

République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche
Scientifique**



Université Echahid Hamma Lakhdar d'El-Oued

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie mécanique

Spécialité : Energétique et Énergies renouvelables

Thème

Étude numérique de comportement mécanique des plaques
isotropes et stratifiées en utilisant une formulation en éléments
finis base sur la théorie de premier ordre

REISSNER-MINDLIN

Devant le jury composé de :

Présenté par :

Mr: Bousbia Saif Eddine

Président

- Slimani Bachir

Dr: Gherbi Mohammed Taher

Examinateur

- Ghemima Mohammed

Mr: Zine Ali

Encadreur

2020-2019

DEDICACE

Nous dédions cet humble acte à nos parents, vivants ou morts, mon exemple, bien aimé, qu'Allah ait son âme pour tous ce qu'il nous a donné et appris spécialement la patience et l'amour de la science.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, nous exprimons mes vifs remerciements à mon directeur de mémoire, Monsieur **Ali Zine**, qui nous a supervisés pendant la période de mémoire avec grande patience et bonne humeur. Son assistance, sa disponibilité, les encouragements qu'il nous a cessé de me prodiguer et enfin la confiance qui a toujours été témoin de nous, nous a beaucoup aidés à faire ce travail. Nous lui en sommes très reconnaissants. Je tiens à remercier profondément les membres de jury :

- Monsieur, Bousbia Saif Eddine Professeur à l'Université d'EL-OUED, d'avoir accepté d'examiner ce travail et de m'avoir honoré de présider le jury.
- Monsieur, : Gherbi Mohammed Taher Professeur à l'Université d'EL-OUED, qui m'a fait l'honneur d'examiner ce travail et je lui en suis profondément reconnaissant.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements aux enseignants du département de génie mécanique de l'Université d'EL-OUED, notamment le Professeur A. Chemssa et le Docteur L. HRAIZE, qui m'ont soutenu et aidé durant cette période, ainsi que leurs conseils fructueux.

Résumé:

Jour après jour, et dans tous les domaines, l'utilisation des matériaux composites a montré qu'elle nécessitait une étude approfondie des résultats des chercheurs en termes de réduction de la consommation d'énergie.

Dans notre étude, nous avons traité de l'identification des matériaux composites et de leur importance. Par conséquent, nous avons mené une étude numérique, en utilisant le programme FORTRAN, pour arriver à des résultats pour le comportement mécanique des plaques isotropes et stratifiées en utilisant une formulation par éléments finis basée sur l'approche par couche équivalente par la théorie du premier ordre REISSNER-MINDLIN.

Mots clés:

Matériaux composites, Éléments finis, Plaques isotropes et stratifiée, Théories des plaques, Méthode de solution, Couche équivalent.

ملخص:

يومًا بعد يوم ، وفي جميع المجالات ، أظهر استخدام المواد المركبة أنها تتطلب دراسة متعمقة لنتائج الباحثين من حيث تقليل استهلاك الطاقة.

في دراستنا ، تعاملنا مع تحديد المواد المركبة وأهميتها. لذلك ، أجرينا دراسة عددية ، باستخدام برنامج FORTRAN ، للوصول إلى نتائج للسلوك الميكانيكي للألواح الخواصية والطبقات باستخدام صيغة العناصر المحدودة بناءً على نهج الطبقة المكافئة بواسطة نظرية الدرجة الأولى REISSNER-MINDLIN .

الكلمات المفتاحية:

المواد المركبة، العناصر المنتهية، الصفائح ذات الطبقات، نظريات الصفائح، الطبقة المكافئة.

Abstract:

Day after day, and in all fields, the use of composite materials has shown that it requires an in-depth study of the results of researchers in terms of reducing energy consumption.

In our study, we dealt with the identification of composite materials and their importance. Therefore, we conducted a numerical study, using the FORTRAN program, to arrive at results for the mechanical behavior of isotropic and layered plates using a finite element formulation based on the equivalent layer approach by the theory of the first REISSNER-MINDLIN order.

Keywords:

Composite materials, Finite elements, Isotropic and laminated plates, Plates theories, Solution method, Equivalent layer.

Table des matières

Résumé:	i
Abstract:	i
Table des matières	ii
Liste des figures.....	v
Liste des tableaux	vi
Notation et symbole.....	vii
INTRODUCTION GENERALE:.....	1
I. GENERALITE SUR LES THEORIES DES PLAQUES :	3
I.1. Introduction:	3
I.2. Les théories des plaques:	3
I.2.1. Théorie de plaques classiques:	3
I.2.2. Théorie de Premier Ordre des plaques:.....	5
I.2.3. Théorie d'ordre supérieur:	7
I.3. Conclusion:	21
II. GENERALITE SUR LES METHODES DE RESOLUTIONS:	22
II.1. Introduction:	22
II.2. Généralité sur les méthodes et les approches de résolutions:	22
II.3. Conclusions:	49
III. FORMULATION DU MODELE BASE SUR LA THEORIE DE PREMIER ORDRE: ...	50
III.1. Introduction:	50
III.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre:.....	50
III.3. Champs de déplacement:	51
III.4. Relation cinématiques:	52
III.5. Loi de comportement d'un stratifié:	54
III.6. Les effets résultants d'un stratifié:.....	57
III.6.1. Efforts résultants de membrane:.....	57
III.6.2. Moments de flexions :	57

