous exposons des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité des solutions du problème

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x) \\ \alpha \mathrm{x}(a) + \beta \mathrm{x}(b) + \gamma \mathrm{x}(c) = \zeta, \end{cases}$$

dans le première section, puis en généralisé à $\mathbb{R}^n$ dans le deuxième section comme suit :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x) \\ M\mathrm{x}(a) + N\mathrm{x}(b) + R\mathrm{x}(c) = \zeta, \end{cases}$$

où a, b, c trois éléments réels avec $a < b < c$,

$f : [a,\ c] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction L^1-Carathéodory, M, N, R sont des matrices carrées d'ordre n et $\zeta \in \mathbb{R}^n$ sont données.L'existence de solution est prouvé par le théorème de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Dans le troisième chapitre, on consacre à l'étude quelques résultats d'existence et d'unicité pour le problème aux limites à trois points non linéaire

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \qquad t \in (0,\ 1) \\ x(0) = 0, \qquad x(1) = x(\eta), \end{cases}$$

où $f : [0,\ 1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de L^1-Carathéodory et $\eta \in (0,\ 1)$. En 1992, Gupta [4] tout d'abord étudier l'existence de solutions pour le problème aux limites récente. L'étude de ce type de problème a été réalisée par de nombreux auteurs dans leurs recherches, voir, par exemple, [5], [6], [7], [8], [9] et les références qui y figurent.

Ce problème peut être poser sous la forme d'une équation d'opérateur

$Lx = Nx$, où $L : D(L) \subset X \longrightarrow Y$ est un opérateur linéaire, et pour $x \in D(L),\ \ Lx = x''$, et $N : X \longrightarrow Y$ est un opérateur non linéaire, telle que $(Nx)(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in [0,\ 1]$, avec X, Y sont deux espaces de Banach appropriés et où les conditions aux limites sont utilisés pour définir la catégorie, $D(L)$, de L. Nous utiliserons le théorème de l'alternative non linéaire de Leray-Schaude. Dans le deuxième section nous allons prouver des résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), & t \in (0,\ 1) \\ x(0) = 0, \qquad x(1) = \alpha x(\eta), \end{cases}$$

avec $\alpha \neq 1$. Ensuit, l'étude de ce type de problème est généralisée à m-points comme suit :

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)),\ t \in (0, 1) \\ x(0) = 0,\ x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\xi_i) \end{cases}$$

où $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue ou de L^1-Carathéodory , $a_i \in \mathbb{R},\ \xi_i \in (0, 1),\ i = 1, 2, ..., m-2$ avec $0 < \xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_{m-2} < 1$.

Notations générales

$\mathbb{R}$	Ensembles des nombres réels.
$\mathbb{N}$	Ensembles des entiers naturels.
$i.e$	c'est à dire.
$t.q$	tel(le) que.
$\|.\|$	La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
$\\|.\\|_X$	La norme sur l'espace X.
$\overline{A}$	L'adhérence de A.
$C(J)$	l'espace de Banach pour tout les fonction continues.
$L^1(J)$	l'espace de fonction intégrable ans sans de Lebesgue.
$AC(J)$	l'espace de fonction continue absolutelé.
$L^p(J)$	l'espace de fonction musurable .
$\\|x\\|_\infty = \max\{\|x(t)\|, /t \in J\}$	La norme sur l'espace $C(J)$.
$\\|x\\|_{L^1} = \int_J \|x(t)\|dt$	La norme sur $L^1(J)$.
$\\|x\\|_{AC} = \\|x\\|_\infty + \\|x'\\|_{L^1}$	La norme sur l'espace $AC(J)$.
$\\|x\\|_p = \left(\int_J \|x(t)\|^p dt\right)^{1/p}, 1 \leqslant p < \infty$	La norme sur l'espace $L^p(J)$.
$C[J, \mathbb{R}^n] =$	$\{(x_1, x_2, ..., x_n)/x_i \in C(J)\}$.
$L^1[J, \mathbb{R}^n] =$	$\{(x_1, x_2, ..., x_n)/x_i \in L^1(J)\}$.
$AC[J, \mathbb{R}^n] =$	$\{(x_1, x_2, ..., x_n)/x_i \in AC(J)\}$.
$\\|x\\|_{C[J,\mathbb{R}^n]} =$	$\max\{\\|x_i\\|_\infty, /i = 1, ..., n.\}$.
$\\|x\\|_{L^1[J,\mathbb{R}^n]} =$	$\sum_{i=1}^{i=n} \\|x\\|_{L^1}$.
$\\|x\\|_{AC[J,\mathbb{R}^n]} =$	$\max\{\\|x_i\\|_{AC}, /i = 1, ..., n.\}$.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Quelques outils de base

Définition 1.1. *L'application* $f : [0,\, 1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est* L^1-*Carathéodory si*

(i) $t \mapsto f(t,\, u)$ *est mesurable pour tout* $u \in \mathbb{R}^n$ *;*

(ii) $u \mapsto f(t,\, u)$ *est continue pour tout* $t \in [0,\, 1]$ *;*

(iii) *pour chaque* $r > 0$*, il existe* $h_r \in L^1[0,\, 1]$ *telle que*

$|f(t,\, u)| \leqslant h_r(t)$*, pour tous* $t \in [0,\, 1],\; u \in \mathbb{R}^n$ *avec* $\|u\| \leqslant r$*.*

Théorème 1.1. *(de Rolle)*
Soit f *une application de l'intervalle* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1. f *est continue sur* $[a, b]$*.*
2. f *est dérivable sur* $]a, b[$*.*
3. $f(a) = f(b)$*.*

Alors, il existe $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$*.*

Théorème 1.2. *(des accroissement finis)*
Soit f *une application de l'intervalle* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant les deux condition suivantes :*

1. f *est continue sur* $[a, b]$*.*
2. f *est dérivable sur* $]a, b[$*.*

Alors, il existe $c \in]a, b[$ vérifiant :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

1.2 Application compact

Soit X et Y deux espaces de Banach et $\Omega \subset X$ un ouvert.

Définition 1.2.
- *Soit f un application définie de X à valeurs dans Y. On dit que f est complètement continue si elle est continue et compacte.*
- *f est dite compacte si $f(X)$ est relativement compact dans Y i.e. f est transformé tout borné de X en un ensemble relativement compact dans Y .*

Proposition 1.1. *Une application $f : X \to Y$ est compact si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans Y.*

1.3 Critère de compacité dans $C([a, b], \mathbb{R})$:

Définition 1.3. *On dit que des fonctions d'un sous-ensemble $M \subset C([a, b], \mathbb{R})$ sont uniformément bornées, s'il existe une constante $a > 0$ telle que $| x(t) | \leqslant a$ pour tout $x(.)$ de M et quel soit $t \in [a, b]$.*

Définition 1.4. *On dit que des fonctions d'un sous-ensemble $M \subset C([a, b], \mathbb{R})$ sont équicontinues, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\varepsilon))$, tel que pour tous $t_1, t_2 \in [a, b]$ avec $| t_1 - t_2 | < \delta$ et pour toute fonction $x(.)$ de M on ait $| x(t_1) - x(t_2) | < \varepsilon$.*

Théorème 1.3. ***(d'Ascoli-Arzéla, cas générale)****([2])*
Soit X un espace métrique compact, Y un espace métrique complet. Un sous-ensemble $M \subset C(X, Y)$ est relativement compact si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes :

1. *Pour tout $t \in X$, l'ensemble $M(t) = \{x(t),\ x(.) \in M\}$ est relativement compact dans Y.*

2. *M est équicontinue.*

Théorème 1.4. ***(d'Ascoli-Arzéla, cas particulier)***
Soit $M \subset C([a,b],\mathbb{R})$ est relativement compact si M est uniformément bornée et équicontinue.

1.4 La fonction de Green

Considérons les problèmes suivants :

$$Non\ homogene \begin{cases} x''(t) = f(t), \quad a < t < b \quad (NH) \\ \left.\begin{array}{l} \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = \gamma. \\ \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = \delta. \end{array}\right) (CB)_{NH} \end{cases}$$

$$Homogene \begin{cases} x''(t) = 0, \quad a < t < b \quad (H) \\ \left.\begin{array}{l} \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = 0. \\ \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0. \end{array}\right) (CB)_{H} \end{cases}$$

Définition 1.5. *On appelle fonction de Green associée au problème homogène $(H)-(CB)_H$ une fonction $G : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *G est continue sur $[a,b] \times [a,b]$.*
2. *G est symétrique, i.e : $G(s,t) = G(t,s), \quad \forall (s,t) \in ([a,b])^2$.*
3. *$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)$ est continue pour tout $t \neq s$.*
4. *La fonction $t \longmapsto G(t,s)$ est solution de l'équation (H) pour tout $t \neq s$.*
5. *La fonction $t \longmapsto G(t,s)$ vérifie les condition $(CB)_H$ pour tout $t \in [a,b]$.*

Théorème 1.5. *(Existence de la fonction de Green)([1])*
Lorsque G est la fonction de Green associée au problème $(H)-(CB)_H$, alors pour toute fonction f, la solution x du problème non homogène $(NH)-(CB)_H$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds.$$

1.5 Théorème de point fixe

Nous citerons en particulier le théorème de point fixe de l'alternative non linéaire du type Leray-Schauder, utilise dans la résolution des équations différentielles par l'approche du point fixe.

Théorème 1.6. *(L'alternative non linéaire de Leray-Schauder)([3]). Soient E un espace de Banach et $C \subset E$ un convexe fermé, Ω un ouvert de C contenant 0 et $\mathrm{T} : \overline{\Omega} \longrightarrow C$ un opérateur complètement continu. Alors un des deux énoncés suivants est vérifié*
(a) T *admet un point fixe dans* $\overline{\Omega}$ *i.e.* $\exists x \in \overline{\Omega} : x = \mathrm{T}x$
(b) il existe $x \in \partial\Omega$ *et* $\lambda \in [0,\, 1]$ *telle que* $x = \lambda \mathrm{T}x$.

Rémarque 1.1. *l'énoncé (b) indique que l'ensemble* $S = \{x \in \Omega : x = \lambda \mathrm{T}x ; \lambda \in [0,\, 1]\}$ *n'est pas borné.*
Ainsi pour appliquer l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, il suffit de montre que T *est complètement continu et vérifie l'estimation à priori suivante :*

$$\exists R > 0, \forall x \in E, \forall \lambda \in [0,\, 1] : (x = \lambda \mathrm{T}x \Rightarrow \|x\| < R),$$

pour dire que T *admet au moins un point fixe dans* $B(0,\, R)$.