III.6.3. Efforts résultantes de premier ordre en cisaillement :	57
III.7. Conclusion:	59
IV. DEVELOPPEMENT D'UN ELEMENT FINIS RECTANGULAIRE POUR L'ANALYSE DES PLAQUES MULTICOUCHES:	60
IV.1. Introduction:	60
IV.2. Formulation de l'élément RFT20:	60
IV.2.1. Description de l'élément rectangulaire RFT20 :	60
IV.2.2. Approximation nodale des déplacements:	61
IV.2.3. Evaluation de matrice de rigidité élémentaire:	62
IV.2.4. Matrice de rigidité de la couche équivalente:	63
IV.3. Validation numérique de l'élémentRFT20:	63
IV.3.1. Organigramme de programme FORTRAN:	64
IV.3.2. Conditions aux limites adoptées :	65
IV.3.3. Plaques isotropes :	65
IV.3.4. Plaques stratifiées:	70
IV.3.5. L'effet d'empilement des couches :	72
IV.3.6. L'effet de l'orientation des fibres:	72
IV.4. Conclusion:	73
CONCLUSION GENERALE	74
Bibliographiques	75

Liste des figures

Figure I.1: Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff [9].....	4
Figure I.2: Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin [9]	5
Figure I.3: Géométries non déformées et déformées d'une plaque selon les trois théories CLPT, FSDT et HSDT [9]	8
Figure III.1: Schéma du déplacement pour la théorie de la plaque de Mindlin.....	51
Figure III.2: Les axes de référence(X, Y, Z) ; et les axes de fibre du couche (1, 2,3)	55
Figure IV. 1: élément quadrilatère de type Lagrange quatre nœuds	60
Figure IV. 2: Organigramme de programme FORTRAN utilisé dans cette mémoire	64
Figure IV. 3: Plaque rectangulaire ayant une maille de $m \times n$	65

Liste des tableaux

Table IV.1: Détails de conditions aux limites utilisées pour les exemples numériques.....	66
Table IV.2: Déflexion normalisé \bar{w} d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée.....	67
Table IV.3: Déflexion normalisé \bar{w} d'une plaque carrée isotrope encastéré.....	67
Table IV.4: Déflexion normalisé \bar{w} d'une plaque carrée isotrope encastéré - simplement appuyé.	67
Table IV.5: Déflexion normalisé \bar{w} d'une plaque carrée isotrope encastéré-libre.....	68
Table IV.6: Déflexion normalisé (\bar{w}), d'une plaque isotrope simplement appuyée ($E = 1$ GPa, $\nu = 0.2, 0.3$ et 0.4)	69
Table IV.7: Propriétés des matériaux (normalisés) utilisés pour les plaques stratifiées	70
Table IV.8: Déplacement transversal non-dimensionnel (\bar{w}) d'une plaque stratifiée carrée à trois couches ($0 / 90 / 0$), simplement appuyée, sous chargement uniforme.....	71
Table IV.9: Déplacement transversal (\bar{w}) d'une plaque stratifiée carrée à cinq couches ($0 / 90 /$ $90 / 90 / 0$), simplement appuyée, sous chargement uniforme.....	71
Table IV.10: d'empilement des couches.....	72
Table IV.11: l'orientation des fibres	72

Notation et symbole

x, y, z	Coordonnées cartésienne;
u, v, w	Déplacements suivant les axes x, y et z ;
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations transformées au repère global x, y et z ;
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes transformées au repère global x, y et z ;
ε^0	Déformation membranaire ;
k	Rotation courbure ;
C_{ij}	Coefficients de la matrice de rigidité $[E]$;
$[E]$	Matrice de coefficients de rigidité transformée au repère global x, y et z ;
N_x, N_y, N_{xy}	Effort résultants membranaire ;
M_x, M_y, M_{xy}	Effort résultants flexionnel ;
T_x, T_y	Efforts résultants tranchants ;
h	Épaisseur de la plaque ;
a	Longueur de la plaque ;
b	Largeur de la plaque ;
φ_x	La rotation du plan xy autour de y ;
φ_y	La rotation du plan xy autour de x ;
\bar{Q}_{ij}	Coefficient des rigidités réduites ;
U_{oi}	Déplacements d'un noeud i ;
N_i	Fonctions d'interpolation ;
$[q]$	Moment de torsion ;
U	Energie de déformation ;
$[K]$	Matrice de rigidité globale ;
$[K_e]$	Matrice de rigidité élémentaire ;

\bar{w}	Déflexion normalisé ;
$\{ \ }^T$	Transposé d'un vecteur ;
$[]$	Matrice ;
$\{ \}$	Vecteur ;

INTRODUCTION GENERALE:

Au cours des dernières décennies, le développement rapide des technologies modernes requiert que l'on utilise des matériaux ayant des caractéristiques spécifiques élevées (bonne résistance, durabilité, faisabilité, faible cout,...), les matériaux composites sont des matériaux qui répondent à ces exigences. Ils deviennent de plus en plus incontournables dans de nombreuses composantes structurales comme la construction maritime, le transport, les sports, les applications aérospatiales et ils ont été utilisés récemment dans les structures de génie civil comme des compléments aux matériaux classiques (acier, bois et béton). Ces derniers temps, les ingénieurs civils ont exploité les avantages d'utilisation des matériaux composites et spécialement les plastiques renforcés par des fibres de verre dans la réparation du béton. (Bons rapports rigidité-poids et résistance-poids, faible coût d'entretien, excellente durabilité et bien d'amples qualités). Pour comprendre bien de quoi est fait ce matériaux Composites, on peut observons déplus près sa structure, il réunit au moins deux composants différents dont les propriétés se complètent, le premier est constitué le plus souvent de fibres techniques, comme de fibres de verres ou de charbonne, et sert à renforcer la solidité de la pièce. On parle alors de (renfort) ou de (renfort fibreux). Le second composant est un liant. Il peut s'agir d'une matière plastique ou d'une résine polymère. C'est cette (matrice) qui assure la cohésion de la structure. Les matériaux ainsi obtenus offrent des propriétés que les composants seuls n'ont pas. Aujourd'hui, On peut prendre l'exemple d'une voiture est comparée avec l'ancienne, on trouve qu'elle pèsera 250 Kg de moins, et permettra une économie d'énergie de 0.4 L au 100 Km. De plus les composites ont dans leurs ensemble l'avantage d'être très résistants et bien plus légers que les métaux. ARKEMA [1] permet même de recycler les composites à base de résine thermoplastiques grâce à sa solution ELYUM [2]. Par leurs propretés. Les accessoires de sport réservent à la compétition. Les pièces automobiles ou le fuselage des avions de dernière génération. Aujourd'hui, une opportunité importante pour ARKEMA qui occupe une place de choix dans ce domaine d'innovation.

Dans ce travail, nous utiliserons la théorie de REISSNER-MINDLIN du premier ordre et les solutions de la méthode des éléments finis sur des plaques isotropes et stratifiées à partir de

trois théories classiques et d'ordre supérieur. Nous poserons ici la question de savoir si ce modèle est utile dans la structuration mécanique et ses solutions sont globales, générales et rapides. Découvrons si cette hypothèse et ses solutions sont réalisables et si ses résultats sont vraiment rapides et efficaces à l'aide et à l'utilisation de programmes FORTRAN.

Pour ce problème, nous avons divisée cette revue est en quatre chapitres, toutes deux chronologiques. Dans le premier chapitre, une revue détaillée des théories de la plaque est fourni avec des commentaires sur les méthodes de solution respectives, le cas échéant. Des exemples de formulations asymptotiques, axiomatiques et basées sur le continuum pour plaques peuvent être trouvés dans cette section. En raison des simplifications supposées lors du processus de dérivation, les références montrent qu'un couplage entre la théorie et la méthode de résolution respective est toujours présent. Pour cette raison, la précision de ces théories dépend de la méthode de résolution. Ceci est clairement visible dans la deuxième chapitres, où la revue se concentre (mais pas uniquement) sur les théories de la plaque résolues par la méthode des éléments finis (FEM). Cette revue a été consacrée à cette méthode en raison de sa popularité, qui repose sur l'applicabilité de cette méthode en ingénierie. Il est bien connu que les théories de plaques classiques basées sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, négligeant les cisaillements transverses [3, 4] ne sont adéquates que pour l'analyse des plaques composite minces. La première catégorie contient des théories du type Reissner-Mindlin [5] étendues aux multicouches où l'on remplace le multicouche par une plaque anisotrope homogène équivalente. Des théories du premier ordre postulent une cinématique du premier degré en z [6, 7]. Ces théories prévoient mal les réponses des structures multicouches modernes épaisses avec un degré d'anisotropie élevée ; le cisaillement transverse joue un rôle plus important dans les plaques anisotropes que dans les plaques isotropes. Le troisième chapitre contient une formulation du modèle basé sur la théorie du premier ordre Reissner-Mindlin (champ de déplacement, loi de comportement et les effets résultant). Finalement, une validation numérique de l'élément rectangulaire aux conditions aux limite, plaque isotropes, carrée et rectangulaire simple appuyées sous chargement uniforme, et une autre validation numérique sur des plaques stratifiées (plaque carrée a 3 et 5 couches, empilement et l'orientation des fibres).

I. GENERALITE SUR LES THEORIES DES PLAQUES :

I.1. Introduction:

Ce travail représente une traduction d'un article de Mauricio F [8], dont contiennent trois hypothèses que nous aborderons, La première théorie classique de Love-Kirchhoff qui concerne la couche mince et la deuxième théorie de premier ordre pour la couche moyenne épaisse, finalement théorie d'ordre supérieur concernant les grandes épaisseurs. Cette revue commence par les travaux de Srinivas et Rao. Ils ont travaillé sur une solution exacte pour les problèmes de flexion, de vibration et de flambage des plaques et stratifiés rectangulaires orthotropes épais.

I.2. Les théories des plaques:

L'équilibre des plaques élastiques planes et plus particulièrement, la mise en équation de ce problème, ont fait l'objet de travaux bien connus tels que ceux de Lagrange, de Poisson, de Kirchhoff, de M. Boussinesq, de M. Maurice Lévy, etc. Non seulement les méthodes employées par ces différents auteurs sont très diverses, mais les résultats eux-mêmes n'ont pas toujours été concordants.

I.2.1. Théorie de plaques classiques:

L'optimisation fine des structures composites nécessite de mettre en place des outils de modélisation du comportement mécanique de plus en plus sophistiqués et prenant en compte les spécifiés de ces matériaux-structure. D'un point de vue pratique, la méthode numérique, notamment les calculs éléments finis sont indispensables pour le dimensionnement des structures composites complexes.