Chapitre 2

Problèmes aux limites du première ordre à trois points

2.1 Problèmes aux limites du première ordre à trois points dans $\mathbb{R}$

Nous donnons des résultats d'existence et d'unicité de solution pour le problème aux limites du première ordre à trois points suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x), \quad t \in [a,c] \\ \alpha x(a) + \beta x(b) + \gamma x(c) = \zeta, \end{cases} \tag{2.1}$$

telles que a, b, c sont des constants dans $\mathbb{R}$ avec $a < b < c$.
$f : [a,c] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée, α, β, γ sont des constants dans $\mathbb{R}$.
Les espaces
$C([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme $\| x \|_\infty = \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant c} | x(t) |$.
$L^1([a,c])$ muni de la norme $\| x \|_1 = \displaystyle\int_a^c | x(t) | \, dt$.
Soit $X = (C([a,b],\mathbb{R})$ et $Y = L^1([a,c])$.
Dans ce lemme nous nous soucions de la forme de solution, non de son existence.

Lemme 2.1. *Soit α, β, γ des constantes dans $\mathbb{R}$ tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et soit $e \in Y$ de telle* *sorte que*

$$\begin{cases} x'(t) = e(t), \quad t \in [a,c] \\ \alpha x(a) + \beta x(b) + \gamma x(c) = \zeta. \end{cases} \tag{2.2}$$

Alors

$$x(t) = \int_a^t e(s)ds + \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\zeta - \beta\int_a^b e(s)ds - \gamma\int_a^c e(s)ds\right).$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} x'(t) = e(t) \quad &\Rightarrow \quad \textstyle\int_a^t x'(s)ds = \int_a^t e(s)ds \\ &\Rightarrow \quad x(t) - x(a) = \textstyle\int_a^t e(s)ds \\ &\Rightarrow \quad x(t) = x(a) + \textstyle\int_a^t e(s)ds. \end{aligned}$$

$Si \quad t = a \quad on\ a \quad x(a) = x(a).$

$Si \quad t = b \quad on\ a \quad x(b) = x(a) + \displaystyle\int_a^b e(s)ds.$

$Si \quad t = c \quad on\ a \quad x(c) = x(a) + \displaystyle\int_a^c e(s)ds.$

En suite, à partir de $\alpha x(a) + \beta x(b) + \gamma x(c) = \zeta$, nous avons

$$\alpha x(a) + \beta x(a) + \beta\int_a^b e(s)ds + \gamma x(a) + \gamma\int_a^c e(s)ds = \zeta,$$

ce qui implique que

$$x(a) = \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\zeta - \beta\int_a^b e(s)ds - \gamma\int_a^c e(s)ds\right).$$

Alors

$$x(t) = \int_a^t e(s) + \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\zeta - \beta\int_a^b e(s)ds - \gamma\int_a^c e(s)ds\right).$$

□

Lemme 2.2. *Soit α, β, γ des constantes dans $\mathbb{R}$ tel que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, et soit $e \in Y$ de telle sorte que*

$$\begin{cases} x'(t) = e(t), \quad t \in [a,c] \\ \alpha x(a) + \beta x(b) + \gamma x(c) = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\|x\|_\infty \leqslant \Gamma\|e\|_1 \tag{2.3}$$

tel que

$$\Gamma = \max\left\{ \frac{|\alpha|}{|\alpha+\beta+\gamma|}, \frac{|\alpha+\beta|}{|\alpha+\beta+\gamma|}, \frac{|\beta+\gamma|}{|\alpha+\beta+\gamma|}, \frac{|\gamma|}{|\alpha+\beta+\gamma|} \right\}.$$

Démonstration. Lors on mettre $\zeta = 0$ dans le lemme 2.1, nous obtenons

$$x(t) = \int_a^t e(s)ds + \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\Big(- \beta \int_a^b e(s)ds - \gamma \int_a^c e(s)ds \Big).$$

1)- Si $a \leqslant t \leqslant b \leqslant c$, on a :

$$\begin{aligned}
x(t) = \;& \int_a^t e(s)ds + \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\Big(- \beta \int_a^t e(s)ds - \beta \int_t^b e(s)ds \\
& -\gamma \int_a^t e(s)ds - \gamma \int_t^b e(s)ds - \gamma \int_b^c e(s)ds \Big) \\
= \;& \Big(1 - \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma} - \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\Big) \int_a^t e(s)ds - \frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \int_t^b e(s)ds \\
& - \frac{\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)} \int_b^c e(s)ds \\
= \;& \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} \int_a^t e(s)ds - \frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \int_t^b e(s)ds - \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \int_b^c e(s)ds
\end{aligned}$$

donc

$$|x(t)| \leqslant \max\left\{ \frac{|\alpha|}{|\alpha+\beta+\gamma|}, \frac{|\beta+\gamma|}{|\alpha+\beta+\gamma|}, \frac{|\gamma|}{|\alpha+\beta+\gamma|} \right\} \| e \|_1 \; . \tag{2.4}$$

2)- Si $a \leqslant b \leqslant t \leqslant c$, on a :

$$
\begin{aligned}
x(t) = & \int_a^b e(s)ds + \int_b^t e(s)ds + \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\Big(- \beta \int_a^b e(s)ds - \gamma \int_a^b e(s)ds \\
& -\gamma \int_b^t e(s)ds - \gamma \int_t^c e(s)ds \Big) \\
= & \left(1 - \frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right) \int_a^b e(s)ds + \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right) \int_b^t e(s)ds \\
& - \frac{\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)} \int_t^c e(s)ds \\
= & \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} \int_a^b e(s)ds + \frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta+\gamma)} \int_b^t e(s)ds - \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \int_t^c e(s)ds
\end{aligned}
$$

donc

$$
|x(t)| \leqslant \max\left\{ \frac{|\alpha|}{|\alpha+\beta+\gamma|}, \frac{|\alpha+\beta|}{|\alpha+\beta+\gamma|}, \frac{|\gamma|}{|\alpha+\beta+\gamma|} \right\} \parallel e \parallel_1 . \tag{2.5}
$$

On combine (2.4) et (2.5) , nous obtenons :

$$
\|x\|_\infty \leqslant \max\left\{ \frac{|\alpha|}{|\alpha+\beta+\gamma|}, \frac{|\alpha+\beta|}{|\alpha+\beta+\gamma|}, \frac{|\beta+\gamma|}{|\alpha+\beta+\gamma|}, \frac{|\gamma|}{|\alpha+\beta+\gamma|} \right\} \parallel e \parallel_1 .
$$

□

Rémarque 2.1. *Si $e \equiv 0$ dans lemme 2.1, alors le problème*

$$
\begin{cases}
x'(t) = 0, & t \in [a, c] \\
\alpha x(a) + \beta x(b) + \gamma x(c) = \zeta
\end{cases}
$$

admet une solution unique $x(t) = w$ tel que $w = \dfrac{\zeta}{\alpha+\beta+\gamma}$.

Corollaire 2.1. *Le problème (2.1) admet une solution $x = y + w$, si et seulement si y est une solution de problème*

$$
\begin{cases}
y'(t) = f(t, y + w), & t \in [a, c] \\
\alpha y(a) + \beta y(b) + \gamma y(c) = 0.
\end{cases} \tag{2.6}
$$

En effet, si y satisfait le problème (2.6) on a :

$$
x'(t) = y'(t) + 0 = f(t, x)
$$

et

$$\begin{aligned}\alpha x(a)+\beta x(b)+\gamma x(c) &= \alpha y(a)+\alpha w+\beta y(b)+\beta w+\gamma y(c)+\gamma w\\ &= \alpha y(a)+\beta y(b)+\gamma y(c)+(\alpha+\beta+\gamma)w\\ &= 0+\zeta=\zeta\end{aligned}$$

ce qui prouve que x est vérifie le problème (2.1)

Théorème 2.1. *Soit $f:[a,c]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction L^1-Carathéodory et $\zeta\in\mathbb{R}$. Supposons que*

(H1) α, β, γ sont des constantes telle que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

(H2) Il existes deux fonctions $p(.)$ et $r(.)\in Y$ telle que

$$\| f(t,x) \| \leqslant p(t)\|x\|_\infty + r(t)$$

pour tous $t\in[a,c]$ et $x\in\mathbb{R}$.

Alors, le problème aux limites à trois-points (2.1) admet une solution dans X à condition que

$$\Gamma \parallel p \parallel_{L^1} < 1 \tag{2.7}$$

où

$$\Gamma=\max\left\{\frac{|\alpha|}{|\alpha+\beta+\gamma|},\frac{|\alpha+\beta|}{\alpha+\beta+\gamma},\frac{|\beta+\gamma|}{\alpha+\beta+\gamma},\frac{|\gamma|}{\alpha+\beta+\gamma}\right\}.$$

Démonstration. D'après corollaire 2.1, pour prouver que le problème (2.1) admet une solution $x=y+\omega$, il suffit de montrer que le problème suivant :

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y+\omega), & t\in[a,c]\\ \alpha y(a)+\beta y(b)+\gamma y(c)=0 \end{cases} \tag{2.8}$$

admet une solution y, où ω est défini dans le remarque 2.1.

Maintenant nous définissons l'opérateur $L:D(L)\subset X\longrightarrow Y$ tel que :

$$D(L)=\{y\in C^1([a,c]),\alpha y(a)+\beta y(b)+\gamma y(c)=0\}$$

et pour $y\in D(L)$,

$$Ly=y'.$$

Nous définissons aussi l'opérateur non linéaire

$$\begin{aligned} G:\ X &\longrightarrow Y\\ y &\longmapsto (Gy)(t)=f(t,y(t)+\omega),\ t\in[a,c].\end{aligned}$$

Il est clair que G est un opérateur borné de X en Y. Ensuite, il est facile de voir depuis $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ que $L : D(L)\subset X \longrightarrow Y$ est injective. Soit l'opérateur linéaire $K : Y \longrightarrow X$ telle que :

$$(Ke)(t)=\int_a^t e(s)ds + A, \qquad pour \;\; e\in Y$$

où

$$A=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\Big(\zeta-\beta\int_a^b e(s)ds-\gamma\int_a^c e(s)ds\Big).$$

Alors, pour $e\in Y$, on a $Ke\in D(L)$ et $LKe=e$. Pour $y\in D(L)$, on a $KLy=y$. Ensuite , nous notons que $y\in X$ est une solution de problème aux limites (2.8) si et seulement si y est une solution à l'équation de l'opérateur

$$Ly=Gy$$

ce qui est équivalent à l'équation

$$y=KGy$$

i.e. (y est une point fixe d'opérateur KG) tell que

$$\begin{array}{rccl} KG: & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & (KGx)(t)=\displaystyle\int_a^t f(s,x(s))ds + A, \qquad t\in[a,c]. \end{array}$$

De plus, il est facile d'utiliser le théorème d'Arzelà-Ascoli pour conclure que les applications $\{KG\}$ sont une sous-ensemble bornée de X dans un sous-ensemble relativement compact de X. Par conséquent, KG est un application compact.