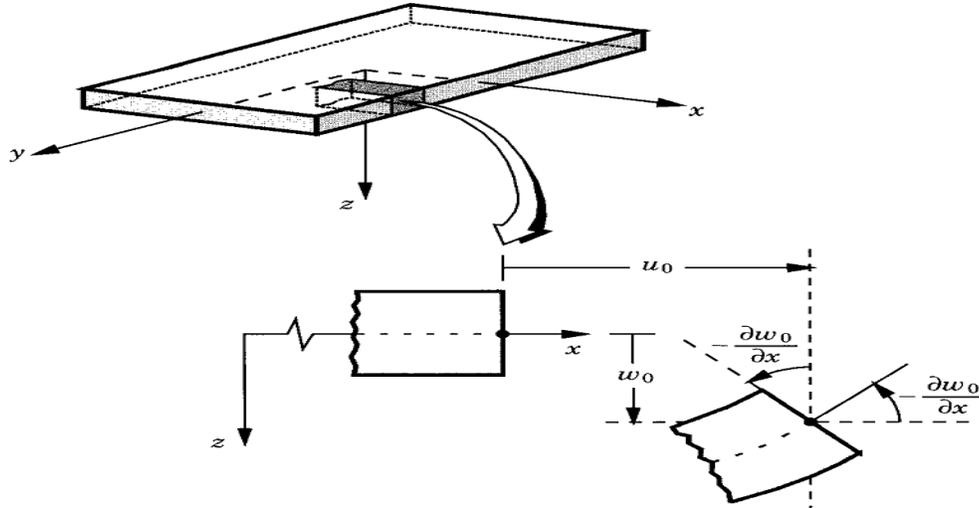


Figure I.1: Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff [9]

Il est bien connu que les théories de plaques classique sont été étudiées et basées sur la théorie de Kirchhoff étales théories Reissner- Mindlin des plaques épaisses pour les petites souches, négligeant les cisaillements transverses [3, 4] ne sont adéquates que pour l'analysées plaques composite minces. Ces théories prévoient mal les réponses des structures multicouches modernes épaisses avec un degré d'anisotropie élevée ; le cisaillement transverse joue un rôle plus important dans les plaques anisotropes que dans les plaques isotropes. Les résultats ont montré une dépendance des propriétés du stratifié orthotropes et hypothèse de stratifié fin ou épais.

De même, Kulkarni et Pagano a proposé une approche pour résoudre la dynamique des stratifiés composites en flexion cylindrique, beaucoup mieux en utilisant la théorie Mindlin des plaques. Dans la formulation de déplacement, un terme exponentiel dépendant du temps multiplie le Série de Fourier. Les résultats de dispersion analytique pour les stratifiés symétriques et asymétriques ont été discutés par l'aide de valeurs de fréquence et de vitesse de phase non dimensionnées. L'approche proposée pour les stratifiés à faible anisotropie et symétriques a donné les meilleurs résultats.

I.2.2. Théorie de Premier Ordre des plaques:

Di Sciuva a développé un élément de plaque anisotrope monocouche équivalent basé sur théorie Ambartsumian ZZ (Zig-Zag). Même si l'auteur se réfère à sa formulation discrète, il ne s'agit pas d'une théorie couche par couches, parce que le nombre de degrés de liberté de l'élément ne dépend pas du nombre de couches. C'est un élément rectangulaire à 4 nœud (avec 8 DOF - degré de liberté par nœud), y compris la flexion, extension et contributions de cisaillement transversal. Puisqu'il traite les déformations de cisaillement comme des paramètres nodaux, il est défini comme une approche mixte avec huit variables par nœud (trois déplacements, trois rotations et deux déformations de cisaillement). Des polynômes hermitiens ont été utilisés comme fonctions d'interpolation pour les champs de déplacement transverse et les variables restantes linéairement. L'idée était de préserver les exigences de continuité C-1 pour le problème de flexion. Une théorie de la déformation par cisaillement de premier ordre était choisie pour estimer les champs de déplacement. Pliage cylindrique de stratifiés à plis croisés et à plis angulaires et pliage d'un stratifié croisé carré ont été étudiés via cet élément. Un bon accord a été observé dans les deux rapports portée / épaisseur élevés.

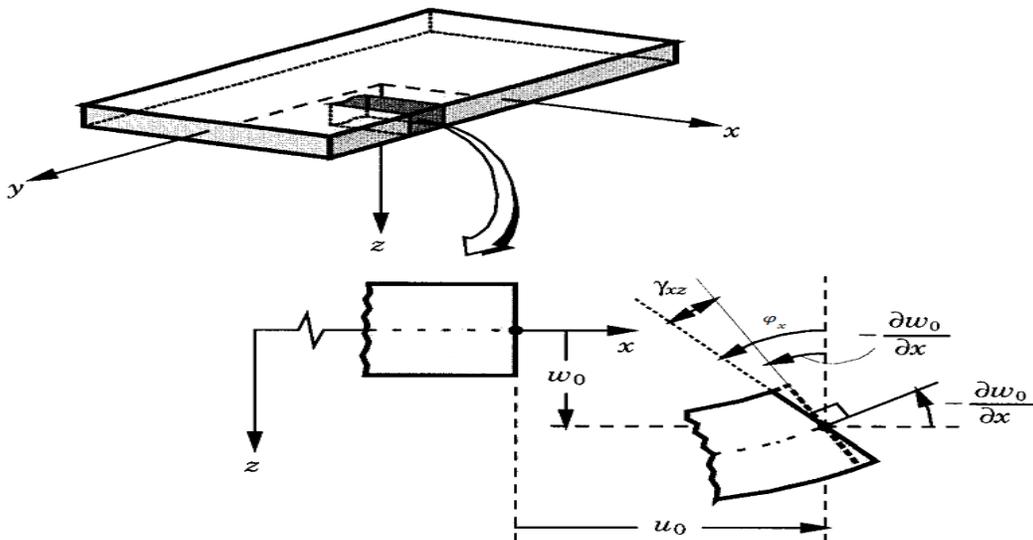


Figure I.2: Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin [9]

Une formulation de plaque améliorée a été dérivée par Toledano et Murakami basé sur l'approche variationnelle mixte du Reissner L'approche Zig-Zag utilisant des polynômes de Legendre issus et développé des travaux précédents de Murakami. Cependant, des fonctions de déplacement d'ordre supérieur ont été choisies, plus spécifiquement, ils ont supposé des déplacements de Lo, Christensen et Wu. La formulation de stratifié résultante adaptée dans le type monocouche équivalent de théorie des plaques stratifiées. Encore une fois, la flexion cylindrique des symétriques et Des stratifiés croisés non symétriques ont été étudiés. Réponses macroscopiques de cette formulation, telles que déflexion centrale, ont été modélisées avec précision par rapport à une solution exacte de référence. Les résultats ont retenu un haut niveau de précision même à de faibles rapports portée à une épaisseur. Comparaison du cisaillement de premier ordre de Murakami déformation de la théorie Zig-Zag à la formulation d'ordre élevé non à la théorie Zig-Zag de Lo, Christensen et Wu a indiqué que le précédent est plus précis dans la modélisation des plaques stratifiées.

Owen et Li ont présenté un élément de plaque de déformation par cisaillement du premier ordre en trois dimensions en deux papiers compagnons. La méthode de la solution a exploité une technique de sous-structuration, qui permet d'augmenter le nombre réel de couches dans le stratifié. Cependant, le principal avantage de cette sous-structuration était le fait qu'un seul ensemble d'équations de couche devait être résolu. Toutes les autres équations de couche peuvent être résolues en utilisant les résultats de cet ensemble d'équations, qui avaient été résolus. Cela réduit considérablement la taille du problème.

Cependant, une augmentation du temps de traitement total est attendue. Pour une meilleure comparaison avec les solutions d'élasticité, une technique de lissage a été utilisée pour interpoler les résultats des points d'intégration aux limites de l'élément. Ceci est particulièrement intéressant pour les contraintes transversales avec intégration sélective ou réduite. Mince et épaisse des plaques composites stratifiées présentant des problèmes de statique, de dynamique et de stabilité ont été étudiées. Puisqu'il s'agit d'un type de formulation de plaque Couche par couche, une bonne précision a été obtenue pour les déplacements et les contraintes sur l'épaisseur du stratifié par approximation linéaire. Néanmoins, une comparaison utilisant 27 nœuds pour un élément d'ordre supérieur une variation du déplacement dans le plan a été effectuée. Il n'a pas montré d'amélioration considérable des résultats afin de justifier l'augmentation des paramètres.

I.2.3. Théorie d'ordre supérieur:

Une théorie d'ordre supérieur satisfaisant la contrainte de cisaillement transversale nulle sur les couches supérieure et inférieure des plaques laminées ont été présentées par Kant et Pandya [19]. Un élément quadrilatéral iso-paramétrique à neuf nœuds C-0 est dérivé. La théorie stratifiée était un type monocouche équivalent. Sept degrés de liberté ont été déterminés par nœud. Trois translations (translation) et deux rotations ainsi que deux autres rotations spéciales ont été envisagées. Ces DOF spéciaux de rotation ont été utilisés pour modéliser deux déformations de cisaillement transversales. Puisque la continuité n'est pas garantie lorsque le calcul de la contrainte au sein de chaque couche via des relations constitutives, l'intégration des équations d'équilibre a été choisie comme une technique plus précise. Cela nécessite un post-traitement supplémentaire des résultats, mais le niveau de précision est plus haut. Cependant, les résultats présentés n'étaient toujours pas exacts selon les références consultées dans l'étude. Et le modèle a bien performé à partir de la limite des plaques épaisses (Longueur ou largeur par épaisseur ≥ 10) sans facteurs de correction de cisaillement. D'autres évaluations de cette formulation peuvent être trouvées dans Pandya et Kant.

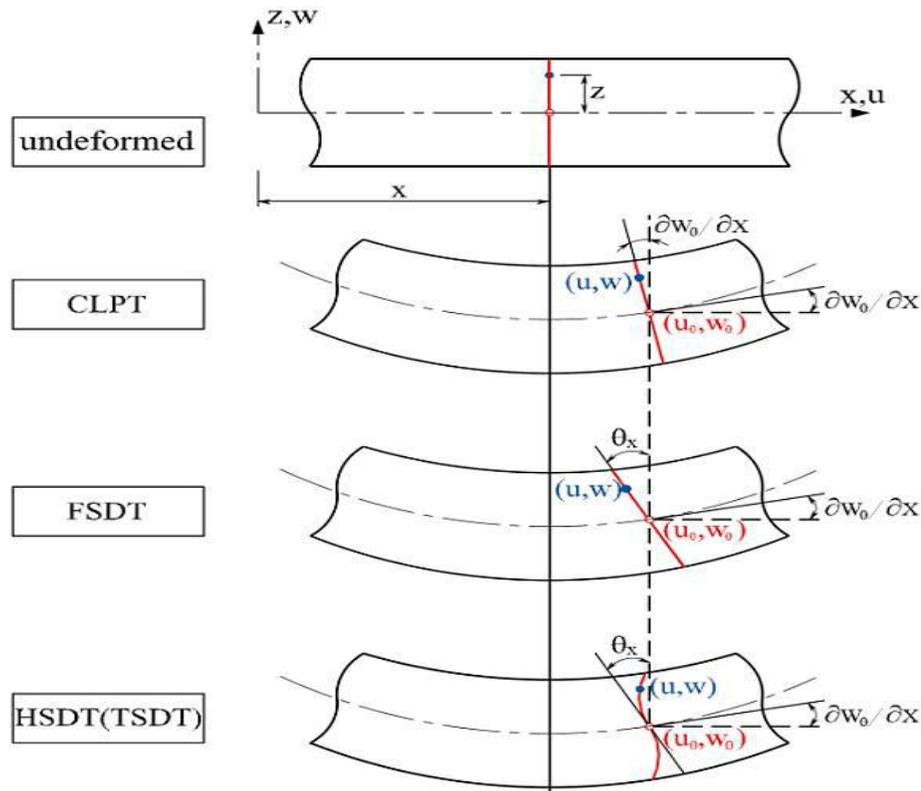


Figure I.3: Géométries non déformées et déformées d'une plaque selon les trois théories CLPT, FSDT et HSDT [9]