On a KG est continue alors KG est complètement continue.

Nous appliquons le théorème de Leray-Schauder pour obtenir l'existence de solution de l'équation $y=KGy$.

Pour ce faire, il suffit de vérifier que l'ensemble

$$\{y\in X\;/\;y=\lambda KGy, \lambda\in[0,1]\}$$

est borné, ce qui équivalent que l'ensemble de toutes les solutions possibles de la famille des équations

$$\begin{cases} y'(t)=\lambda f(t,y(t)+\omega), & t\in[a,c] \\ \alpha y(a)+\beta y(b)+\gamma y(c)=0 \end{cases} \tag{2.9}$$

est borné en X par une constante indépendante de $\lambda \in [0,1]$.

Soit $y(t)$ est une solution de (2.9) pour certains $\lambda \in [0,1]$. Il résulte de nos hypothèses $f(t, y(t) + \omega(t)) \in Y$. Nous avons alors de (2.9) et estimer (2.3) de le lemme 2.2 que

$$\begin{aligned}
\| y \|_\infty &\leq \lambda\Gamma \| f(t, y(t) + \omega) \|_1 \\
&\leq \Gamma\Big[\| p \|_1 \| y + \omega \|_\infty + \| r \|_1 \Big] \\
&\leq \Gamma\Big[\| p \|_1 (\| y \|_\infty + \| \omega \|_\infty) + \| r \|_1 \Big] \\
\Big[1 - \Gamma \| p \|_1 \Big] \| y \|_\infty &\leq \Gamma\Big[\|p\|_1 \|\omega\|_\infty + \|r\|_1\Big]
\end{aligned}$$

$$\| y \|_\infty \leq \frac{\Gamma[\|p\|_1 \|\omega\|_\infty + \|r\|_1]}{1 - \Gamma \| p \|_1}.$$

Il résulte de l'hypothèse (2.7) qu'il existe une constante δ indépendant de $\lambda \in [0,1]$, tel que

$$\| y \|_\infty \leq \delta.$$

Alors, d'après le théorème de Leary-Shauder on conclut que le problème (2.1) admet une solution. □

Théorème 2.2. *Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction L^1-Carathéodory et $\zeta \in \mathbb{R}$. Supposons que $(H1)$ est vérifiée. Par ailleurs, nous supposons que*

$(H3)$ Il existe une fonction $p(.) \in Y$ telle que

$$\| f(t,u) - f(t,v) \| \leq p(t) \| u - v \| \tag{2.10}$$

pour tous $t \in [a,c]$ et $u, v \in \mathbb{R}$. Alors, le problème aux limites à trois points (2.1) admet une solution unique dans X à condition de

$$\Gamma \| p \|_{L^1} < 1 \tag{2.11}$$

où

$$\Gamma = \max\left\{ \frac{|\alpha|}{|\alpha+\beta+\gamma|}, \frac{|\alpha+\beta|}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{|\beta+\gamma|}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{|\gamma|}{\alpha+\beta+\gamma} \right\}.$$

Démonstration. Nous notons que (2.10) implique

$$\| f(t,u) \| \leq \| f(t,0) \| + p(t) \| u \|, \ \forall t \in [a,c], \forall u \in \mathbb{R}.$$

D'après le théorème 3.2, le problème aux limites (2.1) admet au moins une solution en X. Supposons que u_1, u_2 sont deux solutions de (2.9) en X et on pose $z = u_1 - u_2$, alors nous obtenons

$$\begin{cases} z' = f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t)) \\ \alpha z(a) + \beta z(b) + \gamma z(c) = 0. \end{cases}$$

En appliquant le lemme 2.2 et en utilisant l'hypothèse $(H3)$, nous avons

$$\begin{aligned} \| z \|_X &\leq \lambda\Gamma \| f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t)) \|_Y \\ &\leq \Gamma(\| p \|_{L^1} \| u_1 - u_2 \|_X) \\ &\leq \Gamma(\| p \|_{L^1} \| z \|_X), \end{aligned}$$

donc, par (2.11) , nous avons que

$$z(t) = 0, \quad pour \;\; t \in [a, c],$$

par conséquent $u_1 = u_2$. □

2.2 Problèmes aux limites du première ordre à trois points dans $\mathbb{R}^n$

Maintenant, nous donnons des résultats d'existence et d'unicité de solution pour le problème aux limites du première ordre à trois points suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x), \;\; t \in [a, \, c] \\ M\mathrm{x}(a) + N\mathrm{x}(b) + R\mathrm{x}(c) = \zeta \end{cases} \tag{2.12}$$

où $f : [a, \, c] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction L^1-Carathéodory et M, N, R sont des matrices carrées d'ordre n et $\zeta \in \mathbb{R}^n$. Désinons par $J = [a, \, c]$.

Dans cette lemme nous nous soucions de la forme de solution, non de son existence.

Lemme 2.3. *[7]*

Soit M, N, R des matrices carrées d'ordre n telle que $\det(M + N + R) \neq 0$ *et soit* $e(.) \in L^1(J; \mathbb{R}^n)$, $x \in C^1(J)$ *tel que*

$$\begin{cases} x'(t) = e(t), & t \in J \\ Mx(a) + Nx(b) + Rx(c) = \zeta. \end{cases}$$

Alors

$$x(t)=\int_a^t e(s)ds+A$$

tell que

$$A=(M+N+R)^{-1}\Big[\zeta-N\int_a^b e(s)ds+R\int_a^c e(s)ds\Big].$$

Démonstration. De $x'(t)=e(t)$, on a $x(t)-x(a)=\int_a^t e(s)ds$, et donc

$$x(a)=x(a),\quad x(b)=x(a)+\int_a^b e(s)ds,\quad x(c)=x(a)+\int_a^c e(s)ds,$$

et à partir de, $M\mathrm{x}(a)+N\mathrm{x}(b)+R\mathrm{x}(c)=\zeta$, nous avons

$$x(a)=(M+N+R)^{-1}\left[\zeta-N\int_a^b e(s)ds-R\int_a^c e(s)ds\right],$$

ce qui implique que

$$x(t)=\int_a^t e(s)ds+A,$$

où

$$A=(M+N+R)^{-1}\left[\zeta-N\int_a^b e(s)ds-R\int_a^c e(s)ds\right].$$

□

Lemme 2.4. *[7] Soit M, N, R des matrices carrées d'ordre n telle que* $\det(M+N+R)\neq 0$ *et soit $e(.)\in L^1(J;\mathbb{R}^n)$, $x\in AC(J)$ tel que*

$$\begin{cases} x'(t)=e(t), & t\in J\\ Mx(a)+Nx(b)+Rx(c)=0. \end{cases}$$

Alors

$$\| x \|_X \leqslant \Gamma \| e \|_Y \tag{2.13}$$

où

$$\Gamma=\max\{\| (M+N+R)^{-1}R \|,\| (M+N+R)^{-1}M \|,\| (M+N+R)^{-1}(N+R) \|,\\ \| (M+N+R)^{-1}(N+M) \|\}.$$

Démonstration. Lors on mettre $\zeta=0$ dans le lemme 2.3, nous obtenons

$$x(t)=\int_a^t e(s)ds+(M+N+R)^{-1}\Big[-N\int_a^b e(s)ds+R\int_a^c e(s)ds\Big].$$

Notons E la matrice d'identité $n \times n$.

- Pour $a \leq t \leq b \leq c$, on a

$$\begin{aligned} x(t) = & \int_a^t \Big[E - (M+N+R)^{-1}N - (M+N+R)^{-1}R\Big] e(s)ds \\ & - \int_t^b \Big[(M+N+R)^{-1}N + (M+N+R)^{-1}R\Big] e(s)ds \\ & - \int_b^c \Big[(M+N+R)^{-1}R\Big] e(s)ds \\ = & \int_a^t (M+N+R)^{-1}Me(s)ds - \int_t^b (M+N+R)^{-1}(N+R)e(s)ds \\ & \qquad - \int_b^c (M+N+R)^{-1}Re(s)ds, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \| x(t) \| \leqslant \max\{ & \| (M+N+R)^{-1}R \|, \| (M+N+R)^{-1}M \|, \| (M+N+R)^{-1}(N+R) \|, \\ & \| (M+N+R)^{-1}(N+M) \| \} \| e \|_Y . \end{aligned} \tag{2.14}$$

- Pour $a \leqslant b \leqslant t \leqslant c$, on a

$$\begin{aligned} x(t) = & \int_a^b \Big[E - (M+N+R)^{-1}N - (M+N+R)^{-1}R\Big] e(s)ds \\ & - \int_t^b \Big[-E + (M+N+R)^{-1}R\Big] e(s)ds - \int_t^c \Big[(M+N+R)^{-1}R\Big] e(s)ds \\ = & \int_b^a (M+N+R)^{-1}Me(s)ds - \int_b^t (M+N+R)^{-1}(-M-N)e(s)ds \\ & \qquad - \int_t^c (M+N+R)^{-1}Re(s)ds, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \| x(t) \| \leqslant \max\{ & \| (M+N+R)^{-1}R \|, \| (M+N+R)^{-1}M \|, \| (M+N+R)^{-1}(N+R) \|, \\ & \| (M+N+R)^{-1}(N+M) \| \} \| e \|_Y . \end{aligned} \tag{2.15}$$

En combinaisant (2.14) et (2.15), nous obtenons

$$\| x \|_X \leqslant \Gamma \| e \|_Y$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma = \max\{ & \| (M+N+R)^{-1}R \|, \| (M+N+R)^{-1}M \|, \| (M+N+R)^{-1}(N+R) \|, \\ & \| (M+N+R)^{-1}(N+M) \| \}. \end{aligned}$$

$\square$

Rémarque 2.2. *Si $e \equiv 0$ dans lemme 2.1, alors le problème*

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \qquad t \in [a, c] \\ Mx(a) + Nx(b) + Rx(c) = \zeta \end{cases}$$

admet une solution unique $x(t) = W$ tel que

$$W = (M + N + R)^{-1}\zeta.$$

Corollaire 2.2. *[7] Soit $\det(M + N + R) \neq 0$ Alors le problème (2.12) admet une solution $x = y + W$, si et seulement si y est une solution de problème*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y + W) \qquad t \in [a, c] \\ My(a) + Ny(b) + Ry(c) = 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

En effet , si y satisfait le problème (2.16), on a

$$x'(t) = y'(t) + 0 = f(t, x)$$

et

$$\begin{aligned} Mx(a) + Nx(b) + Rx(c) = &\ My(a) + MW + Ny(b) + NW + Ry(c) + RW \\ = &\ My(a) + Ny(b) + Ry(c) + (M + N + R)W \\ = &\ 0 + \zeta = \zeta \end{aligned}$$

ce qui implique que x est vérifie le problème (2.12).