En 1990, le professeur J. N. Reddy a révisé une variété des théories actuelles des plaques du troisième ordre. Des différences et des similitudes entre ces théories ont été soulignées pour identifier les contributions réelles. Après avoir compilé tous ces théories du troisième ordre, Reddy a proposé une théorie générale des plaques de déformation cohérente à partir de laquelle des théories revues peuvent être dérivées. Il a également pris en compte les déformations non linéaires en utilisant les hypothèses de Von Kármán.

Aucune validation ou comparaison n'a été effectuée.

Pour déterminer les caractéristiques statiques et dynamiques des plaques et des coques, Noor, Burton et Peters ont étudié une procédure de solution en deux étapes. Sur la base d'une première étape prédictive, une réponse globale de la plaque a été obtenue grâce à une théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre en utilisant des facteurs de correction de cisaillement. Puis dans une deuxième étape, une correction des valeurs prédites a été effectuée

par deux méthodes différentes. Le premier a estimé le facteur de correction de cisaillement pour calculer les contraintes, tandis que la deuxième méthode a utilisé la dépendance des composants de déplacement sur la coordonnée d'épaisseur. Sur la base des tests simulés, la procédure en deux étapes était sensible à la symétrie du stratifié ainsi qu'aux facteurs de correction de cisaillement. Un des principaux avantages de la méthode est la mise en œuvre simple et peu coûteuse de la phase de prédiction. Par conséquent, via le post-traitement (correction), de meilleurs résultats peuvent être obtenus sans avoir besoin de formulations d'éléments compliqués.

Touratier a proposé un nouveau type d'expansion de la coordonnée d'épaisseur pour dériver la formulation de la plaque. Au lieu d'ajouter un autre terme non linéaire à l'expansion de la coordonnée d'épaisseur dans le plan déplacement supposé des fonctions, une fonction sinus a été choisie. Ceci est confirmé par le fait que la dérivé de la fonction sinus est la fonction cosinus, qui est une fonction paire, et donc capable de représenter la contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces inférieure et supérieure du stratifié. De plus, aucune correction de cisaillement des facteurs étaient nécessaires. Le déplacement transversal a été pris comme constant et égal à la valeur de la membrane.

Les cas de Benchmark ont été résolus analytiquement par la formulation utilisant des solutions de type Navier. En comparaison avec d'autres, les références et les solutions d'élasticité 3D ont montré une équivalence de la théorie proposée avec l'autre théorie ordre supérieure. L'auteur a également vérifié la dépendance de la formulation en termes l'anisotropie matérielle.

L'année suivante, Touratier a présenté et testé sa fonction sinusoïdale de l'épaisseur coordonnée dans la portée des structures de coque peu profondes (l'épaisseur de la coque est beaucoup plus petite que celle de la coque rayon $h \ll R$). Un bon accord a été réalisé et un type d'élément fini C-1 indiqué comme solution possible pour les équations différentielles. Le concept géométrique des coques a été évalué pour des rapports R / L de 5 à 100 et, enfin, pour la formulation des plaques. On a clairement observé qu'une théorie de la coque était nécessaire pour les surfaces fortement courbes. Ces les mêmes précisions en utilisant des éléments de coque. Cependant, selon la théorie et l'anisotropie du matériau, l'écart dans le nombre d'éléments n'est peut-être pas aussi élevé.

Burton et Noor ont enquêté neuf approches différentes pour panneaux sandwich cylindrique et à double courbure en utilisant des calculs différentiels. Les variations des paramètres géométriques et matérielles ont été étudiées pour évaluer l'exactitude des approches choisies. Sur les neuf approches utilisées pour modéliser les panneaux sandwich, deux classées comme théorie équivalente à une seule couche (ESL), les cinq autres comme théories discrètes de couche (raffinement de Zig-Zag ont été appliqués sur un stratifié avec trois couches uniques équivalentes correspondant à la peau centrale, inférieure et supérieure couches) et les deux derniers étaient basés sur des algorithmes prédicteur-correcteur. Résultats de sensibilité des neuf approches par rapport aux analyses tridimensionnelles ont montré que le type d'approche le plus robuste était l'approche discrète. Plus précisément, celui avec variation cubique des déplacements dans le plan et variation quadratique du décalage le déplacement était la meilleure formulation parmi les neuf. Cependant, c'était celui avec le plus de paramètres à être défini, 27 pour être exact, 14 de plus que le deuxième (théorie linéaire discrète et mixte) et 15 de plus que la troisième (technique prédicteur-correcteur avec post-traitement des résultats) approche la plus expansive.