Théorème 2.3. *[7] Soit $f : [a, c] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction L^1-Carathéodory et $\zeta \in \mathbb{R}^n$. Supposons*

(A1) M, N, R sont des matrices carrées d'ordre n, telle que $\det(M + N + R) \neq 0$.

(A2) Il existe deux fonctions $p(.)$ et $r(.) \in L^1(J)$ telle que

$$\| f(t, x) \| \leqslant p(t)\|x\|_\infty + r(t)$$

pour tous $t \in J$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Alors le problème (2.12) admet une solution dans $C(J, \mathbb{R}^n)$ à condition de

$$\Gamma \| p \|_{L^1} < 1 \tag{2.17}$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma = \max\{ &\| (M + N + R)^{-1}R \|, \| (M + N + R)^{-1}M \|, \| (M + N + R)^{-1}(N + R) \|, \\ &\| (M + N + R)^{-1}(N + M) \| \}. \end{aligned}$$

Démonstration. D'après le corollaire 2.2 et pour prouver que (2.9), admet une solution $x = y + W$, il suffit de montrer que le problème suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y + W) & t \in J \\ My(a) + Ny(b) + Ry(c) = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

admet une solution y, où W est définit en remarque 2.2.
Maintenant, nous définissons l'opérateur $L : D(L) \subset X \longrightarrow Y$ tell que :

$$D(L) = \{y \in C^1(J) \mid My(a) + Ny(b) + Ry(c) = 0\}.$$

et pour $y \in D(L)$,

$$Ly = y'$$

Nous définissons aussi un opérateur non linéaire

$$\begin{aligned} G : \ & X \longrightarrow Y \\ & y \longmapsto (Gy)(t) = f(t, y(t) + W), \quad t \in J \end{aligned}$$

Il est clair que G est un opérateur borné de X en Y. Ensuite, il est facile de voir depuis $\det(M + N + R) \neq 0$ que $L : D(L) \subset X \longrightarrow Y$ est un application injective. Soit l'opérateur $K : Y \longrightarrow X$ telle que :

$$(Ke)(t) = \int_a^t e(s)ds + A \qquad pour \quad e \in Y$$

où

$$A = (M + N + R)^{-1}\Big(\zeta - N\int_a^b e(s)ds - R\int_a^c e(s)ds\Big).$$

Alors pour $e \in Y$, on a $Ke \in D(L)$ et $LKe = e$. Pour $y \in D(L)$, on a $KLy = y$.
Ensuite, nous avons que $y \in C(J, \mathbb{R}^n)$ est une solution de problème aux limites (2.18), si et seulement si y est une solution à l'équation de l'opérateur

$$Ly = Gy$$

qui est équivalent à l'équation

$$y = KGy.$$

Par ailleurs, en utilisant le théorème d'Ascoli-Arzelà pour conclure que les applications $\{KG\}$ sont une sous-ensemble bornée de X dans une sous-ensemble relativement compact de X, d'où, $KG : X \longrightarrow X$ est un application compact.

On a KG est continue alors KG est complètement continue.

Ensuite, nous appliquons le théorème de Leray-Schauder pour obtenir l'existence de solution de l'équation $y = KGy$. Pour ce faire, il suffit de vérifier que l'ensemble

$$\{y \in X,\ y = \lambda KGy, \lambda \in [0,1]\}$$

est borné, ce qui équivalent que l'ensemble de toutes les solutions possibles de la famille des équations

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda f(t, y(t) + \omega), & t \in [a,c] \\ My(a) + Ny(b) + Ry(c) = 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

est borné en $X = C(J, R^n)$ par une constante indépendante de $\lambda \in [0,1]$.

Soit $y(t)$ est une solution de (2.19) pour certains $\lambda \in [0,1]$. Il résulte de nos hypothèses que $f(t, y(t) + W) \in L^1(J, \mathbb{R}^n)$. Nous avons alors de (2.19) et estimer (2.13) de le lemme 2.4 que

$$\begin{aligned} \| y \|_X &\leq \lambda\Gamma \| f(t, y(t) + W) \|_Y \\ &\leq \Gamma[\| p \|_{L^1} \| y + W \|_X + \| r \|_{L^1}] \\ &\leq \Gamma[\| p \|_{L^1} (\| y \|_X + \| W \|_X) + \| r \|_{L^1}] \\ (1 - \Gamma \| p \|_{L^1}) \| y \|_X &\leq \Gamma(\| p \|_{L^1} \| W \|_X + \| r \|_{L^1}) \\ \| y \|_X &\leq \frac{\Gamma(\| p \|_{L^1} \| W \|_X + \| r \|_{L^1})}{1 - \Gamma \| p \|_{L^1}}. \end{aligned}$$

Il résulte de l'hypothèse (2.17) qu'il existe une constante δ indépendant de $\lambda \in [0,1]$, tel que

$$\| y \|_X \leq \delta.$$

□

Théorème 2.4. *[7] Soit $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction L^1-Carathéodory et $\zeta \in \mathbb{R}$. Supposons que $(A1)$ est vérifiée. Par ailleurs, nous supposons que*

$(A3)$ Il existe une fonction $p(.) \in L^1(J)$ tel que

$$\| f(t,u) - f(t,v) \| \leq p(t) \| u - v \| \tag{2.20}$$

$\forall t \in J$ et $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$. Alors, le problème (2.12) admet une solution unique en $C(J, R^n)$ à condition de

$$\Gamma \| p \|_{L^1} < 1 \tag{2.21}$$

où

$$\Gamma = \max\{\| (M+N+R)^{-1}R \|, \| (M+N+R)^{-1}M \|, \| (M+N+R)^{-1}(N+R) \|, \\ \| (M+N+R)^{-1}(N+M) \|\}.$$

Démonstration. Nous notons que (2.20) implique

$$\| f(t,u) \| \leq \| f(t,0) \| + p(t) \| u \|$$

$\forall t \in J$ et $\forall u \in \mathbb{R}$, ce qui implique que le problème aux limites (2.12) admet au moins une solution en $C(J,\mathbb{R}^n)$ par le théorème 2.3. Supposons que u_1, u_2, sont deux solutions de (2.12) en $C(J,\mathbb{R}^n)$. Lors on pose $z = u_1 - u_2$, nous obtenons

$$\begin{cases} z' = f(t,u_1(t)) - f(t,u_2(t)), \\ Mz(a) + Nz(b) + Rz(c) = 0. \end{cases}$$

En appliquant le lemme 2.4 et en utilisant l'hypothèse $(A3)$, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \| z \|_X &\leq \lambda\Gamma \| f(t,u_1(t)) - f(t,u_2(t)) \|_Y \\ &\leq \Gamma(\| p \|_{L^1} \| u_1 - u_2 \|_X) \\ &\leq \Gamma(\| p \|_{L^1} \| z \|_X) \end{aligned}$$

donc par (2.21), nous avons que

$$z(t) = 0, \quad pour \ \ t \in J.$$

Par conséquent $u_1 = u_2$. $\square$

Chapitre 3

Problèmes aux limites du second ordre à trois points

Dans ce chapitre nous considérons les deux problème aux limites de second ordre à trois points suivants :

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), & t \in (0, 1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = x(\eta) \end{cases} \tag{3.1}$$

et

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), & t \in (0, 1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha x(\eta), & (\alpha \neq 1) \end{cases} \tag{3.2}$$

où $f : [0,\, 1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, $\eta \in (0,\, 1)$.

3.1 Résultats pour le problème aux limites (3.1)

L'équation de problème (3.1) peutêtre écrite sous la forme d'une équation d'opérateur

$$Lx = Nx$$

où $L : D(L) \subset X \longrightarrow Y$ est un opérateur linéaire avec

$$D(L) = \{x \in W^{2,1}(0, 1),\, x(0) = 0, \quad x(1) = x(\eta)\}$$

et pour

$$x \in D(L), \quad L(x) = x''$$

et $N : X \longrightarrow Y$ est un opérateur non linéaire telle que

$$(Nx)(t) = f(t, x(t), x'(t)), \qquad t \in [0,1]$$

avec
$X = C^1([0,1]), \quad \|x\|_X = \max\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\}$
$Y = L^1([0,1]), \quad \|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt$
et l'espace de Sobolev

$$W^{2,1}(0,1) = \{x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; x, x' \;\text{ sont mesurables dans } [0,1] \;\; et \;\; x', x'' \in L^1([0,1])\}$$

muni de la norme :

$$\|x\|_{2,1} = \int_0^1 (|x(t)| + |x'(t)| + |x''(t)|)dt.$$

Dans cette lemme nous nous soucions de la forme de solution, non de son existence.