En exploitant le concept de superposition, Li et Liu ont proposé un multicouche raffiné global-local théorie plaquée. Une telle théorie pourrait être classée comme une théorie monocouche équivalente, car elle a été faite indépendamment du nombre de couches grâce aux raffinements Zig-Zag. Pour résumer, les fonctions de déplacement, «u», «v» et «w» étaient composés d'un ensemble global de termes et d'une paire de termes calibrés localement. Le local l'étalement n'était disponible que pour deux périodes en raison des DOF de continuité. Le déplacement global dans le plan comprend des termes d'expansion dans le sens de l'épaisseur de la plaque jusqu'au troisième ordre. D'autre part, le déplacement hors-plan était considéré comme constant, en ce qui concerne la direction de l'épaisseur. Les termes locaux pourraient être jumelés selon l'ordre d'expansion de la direction de l'épaisseur de chaque terme comme 0-1, 0-2, 0-3, 1-2, 1-3 et 2-3. Toutes les six dérivations ont donné des résultats différents. Cela s'est produit, car chaque terme local avait une contribution distincte à la réponse du stratifié. L'ordre zéro fait référence au déplacement dans le plan médian de chaque couche composite. Le premier ordre terme était d'angle de rotation. Le terme du second ordre représentait la courbure du déplacement de la distribution du stratifié composite. Finalement, le terme du troisième ordre pourrait être lié à la courbure de la contrainte transversale. Les termes de premier, deuxième et troisième ordre étaient tout aussi importants pour les configurations stratifiés complexes. Seul le terme d'ordre

zéro pouvait être ignoré en raison du respect des conditions de continuité aux interfaces stratifiées. Ainsi, pour rendre compte de tous ces apports mécaniques dans leur formulation, les auteurs ont proposé une double superposition en regroupant les termes raffinés du premier (1), deuxième (2) et troisième (3) ordre, de sorte qu'un terme a toujours été laissé seul, et trois configurations ont été obtenues: 1,2-3; 1,3-2 et 2,3-1. Le trait d'union sépare les groupes. Ces combinaisons possibles comprenaient la paire de DOF (degrés de liberté) localement disponible pour l'étalonnage de la formulation de la plaque. Ces trois formulations ont été mises en œuvre dans 13 DOF quatre éléments quadrilatère de nœud. Les résultats de flexion cylindrique se sont avérés égaux et précis pour le [0/90/0] stratifié simulé. Des comparaisons pour le nombre pair et impair de plis ont été fournies. Piles de 2, 3, 6, 7, 14 et 15 les plis ont été simulés et comparés. Bien que tous les résultats concordent bien avec la solution d'élasticité, de même l'empilement était légèrement meilleur.

Un aperçu de la modélisation et de la stabilité des structures sandwich a été présenté par Librescu et Hause. L'étude présentait des problèmes liés aux théories plaque sandwich incurvée et plate géométriquement linéaire et non linéaire. Le flambement et la résistance au flambage ont été étudiés, et peu de résultats publiés ont été sélectionnés pour la stabilité à des fins d'enquête. Les auteurs ont également mis en évidence la complexité de l'étude de telles structures en raison de la mise en page asymétries:

- 1) asymétrie par rapport à la surface médiane des feuilles, ce qui génère une flexion de la face couplage.
- 2) asymétrie par rapport à la surface médiane du noyau désormais responsable de couplage flexion-étirement.
- 3) la présence d'angle de pli de plis entre les principaux axes orthotropes des peaux les matériaux et l'orientation du panneau, ce qui induit un couplage flexion-cisaillement. Résultats sélectionnés de flambage et post-flambage de revêtements uni (peaux 1 pli) et de peaux multicouches en sandwich plat et courbé des panneaux ont été exposés. L'une des principales tendances qui a pu être identifiée était le fait que les structures composite sandwich avaient une capacité de charge beaucoup plus grande que les structures composites stratifiées habituelles.

C'était renforcé par le fait que les panneaux de coques ne présentent pas de flambement par encliquetage, et ils étaient robustes imperfections. Ce n'est que dans des situations extrêmes de charges combinées que le flambement par encliquetage pouvait être observé.

La plupart des termes impliqués dans la dérivation les théories des coquilles ont été discutés par Yang et al. Ces idées ont été mises en évidence:

- 1) L'approche de la coque dégénérée.
- 2) Les formulations basées sur les contraintes et l'approche de surface de Cosserat.
- 3) Techniques d'intégration réduite avec stabilisation (contrôle du sablier).
- 4) Approche modes incompatibles.
- 5) Formulations de souches améliorées (formulations mixtes et hybrides).
- 6) Eléments basés sur la 3-D théorie de l'élasticité.
- 7) perçage d'éléments de degrés de liberté.
- 8) Approches de Co-rotation.
- 9) Théories d'ordre supérieur pour les composites. Les auteurs ont passé en revue chaque sujet en expliquant brièvement chacun de ces termes. Aussi, c'est a mis en évidence les documents, qui peuvent être consultés pour plus d'informations et d'explications.

Meunir et Shenoï ont enquêté un matériau sandwich en plastique renforcé de fibres (PRF) en utilisant la théorie d'ordre supérieure de Reddy de la déformation par cisaillement. Une théorie monocouche équivalente avec un matériau de propriétés complexe a été utilisée dans la solution analytique de la première fréquence de vibration libre. Les auteurs expérimentalement ont caractérisé les propriétés élastiques-viscoélastiques (amortissement) de la mousse à cellules fermées PVC-poly (chlorure de vinyle nommé HEREX C70.130 de 30 à 90 degrés Celsius et de 0 à 500 Hz). Comme pour les propriétés des matériaux des peaux, un renfort nommé Eglass / DX-210 trouvé dans la littérature a été choisi. Etude approfondie des résultats a montré que la réponse dynamique de la structure sandwich dépendait de la température et de la fréquence dans les gammes étudiées. De plus, les propriétés dynamiques semblaient insensibles à la séquence d'empilement de la peau. D'autre part, les résultats ont considérablement changé lorsque la plaque s'approchait d'un carré et quel rapport du noyau d'épaisseur de peau augmenté. Un élément de plaque multicouche de déformation par cisaillement de premier ordre raffiné a été évalué en linéaire et non linéaire.