Lemme 3.1. *Soit $h \in Y$ et $x \in X$ de telle sorte que*

$$\begin{cases} x''(t) = h(t), \quad t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \qquad x(1) = x(\eta). \end{cases} \tag{3.3}$$

Alors

$$x(t) = \int_0^t (t-s)h(s)ds - \frac{t}{1-\eta}\int_0^1 (1-s)h(s)ds + \frac{t}{1-\eta}\int_0^\eta (\eta - s)h(s)ds.$$

Démonstration. De $x''(t) = h(t)$, on a $x'(t) = x'(0) + \int_0^t h(s)ds$
ce qui implique que

$$x(t) = x'(0)t + \int_0^t (t-s)h(s)ds$$

et de $x(1) = x(\eta)$, nous avons

$$x'(0) = -\frac{1}{1-\eta}\int_0^1 (1-s)h(s)ds + \frac{1}{1-\eta}\int_0^\eta (\eta - s)h(s)ds.$$

Alors

$$x(t) = \int_0^t (t-s)h(s)ds - \frac{t}{1-\eta}\int_0^1 (1-s)h(s)ds + \frac{t}{1-\eta}\int_0^\eta (\eta - s)h(s)ds.$$

□

Lemme 3.2. *Sous hypothèses de lemme 3.1. La solution de problème (3.3) est écrit sous la forme*

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)ds$$

telle que $G(t,s)$ (la fonction de Green associée) est donnée par suit :

$$G(t,s) = \begin{cases} -s, & s \leqslant \min\{\eta, s\} \\ \dfrac{s(t-1)+\eta(s-t)}{1-\eta}, & \eta \leqslant s \leqslant t \\ -t, & t \leqslant s \leqslant \eta \\ -\dfrac{t(1-s)}{1-\eta}, & s \geqslant \max\{\eta, t\}. \end{cases}$$

Démonstration. 1. Pour $t \leqslant \eta$ la solution de problème dans le lemme 3.1 peut être écrire comme :

$$\begin{aligned} x(t) = & \int_0^t (t-s)h(s)ds - \frac{t}{1-\eta}\Bigg(\int_0^t (1-s)h(s)ds \\ & + \int_t^\eta (1-s)h(s)ds + \int_\eta^1 (1-s)h(s)ds\Bigg) \\ & + \frac{t}{1-\eta}\Bigg(\int_0^t (\eta-s)h(s)ds + \int_t^\eta (\eta-s)h(s)ds\Bigg) \\ = & \frac{1}{1-\eta}\int_0^t \Big(1-\eta)(t-s) - t(1-s) + t(\eta-s)\Big)h(s)ds \\ & + \frac{t}{1-\eta}\int_t^\eta \Big((1-s)+(\eta-s)\Big)h(s)ds - \frac{t}{1-\eta}\int_\eta^1 (1-s)h(s)ds \\ = & \int_0^1 G(t,s)h(s)ds. \end{aligned}$$

2. Pour $\eta \leqslant t$ la solution de problème dans le lemme 3.1 peut être écrire comme :

$$\begin{aligned} x(t) = & \int_0^\eta (t-s)h(s)ds + \int_\eta^t (t-s)h(s)ds \\ & - \frac{t}{1-\eta}\Bigg(\int_0^\eta (1-s)h(s)ds + \int_\eta^t (1-s)h(s)ds \\ & + \int_t^1 (1-s)h(s)ds\Bigg) + \frac{t}{1-\eta}\int_0^\eta (\eta-s)h(s)ds \\ = & \frac{1}{1-\eta}\int_0^\eta \Big((1-\eta)(t-s) - t(1-s) + t(\eta-s)\Big)h(s)ds \\ & + \frac{1}{1-\eta}\int_\eta^t \Big((1-\eta)(t-s) - t(1-s)\Big)h(s)ds - \frac{t}{1-\eta}\int_t^1 (1-s)h(s)ds \\ = & \int_0^1 G(t,s)h(s)ds. \end{aligned}$$

D'après 1 et 2 on obtient

$$G(t,s)=\begin{cases} -s, & s\leqslant \min\{\eta,s\}\\ \dfrac{s(t-1)+\eta(s-t)}{1-\eta}, & \eta\leqslant s\leqslant t\\ -t, & t\leqslant s\leqslant \eta\\ -\dfrac{t(1-s)}{1-\eta}, & s\geqslant \max\{\eta,t\}. \end{cases}$$

□

Lemme 3.3. *Pour tout $x\in W^{2,1}(0,1)$ avec $x(0)=0$, $x(1)=x(\eta)$ il existe $\zeta\in(0,1)$, $\eta<\zeta<1$ telle que $x'(\zeta)=0$ et*

$$\|x\|_\infty\leqslant\|x'\|_\infty\leqslant\|x''\|_1$$

Démonstration. De $x\in W^{2,1}(0,1)$ et d'après le théorème de Rolle, il existe $\zeta\in(\eta,1)$ telle que $x'(\zeta)=0$.

Comme

$$\int_0^t x'(s)ds=x(t)-x(0)=x(t)$$

alors,

$$\forall t\in[0,1],\ \mid x(t)\mid=\mid\int_0^t x'(s)ds\mid\leqslant\int_0^1|x'(s)|ds$$

ce qui implique que

$$\|x\|_\infty\leqslant\|x'\|_\infty.$$

D'autre part, on a

$$\forall\ t\ \in\ [0,1],\ \parallel x''\parallel_1=\int_0^1|x''(s)|ds\geqslant\int_\zeta^t x''(s)ds=x'(t)$$

ce qui implique que

$$\|x'\|_\infty\leqslant\|x''\|_1.$$

□

Théorème 3.1. *[5] Soit $f:[0,1]\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction L^1-Carathéodory.*
Supposer qu'il existe des fonctions p,q,r dans $L^1(0,1)$ tell que

$$|f(t,u,v)|\leqslant p(t)|u|+q(t)|v|+r(t),\quad pour\ tous\ t\in[0,1],\ (u,v)\in\mathbb{R}^2\ et\ \eta\in(0,1).$$

Alors, le problème (3.1) admet au moins une solution dans $C^1[0,1]$ *a condition que*

$$\|p\|_1 + \|q\|_1 < 1.$$

Démonstration. Soit $X = C^1[0,1]$, $Y = L^1[0,1]$.
Nous définissons l'application linéaire $L : D(L) \subset X \longrightarrow Y$ avec

$$D(L) = \{x \in W^{2,1}(0,1)/\, x(0) = 0,\ x(1) = x(\eta)\}$$

et pour $x \in D(L)$,

$$L(x) = x''.$$

On définit aussi l'application non linéaire $N : X \longrightarrow Y$ avec

$$(Nx)(t) = f(t, x(t), x'(t)),\ \ t \in [0,1].$$

D'autre part, on suppose l'opérateur linéaire $K : Y \longrightarrow X$ défini, pour $y \in Y$ par

$$(Ky)(t) = \int_0^t (t-s)y(s)ds - \frac{t}{1-\eta}\int_\eta^t (1-s)y(s)ds + \frac{t}{1-\eta}\int_0^\eta (\eta - s)y(s)ds.$$

On a, pour $y \in Y, Ky \in D(L)$ et $LKy = y$, et pour $x \in D(L), KLx = x$, ce qui implique que $L^{-1} = K$.
Nous avons,
($x \in C^1[0,1]$ est une solution de (3.1))$\Leftrightarrow$ (x est un solution d'équation d'opérateur $Lx = Nx$) ce qui équivalent a l'équation $x = KNx$.
Nous appliquons le théorème alternative de Leray-Shauder pour obtenir l'existence de solution de l' équation $x = KNx$.
Pour ce faire, il suffit de vérifier que l'ensemble de toutes les solution possibles de la famille des équations

$$\begin{cases} x''(t) = \lambda f(t, x(t), x'(t)), & t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = x(\eta) \end{cases} \tag{3.4}$$

est bornée dans X par une constante indépendante de $\lambda \in [0,1]$.

Au début, nous montrons que KN est complètement continu.

- KN est continu :

$$\begin{aligned}\| KN \|_X &\leqslant \int_0^1 \mid G(t,s)f(s,x(s),x'(s)) \mid ds \\ &\leqslant \max_{(t,s)\in[0,1]^2} G(t,s) \int_0^1 \mid f(t,x(s),x'(s)) \mid ds \\ &\leqslant \max_{(t,s)\in[0,1]^2} G(t,s) \int_0^1 h_r(s)ds \\ &\leqslant \max_{(t,s)\in[0,1]^2} G(t,s) \parallel h_r \parallel_1 .\end{aligned}$$

  Ce qui prouve que KN est borné, donc continu.

- De plus, en d'utiliser le théorème d'Arzelà-Ascoli que KG est compact.

  Soit $\Omega = \{x \in X, \parallel x \parallel_X \leqslant r\}, (r > 0)$ un ensemble borné de X.

Comme $\parallel KN \parallel_X \leqslant \max_{(t,s)\in[0,1]^2} G(t,s) \parallel h_r \parallel_1 .\forall x \in \Omega, \forall t \in [0,1]$, alors les fonctions de Ω sont uniformément bornées.

D'autre part, soit $\varepsilon > 0$, $x \in \Omega$ et comme $G(t,s)$ est continue sur $[0,1] \times [0,1]$ (qui est compact) alors $G(t,s)$ est uniformément continue.

Donc il existe $\delta > 0$, telle que $\mid G(t_1,s) - G(t_2,s) \mid \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\parallel h_r \parallel_1}$ pour $|t_1 - t_2| < \delta$ et pour tous s fixé dans $[0,1]$, alors pour $x \in \Omega$ on a,

$$\begin{aligned}\mid KNx(t_1) - KNx(t_2) \mid &\leqslant \int_0^1 \mid G(t_1,s) - G(t_2,s) \mid\mid f(s,x(s),x'(s) \mid ds \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{\parallel h_r \parallel_1} \parallel h_r \parallel_1 = \varepsilon,\end{aligned}$$

ce que prouve que les fonctions de Ω sont équicontinues.

En vertu du théorème d'Ascoli-Arzela, $KN(\Omega)$ est relativement compact, donc KN transforme tout borné à un ensemble relativement compact, ce qui donne KN est compact.

Et comme KN est continu, alors on déduit qu'il est complètement continu.

Soit maintenant x une solution de (3.4) pour certain $\lambda \in [0,1]$, et d'après le lemme 3.3

$$\begin{aligned}\|x''\|_1 &= \lambda \|f(t,x(t),x'(t))\|_1 \\ &\leqslant \|p\|_1\|x\|_\infty + \|q\|_1\|x'\|_\infty + \|r\|_1 \\ &\leqslant (\|p\|_1 + \|q\|_1)\|x''\|_1 + \|r\|_1,\end{aligned}$$

donc

$$(1 - (\|p\|_1 + \|q\|_1))\|x''\|_1 \leqslant \|r\|_1$$

ensuite

$$\|x''\|_1 \leqslant \frac{1}{1-(\|p\|_1+\|q\|_1)}\|r\|_1 = C \ (constant)$$

ce qui implique que $\quad \|x\|_\infty \leqslant C \quad$ et $\quad \|x'\|_\infty \leqslant C \quad$ donc $\quad \|x\|_X \leqslant C.$

□

3.2 Résultats pour le problème aux limites (3.2)

Avant de donner les résultats d'existence et l'unicité des solutions de problème (3.2), nous offrons des lemmes préliminaires.

Dans cette lemme nous nous soucions de la forme de solution, non de son existence.

Lemme 3.4. *Soit* $h \in L^1[0,1]$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\eta \neq 1$ *avec* $\eta \in (0,1)$ *et* $x \in C^1[0,1]$, *de telle sort que soit*

$$\begin{cases} x''(t) = h(t), \ t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha x(\eta). \end{cases} \tag{3.5}$$

Alors,

$$x(t) = \int_0^t (t-s)h(s)ds + \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta-s)h(s)ds - \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)h(s)ds.$$

Démonstration. on a :

$$x''(t) = h(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x'(0)t + \int_0^t (t-s)h(s)ds.$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} & x(1) = x'(0) + \int_0^1 (1-s)h(s)ds \\ et \quad & x(\eta) = x'(0)\eta + \int_0^\eta (\eta-s)h(s)ds \end{aligned}$$

Comme $x(1) = \alpha x(\eta)$, nous avons

$$(1-\alpha\eta)x'(0) = \alpha\int_0^\eta (\eta-s)h(s)ds - \int_0^1 (1-s)h(s)ds.$$

Donc,

$$x'(0) = \frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta-s)h(s)ds - \frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)h(s)ds.$$

Alors,

$$x(t) = \int_0^t (t-s)h(s)ds + \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta - s)h(s)ds - \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)h(s)ds.$$

□

Lemme 3.5. *Sous les hypothèses de lemme 3.4, la solution du problème (3.5) peut s'écrire sous la forme*

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)ds$$

avec $G(t,s)$ est la fonction de Green définir par :

$$G(t,s) = \frac{1}{1-\alpha\eta}\begin{cases} s[(t-1)+\alpha(\eta-t)], & s \leqslant \min\{t,\eta\} \\ s(t-1)-\alpha\eta(t-s), & \eta \leqslant s \leqslant t \\ t[(s-1)+\alpha(\eta-s)], & t \leqslant s \leqslant \eta \\ t(s-1), & s \geqslant \max\{t,\eta\}. \end{cases}$$

Démonstration. 1. pour $t \leqslant \eta$, la solution de problème (3.5) peut être exprimée comme

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t (t-s)h(s)ds + \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\Big[\int_0^t (\eta-s)h(s)ds + \int_t^\eta (\eta-s)h(s)ds\Big] \\ &+ \frac{t}{1-\alpha\eta}\Big[\int_0^t (1-s)h(s)ds + \int_\eta^1 (1-s)h(s)ds\Big] \\ &= \int_t^\eta \frac{t[(s-1)+\alpha(\eta-s)]}{1-\alpha\eta}h(s)ds + \int_\eta^1 \frac{t(s-1)}{1-\alpha\eta}h(s)ds \\ &+ \int_0^t \frac{s[(t-1)+\alpha(\eta-t)]}{1-\alpha\eta}h(s)ds. \end{aligned}$$

2. pour $t \geqslant \eta$, la solution de problème (3.5) peut être exprimée comme

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^\eta (t-s)h(s)ds + \int_\eta^t (t-s)h(s)ds + \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta-s)h(s)ds \\ &- \frac{t}{1-\alpha\eta}\Big[\int_0^\eta (1-s)h(s)ds + \int_\eta^t (1-s)h(s)ds + \int_t^1 (1-s)h(s)ds\Big] \\ &= \int_0^\eta \frac{s[(t-1)+\alpha(\eta-t)]}{1-\alpha\eta}h(s)ds + \int_\eta^t \frac{s(t-1)-\alpha\eta(t-s)}{1-\alpha\eta}h(s)ds \\ &+ \int_t^1 \frac{t(s-1)}{1-\alpha\eta}h(s)ds. \end{aligned}$$

D'après 1 et 2 on obtient

$$G(t,s)=\frac{1}{1-\alpha\eta}\begin{cases} s[(t-1)+\alpha(\eta-t)], & s\leqslant \min\{t,\eta\}\\ s(t-1)-\alpha\eta(t-s), & \eta\leqslant s\leqslant t\\ t[(s-1)+\alpha(\eta-s)], & t\leqslant s\leqslant \eta\\ t(s-1), & s\geqslant \max\{t,\eta\}.\end{cases}$$

□

Lemme 3.6. *Soit* $\alpha\in\mathbb{R},\quad \alpha\eta\neq 1$ *avec* $\eta\in(0,1)$ *et* $x\in C^1[0,1]$.

- *Si* $\alpha\leqslant 1$, *alors* $\|x\|_\infty\leqslant\|x'\|_\infty\leqslant\|x''\|_1$.
- *Si* $1<\alpha<\dfrac{1}{\eta}$, *alors* $\|x\|_\infty\leqslant\|x'\|_\infty\leqslant\dfrac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}\|x''\|_1$.

Démonstration. • Si $\alpha\leqslant 1$

$\big(x(t)=\displaystyle\int_0^t x'(s)ds\big)\Rightarrow(\|x\|_\infty\leqslant t\|x'\|_\infty\leqslant\|x'\|_\infty)$.

D'autre part, si $x\in W^{2,1}(0,1)$ avec $x(0)=0, x(1)=\alpha x(\eta)$ et $\alpha\leqslant 1$ il existe $\zeta\in(0,1)$ telle que $x'(\zeta)=0$.

En effet, par contradiction,

si $x'(t)>0$ pour chaque $t\in(0,1)$, donc x est strictement croissante sur $[0,1]$, alors $x(t)>0$ pour chaque $t\in(0,1)$, donc $x(1)>x(\eta)$ ce qui implique que $\alpha>1$, ceci est contredit.

Si $x'(t)<0$ pour chaque $t\in(0,1)$, donc x est strictement décroissante sur $[0,1]$,alors $x(t)<0$ pour chaque $t\in(0,1)$ donc $x(1)<x(\eta)$ ce qui implique que $\alpha>1$, ceci est contredit.

On a donc : $\forall t\in[0,1]:\quad |x'(t)|=|\displaystyle\int_\zeta^t x''(s)ds|\leqslant\int_0^1|(x''(s))|ds=\|x''\|_1$, ensuite

$$\|x'\|_\infty\leqslant\|x''\|_1.$$

• Si $1<\alpha<\frac{1}{\eta}$, alors

pour $x\in W^{2,1}(0,1)$ avec $x(0)=0, x(1)=\alpha x(\eta)$. D'après le théorème des accroissement finis, il existe $\xi\in(\eta,1)$ telle que $x(1)-x(\eta)=x'(\xi)(1-\eta)$, ce qui donne $x'(\xi)=\dfrac{\alpha-1}{1-\eta}x(\eta)$.

On a

$$
\begin{aligned}
\| x'' \|_1 & \geqslant \int_\xi^t | x''(s) | \, ds && pour \ \ tout \ \ t \in [0,1] \\
& \geqslant \left| \int_\xi^t x''(s) ds \right| && pour \ \ tout \ \ t \in [0,1] \\
& \geqslant | x'(t) | - | x'(\xi) | && pour \ \ tout \ \ t \in [0,1] \\
& \geqslant \| x' \|_\infty - \frac{\alpha - 1}{1 - \eta} | x(\eta) | \\
& \geqslant \| x' \|_\infty - \frac{\alpha - 1}{1 - \eta} \frac{1}{\alpha} \| x' \|_1 \\
& \geqslant \| x' \|_\infty - \frac{\alpha - 1}{1 - \eta} \frac{1}{\alpha} \| x' \|_\infty \\
& \geqslant (1 - \frac{\alpha - 1}{\alpha(1 - \eta)}) \| x' \|_\infty,
\end{aligned}
$$

alors $\| x' \|_\infty \leqslant \dfrac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta} \| x'' \|_1$, et selon le cas président $\| x \|_\infty \leqslant \| x' \|_\infty$, donc

$$\| x \|_\infty \leqslant \| x' \|_\infty \leqslant \frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta} \| x'' \|_1 \ .$$

□

Théorème 3.2. *[8] Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction L^1-Carathéodory .*
Supposons qu'il existe des fonctions p, q, r dans $L^1[0,1]$ tels que

$$| f(t,u,v) | \leqslant p(t) | u | + q(t) | v | + r(t),$$

pour tous $t \in [0,1]$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}, \eta \in (0,1)$ sont données .
Alors, le problème (3.2) admet une solution dans $C^1[0,1]$ pourvu que

$$
\begin{cases}
\| p \|_1 + \| q \|_1 < 1, & si \ \alpha \leqslant 1 \\
\| p \|_1 + \| q \|_1 < \dfrac{1-\alpha\eta}{\alpha(1-\eta)}, & si \ 1 < \alpha < \frac{1}{\eta}.
\end{cases}
$$

Démonstration. Soit $X = C^1[0,1], \ Y = L^1[0,1]$.
On définit l'application linéaire $L : D(L) \subset X \to Y$ avec

$$D(L) = \{x \in W^{2,1}(0,1) : x(0) = 0, x(1) = \alpha x(\eta)\},$$

et pour $x \in D(L)$, $Lx = x''$.
Aussi définir l'application non linéaire $N : X \longrightarrow Y$ avec

$$(Nx)(t) = f(t, x(t), x'(t)), \ t \in [0,1].$$

Après, on introduit l'opérateur linéaire $K : Y \longrightarrow X$, défini pour $y \in Y$ par

$$(Ky)(t) = \int_0^t (t-s)h(s)ds + \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta - s)h(s)ds - \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)h(s)ds.$$

Au début, nous montrons que KN est complètement continu (compact + continue).

- KN est continu :

$$\begin{aligned}\| KN \|_X &\leqslant \textstyle\int_0^1 \mid G(t,s)f(s,x(s),x'(s)) \mid ds \\ &\leqslant \max_{(t,s)\in[0,1]^2} G(t,s)\int_0^1 \mid f(t,x(s),x'(s)) \mid ds \\ &\leqslant \max_{(t,s)\in[0,1]^2} G(t,s)\int_0^1 h_r(s)ds \\ &\leqslant \max_{(t,s)\in[0,1]^2} G(t,s) \parallel h_r \parallel_1 .\end{aligned}$$

Ce qui prouve que KN est borné, donc continu.

- KN est compact.

Pour ce faire, en d'utiliser le théorème d'Arzelà-Ascoli por prouver que KG est compact.
Soit $\Omega = \{x \in X, \parallel x \parallel_X \leqslant r\}, (r > 0)$ un ensemble borné de X.
Comme $\parallel KN \parallel_X \leqslant \max_{(t,s)\in[0,1]^2} G(t,s) \parallel h_r \parallel_1 .\forall x \in \Omega, \forall t \in [0,1]$, alors les fonctions de Ω sont uniformément bornées.
D'autre part, soit $\varepsilon > 0$, $x \in \Omega$ et comme $G(t,s)$ est continue sur $[0,1]\times[0,1]$ (qui est compact) alors $G(t,s)$ est uniformément continue.
Donc il existe $\delta > 0$, telle que $\mid G(t_1,s) - G(t_2,s) \mid \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\parallel h_r \parallel_1}$ pour $|t_1 - t_2| < \delta$ et pour tous s fixé dans $[0,1]$, alors pour $x \in \Omega$ on a,

$$\begin{aligned}\mid KNx(t_1) - KNx(t_2) \mid &\leqslant \int_0^1 \mid G(t_1,s) - G(t_2,s) \mid\mid f(s,x(s),x'(s) \mid ds \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{\parallel h_r \parallel_1} \parallel h_r \parallel_1 = \varepsilon,\end{aligned}$$

ce que prouve que les fonctions de Ω sont équicontinues.
En vertu du théorème d'Ascoli-Arzela, $KN(\Omega)$ est relativement compact, donc KN transforme tout borné à un ensemble relativement compact, ce qui donne KN est compact.
Et comme KN est continu, alors on déduit qu'il est complètement continu.
Ensuite, nous appliquons le théorème de Leray-Schauder pour obtenir l'existence d'une solution pour $x = KNx$.

Pour ce faire, il suffit de vérifier que l'ensemble de toutes les solutions possibles de la famille des équations

$$\begin{cases} x''(t) = \lambda f(t, x(t), x'(t)), \quad 0 < t < 1, \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha x(\eta) \end{cases} \tag{3.6}$$

est borné dans $C^1[0,1]$ par une constante indépendante de $\lambda \in [0,1]$.

- Si $\alpha \leqslant 1$: on a $\| x \|_\infty \leqslant \| x' \|_\infty \leqslant \| x'' \|_1$,

$$\begin{aligned} \| x'' \|_1 &= \lambda f(t, x(t), x'(t)) \\ &\leqslant \| p \|_1 \| x \|_\infty + \| q \|_1 \| x \|_\infty + \| r \|_1 \\ &\leqslant \| p \|_1 \| x'' \|_1 + \| q \|_1 \| x'' \|_1 + \| r \|_1 \end{aligned}$$

donc

$$\Big(1 - (\| p \|_1 + \| q \|_1)\Big) \| x'' \|_1 \leqslant \| r \|_1$$

alors,

$$\| x'' \|_1 \leqslant \frac{1}{1 - (\| p \|_1 + \| q \|_1)} \| r \|_1 \ .$$

Il s'ensuit qu'il y a une constante c, indépendante de $\lambda \in [0,1]$,
$(c = \dfrac{1}{1 - (\| p \|_1 + \| q \|_1)} \| r \|_1)$ de telle sorte que $\| x'' \|_1 \leqslant c$,
ce qui implique que $\| x \|_\infty \leqslant c$ et $\| x' \|_\infty \leqslant c$ donc,

$$\| x \|_X \leqslant c.$$

- Si $1 < \alpha < \dfrac{1}{\eta}$, on a $\| x \|_\infty \leqslant \| x' \|_\infty \leqslant \dfrac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta} \| x'' \|_1$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \| x'' \|_1 &= \lambda f(t, x(t), x'(t)) \\ &\leqslant \| p \|_1 \| x \|_\infty + \| q \|_1 \| x \|_\infty + \| r \|_1 \\ &\leqslant \frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta} (\| p \|_1 + \| q \|_1) \| x'' \|_1 + \| r \|_1, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta} \left(\frac{1-\alpha\eta}{\alpha(1-\eta)} - (\| p \|_1 + \| q \|_1) \right) \| x'' \|_1 \leqslant \| r \|_1$$

i.e.

$$\frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta} \| x'' \|_1 \leqslant \frac{1}{\dfrac{1-\alpha\eta}{\alpha(1-\eta)} - (\| p \|_1 + \| q \|_1)} \| r \|_1$$

ensuite

$$\| x'' \|_1 \leqslant \frac{1}{1 - \dfrac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}(\| p \|_1 + \| q \|_1)} \| r \|_1 = c'$$

ce qui implique que

$$\| x \|_\infty \leqslant c' \quad et \quad \| x' \|_\infty \leqslant c',$$

alors $\| x \|_X \leqslant c'$.

Il résulte que l'ensemble de toutes les solutions de la famille des équations (3.6) est borné en $C^1[0,1]$ par une constante, indépendant de $\lambda \in [0,1]$. d'où le résultat.

En ce qui concerne l'unicité de solution du problème (3.2), nous avons le résultat suivant. □

Théorème 3.3. *[4] soit $f : [0,1] \times \mathbb{R}^1 \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction L^1- Caratheodory. Supposons qu'il existe des fonctions p, q, r dans $L^1[0,1]$ tel que*

$$| f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2) | \leqslant p(t) \mid u_1 - u_2 \mid + q(t) \mid v_1 - v_2 \mid,$$

pour tous $t \in [0,1]$ et $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2$, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\eta \in (0,1)$ sont données.
Alors, le problème (3.2) admet une seule solution dans $C^1[0,1]$

$$pourvu\ que \begin{cases} \| p \|_1 + \| q \|_1 < 1, & si \quad \alpha \leqslant 1 \\ \| p \|_1 + \| q \|_1 < \dfrac{1-\alpha\eta}{\alpha(1-\eta)}, & si \quad 1 < \alpha < \dfrac{1}{\eta}. \end{cases}$$

Démonstration 3.1. *L'existence de solution du problème (3.2) est comme le théorème 3.2.*

- *Pour montrer l'unicité.*

Soit x_1, x_2 sont deux solutions pour le problème (3.2), et en posant $z = x_1 - x_2$, alors nous avons

$$\begin{cases} z''(t) = f(t, x_1, x_1') - f(t, x_2, x_2'), & t \in (0,1) \\ z(0) = 0, \ z(1) = \alpha z(\eta). \end{cases}$$

On a donc,

$$\begin{aligned} \| z'' \|_1 &= \| f(t, x_1, x_1') - f(t, x_2, x_2') \|_1 \\ &\leqslant \| p \|_1 \| x_1 - x_2 \|_\infty + \| q \|_1 \| x_1' - x_2' \|_\infty \\ &\leqslant \| p \|_1 \| z \|_\infty + \| q \|_1 \| z' \|_\infty . \end{aligned}$$

- *Si $\alpha \leqslant 1$, d'après lemme 3.6, on a $\| z \|_\infty \leqslant \| z' \|_\infty \leqslant \| z'' \|_1$, donc*

$$\| z'' \|_1 \leqslant (\| p \|_1 + \| q \|_1) \| z'' \|_1$$

et comme $\| p \|_1 + \| q \|_1 < 1$, *on a* $\| z'' \|_1 = 0$, *donc* $\| z \|_\infty = 0$, *ce qui implique que* $x_1 = x_2$.

- *Si* $1 < \alpha < \dfrac{1}{\eta}$, *d'après lemme* 3.6, *on a*

$$\| z'' \|_1 \leqslant \frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}(\| p \|_1 + \| q \|_1) \| z'' \|_1,$$

et comme $\| p \|_1 + \| q \|_1 < \dfrac{1-\alpha\eta}{\alpha(1-\eta)}$, *on a* $\| z'' \|_1 = 0$, *donc* $\| z \|_\infty = 0$, *ce qui implique que* $x_1 = x_2$, *d'où le résultat.*

Exemple 1. *considérons le problème suivant*

$$\begin{cases} x''(t) = \dfrac{t-1}{16}x + \dfrac{1}{8}x' + \sin(x'), & t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \ x(1) = \dfrac{3}{2}x(\dfrac{1}{2}). \end{cases} \tag{3.7}$$

Soit $f(t,u,v) = \dfrac{t-1}{16}u + \dfrac{1}{8}v + \sin(v)$, *on a* $| f(t,u,v) | \leqslant \dfrac{1}{16} | u | + \dfrac{1}{8} | v | + 1$,
dans ce cas, $p(t) = \dfrac{1}{16}$, $q(t) = \dfrac{1}{8}$, $r(t) = 1$ *alors,* $\| p \|_1 + \| q \|_1 = \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{16}$
et comme $\alpha = \dfrac{3}{2}$, $1 < \alpha < 2$ *on a* $\| p \|_1 + \| q \|_1 < \dfrac{1-\alpha\eta}{\alpha(1-\eta)}$, $(\dfrac{3}{16} < \dfrac{1}{3})$.
Nous notons que les conditions de théorème 3.2 *ont été atteints, ce qui implique qu'il existe une solution* $x \in C^1[0,1]$ *de problème* (3.7).

Contre exemple 1. *Nous remarquons que le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} x'' = -\dfrac{\pi^2}{4}x + 1, \ t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \ x(1) = \sqrt{2}\, x(\dfrac{1}{2}) \end{cases}$$

n'a pas de solution.
En effet, dans ce cas, on a, $\alpha = \sqrt{2}$ *et* $\eta = \dfrac{1}{2}$, $\alpha < \dfrac{1}{\eta}$, *en plus nous avons*

$$f(t,u,v) = -\frac{\pi^2}{4}u + 1, \ p(t) = \frac{\pi^2}{4}, \ q(t) = 0, \ r(t) = 1.$$

Ici $\| p \|_1 + \| q \|_1 = \dfrac{\pi^2}{4} + 0 > \dfrac{1-\alpha\eta}{\alpha(1-\eta)} = \sqrt{2} - 1$, *i.e. la condition du théorème* 3.2 *n'est pas satisfait.*
D'autre part la solution générale de l'équation différentielle, $x'' = -\dfrac{\pi^2}{4}x + 1$ *est*

$$x(t) = c_1 \cos(\frac{\pi}{2}t) + c_2 \sin(\frac{\pi}{2}t) + \frac{4}{\pi^2}$$

et comme $x(0) = 0$, *on a* $x(t) = -\frac{4}{\pi^2}\cos(\frac{\pi}{2}t) + c_2\sin(\frac{\pi}{2}t) + \frac{4}{\pi^2}$.
Mais comme $x(1) = \sqrt{2}\,x(\frac{1}{2})$, *nous avons*

$$c_2 + \frac{4}{\pi^2} = c_2 + \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} - \frac{4}{\pi^2}.$$

Ce qui implique tout simplement $\sqrt{2} = 2$, **une contradiction**.

3.3 Problèmes aux limites du second ordre à m-points

On considère par exemple le problème aux limites à m-points :

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \ t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \ x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\xi_i) \end{cases} \tag{3.8}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue ou de L^1-Carathéodory, $a_i \in \mathbb{R}$, $\xi_i \in (0,1)$, $i = 1, 2, ..., m-2$ avec $0 < \xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_{m-2} < 1$.
Une fois les a_i's ont le même signe, une autre fois les a_i's n'ont pas le même signe.

3.3.1 Problème aux limites à m-points, réduction à trois points

En prenant le problème (3.8) avec toutes les a_i's ont le même signe et $\alpha = \sum_{i=1}^{m-2} a_i \neq 0$.
Ici on peut réduire cette problème à un problème à trois points.
En effet, pour chaque solution du problème (3.8), notons

$$A = \min_{t\in[\xi_1,\xi_{m-2}]} x(t), \quad B = \max_{t\in[\xi_1,\xi_{m-2}]} x(t).$$

- Si $a_i \in [0, +\infty)$, alors $a_i A \leqslant a_i x(\xi_i) \leqslant a_i B, \quad i \in \{1, 2, ..., m-2\}$.
- Si $a_i \in (-\infty, 0]$, alors $a_i A \geqslant a_i x(\xi_i) \geqslant a_i B, \quad i \in \{1, 2, ..., m-2\}$.

Dans les deux cas, nous avons que

$$A \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\xi_i)}{\sum_{i=1}^{m-2} a_i} \leqslant B.$$

Il s'ensuit qu'il existe $\eta \in [\xi_1, \xi_{m-2}]$ telle que $x(\eta) = \frac{x(1)}{\alpha}$, ce qui implique que $x(t)$ est aussi un solution de problème (3.2).

3.3.2 Cas générale

Maintenant, on considère le problème (3.8) avec les a_i's n'ont pas le même signe. Dans cette lemme nous nous soucions de la forme de solution, non de son existence.

Lemme 3.7. *Soit $h \in L^1[0,1]$ et $a_i \in \mathbb{R},\ \ i \in \{1, ..., m-2\}$ avec $\sum_{i=1}^{m-2} a_i \neq 1$ et $x \in C^1[0,1]$, de telle sort que soit*

$$\begin{cases} x''(t) = h(t),\ t \in (0,1) \\ x(0) = 0,\ x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\xi_i). \end{cases}$$

Alors,

$$x(t) = \int_0^t (t-s)h(s)ds + \frac{t}{(1-\sum a_i\xi_i)} \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s)h(s)ds - \frac{t}{(1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\xi_i)} \int_0^1 (1-s)h(s)ds.$$

Démonstration 3.2. *De la même méthode de démonstration que le lemme 3.4.*

Lemme 3.8. *:*

- *Si $0 < \sum_{i=1}^{m-2} a_i < 1$, alors $\|x\|_\infty \leqslant \|x'\|_\infty \leqslant \|x''\|_1$.*

Démonstration 3.3. *De la même méthode de démonstration que le lemme 3.6.*

Théorème 3.4. *[8] Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction L^1-Carathéodory Supposons qu'il existe des fonctions p, q, r dans $L^1[0,1]$ tell que*

$$|f(t,u,v)| \leqslant p(t)|u| + q(t)|v| + r(t)$$

$$\textit{pour tous } t \in [0,1],\quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \textit{ et soit } a_i \in \mathbb{R}$$

$$\textit{avec tout les } a_i's \textit{ n'ayant pas le meme singne},$$

$$\xi_i \in (0,1),\ i \in \{1,2,...,m-2\},\ 0 < \xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_{m-2} < 1 \textit{ telle que } 0 < \sum_{i=1}^{m-2} a_i < 1.$$

Alors, le problème (3.8) admet une solution dans $C^1[0,1]$ a condition que

$$\|p\|_1 + \|q\|_1 < 1.$$

Démonstration 3.4. *De la même manière que démonstration que le théorème 3.2.*

Exemple 2. *Considérons le problème suivant*

$$\begin{cases} x''(t) = \dfrac{t-1}{20}x + \dfrac{1}{10}x' + \cos(x'), \ t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \ x(1) = \dfrac{1}{4}x(\dfrac{1}{4}) - \dfrac{1}{4}x(\dfrac{1}{2}) + \dfrac{1}{4}x(\dfrac{3}{4}). \end{cases} \tag{3.9}$$

Soit $f(t,u,v) = \dfrac{t-1}{20}u + \dfrac{1}{10}v + \cos(v)$, *on a* $\mid f(t,u,v) \mid \leqslant \dfrac{1}{20} \mid u \mid + \dfrac{1}{10} \mid v \mid +1$, *dans ce cas,* $p(t) = \dfrac{1}{20}$, $q(t) = \dfrac{1}{10}$, $r(t) = 1$ *alors,* $\parallel p \parallel_1 + \parallel q \parallel_1 = \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{3}{20}$ *et comme* $\alpha = a_1 + a_2 + a_3 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$, *on a* $0 < \alpha < 1$ *et* $\parallel p \parallel_1 + \parallel q \parallel_1 < 1$.
Nous notons que les conditions du théorème 3.4 ont été atteints, ce qui implique qu'il existe une solution $x \in C^1[0,1]$ *de théorème 3.9.*

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté des résultats d'existence et d'unicité des solutions pour quelques classes des équations différentielles non linéaires posées sur des intervalles bornés associés à des conditions aux limites non locales.

Nous avons établi au début de ce travail des résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites du premier ordre à trois points. L'existence de solutions est prouvé par le théorème de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

La deuxième partie, a été consacré à l'étude quelques résultats d'existence et d'unicité pour des problèmes aux limites du second ordre à trois points, puis on a généralisé le résultat au cas de plusieurs points.

La méthodologie pour prouver les théories de l'existence dépend de la conversion des problèmes proposés en équation opérationnelle, en plus d'utilisation du critère de compacité pour appliquer le théorème d'Ascoli-Arzéla avec l'insertion du théorème de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder de point fixe pour obtenir les résultats appropriés.

Les résultats présentés dans ce mémoire sont souvent illustrés par des exemples d'applications.

Références

[1] W.E. Boyce, R.C. Diprima, Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems, John Wiley and Sons (1986).

[2] K.Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1985.

[3] A.Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-verlag, New-York, 2003.

[4] C. Gupta, Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for second order ordinary differential equations, J. Math. Anal. Appl. 168 (1992), 540-551.

[5] C. Gupta, A note on a second order three-point boundary value problem, J. Math. Anal. Appl. 186 (1994), 277-281.

[6] C. Gupta, S.K. Ntouyas and P.Ch. Tsamatos, Solvability of an m-point boundary value problem for second order ordinary differential equations, J. Math. Anal. Appl. 189 (1995), 575-584.

[7] R. Ma, Existence and uniqueness of solutions to first-order three-point boundary value problems, Appl. Math. Lett. 15 (2002), 211-216.

[8] R. Ma, A survey on nonlocal boundary value problems, Applied Mathematics E-Notes. 7 (2007), 257-279.

[9] S. Marano, A remark on a second order three-point boundary value problem, J. Math. Anal. Appl. 183 (1994), 518-522.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié quelques problèmes aux limites associés à des équations différentielles ordinaires posés sur des intervalles bornés et pour lesquels les conditions aux bords sont non locales. Cette étude se compose en trois chapitres.
Le premier chapitre considère la formulation mathématique de contact et rappel d'analyse.
Le deuxième chapitre est divisé en deux sections. Dans la première section considère le problème aux limites du première ordre à trois points dans $\mathbb{R}$, et dans le deuxième section nous étudions le même problème dans $\mathbb{R}^n$.
Le troisième chapitre nous considérons deux problèmes aux limites de second ordre à trois points et à m-points.
Mots-Clés : Non locale, critère de compacité, existence, unicité, le théorème d'Ascoli-Arzéla, le théorème d'alternative non linéaire de Leray-Schauder, le point fixe.

Abstract

In this memory, we have studied some boundary problems associated with ordinary differential equations on bounded intervals and for which boundary conditions are non-local. This study consists of three chapters.
The first chapter considers the mathematical formulation of contact and recall of analysis.
The second chapter is divided into two sections. The first section consider the boundary value problem of the first order with three points in $\mathbb{R}$, and in the second section we study the same problem in $\mathbb{R}^n$.
The third chapter we consider two problems with second order three-point boundary and m-points.
Words keys : Nonlocal, compactness criterion, existence, uniqueness, the Ascoli-Arzéla theorem, the nonlinear alternative of Leray-Schauder theorem, fixed point.

ملخص

هدف هذه المذكرة هو دراسة المسائل الحدية غير المحلية, تتكون المذكرة من ثلاث فصول.
تطرقنا في الفصل الأول إلى بعض الوسائل الرياضية اللازمة في هذه المذكرة.
أما في الفصل الثاني مكون من جزئين, الجزء الأول ندرس المسألة الحدية غير المحلية من الدرجة الأولى ذات ثلاث نقط في $\mathbb{R}$, أما الجزء الثاني ندرس نفس الجملة في $\mathbb{R}^n$.

وفي الفصل الثالث ندرس المسألة الحدية غير المحلية من الدرجة الثانية ذات ثلاث نقط ثم ذات m نقطة.
الكلمات المفتاحية : غير محلي , معيارالتراص , الوجود, الوحدانية, نظرية أسكولي-أرزيلا, النظرية البديل غير الخطي ليراي شاودر , النقطة الثابتة.