Analyses de Polit et Touratier, l'élément triangulaire a conservé les exigences C-1 pour la déflexion et comprenait une distribution de déformation de cisaillement transverse co-sinus. Pour les contributions non linéaires, les hypothèses de Von Kármán ont été développées. La contrainte normale transversale a été obtenue via l'intégration de l'équilibre équations, et le champ de déplacement a préservé la continuité inter-laminaire. Grâce à l'intégration des relations, un champ de déplacement raffiné Zig-Zag a été atteint. Des résultats précis avec de bons modèles de convergence pourraient être observés. Parmi les résultats, il convient de souligner le fait que des approches plus simples des structures multicouches peuvent surestimer la stabilité de la structure.

Un autre travail publié par Yu, Hodges et Volovoi a réalisé une étude asymptotique tridimensionnelle (3D) de la théorie de l'élasticité anisotrope dans le but de modéliser des coques laminées. La méthode divise le Problème 3D en une analyse linéaire unidimensionnelle (1D), une analyse à travers l'épaisseur, et non linéaire analyse de coque bidimensionnelle (2D). Le processus de dérivation a utilisé de petits rapports de paramètres de coque tels que déformation / rayon, déformation / épaisseur, épaisseur / rayon et épaisseur / longueur. Afin de fournir une solution pratique, la formulation a été modifiée pour ressembler à la théorie coque / plaque de Reissner-Mindlin. Même si la théorie proposée était de la forme d'une théorie de déformation par cisaillement du premier ordre équivalente à une seule couche, les résultats étaient comparables aux formulations par couches. Des cas de test de flexion cylindrique ont été étudiés pour le approche avec une CLT (théorie classique des stratifiés), FSDT (théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre) et solutions 3D exactes. Les résultats numériques ont montré une excellente concordance et validé la fidélité de l'approche.

Ghugal et Shimpi ont passé en revue plus de 412 articles sur les théories de la déformation par cisaillement pour les plaques stratifiées. Des théories monocouche équivalentes et raffinées ainsi que des théories par couches ont été examinées et de nombreuses références peuvent être trouvés sur chaque sujet. Sur la base des références contenues dans l'article, les auteurs ont conclu qu'il était un manque de travaux d'évaluation critique sur les plaques stratifiées asymétriques. Pour de tels cas, même les formulations avec plus de cinq variables de déplacement pourrait être insuffisant pour modéliser correctement ces stratifiés.

Plus d'une centaine de références concernant les théories axiomatiques Zig-Zag pour coque et plaque multicouche les structures ont été consultées par Carrera. L'accent a été mis sur ceux qui

présentent un déplacement continu continuité de champ et inter-laminaire des contraintes transversales. Trois axes de recherche ont été trouvés. Selon Carrera, Lekhnitskii a été le premier à proposer une méthodologie Zig-Zag (Lekhnitskii Multilayered Théorie LMT). Ensuite, Ambartsumian a montré une approche similaire (AMT), qui est plus souvent rencontrée dans la littérature. Une dernière méthodologie a été proposée par Reissner, qui a proposé une approche mixte (RMT) pour continuité inter-laminaire des contraintes transversales. Carrera a introduit sa contribution dans cette dernière approche en proposant la forme faible de la loi de Hooke (WFHL) afin de réduire le calcul des approches mixtes.

Cette WFHL réduit le problème mixte à la formulation de déplacement classique. Les conséquences de tous les articles examinés ont appelé à plus de repères des trois formulations étudiées avec des solutions d'élasticité. Aussi Il faut également comparer les théories asymptotiques, basées sur le continuum et d'autres théories des plaques / coquilles.

La fonction Zig-Zag (MZZF) de Murakami a été étudiée dans la modélisation de plaques multicouches et coquilles. Les formulations de déplacement linéaire et d'ordre supérieur (jusqu'au quatrième ordre) ont d'abord été étudiées. Ensuite l'utilisation avancée du MZZF a été abordée via des formulations mixtes, où il y a des considérations de contrainte dans en plus du champ de déplacement. Résultats de cas de test thermiques, statiques et dynamiques d'orthotrope simplement pris en charge des plaques et des coquilles ont été fournis pour les comparaisons de précision. Une fois de plus, la littérature a montré que l'utilisation des améliorations de ZZ ont été préférées à l'utilisation seules de théories d'ordre supérieur. Depuis l'utilisation anticipée de MZZF comprend une formulation de type mixte, les résultats sont généralement meilleurs que ceux obtenus grâce à la formulation de déplacement. Ainsi, l'utilisation de la formulation mixte est quelque peu équivalente à l'utilisation de MZZF via des formulations irréductibles à déplacement classique. Lorsque MZZF est utilisé avec des théories mixtes (avancé approche), les résultats ne s'améliorent que légèrement par rapport à l'application de MZZF uniquement ou les théories de contrainte de déplacement Nayak, Shenoï et Moy ont étudié la dynamique du composite sandwich laminé en utilisant le concept des théories ESL. La formulation proposée était basée sur la théorie des plaques de Reddy et les équations d'équilibre ont été résolues en utilisant l'algorithme d'intégration de Newmark. Deux méthodes différentes pour définir les pas critique de temps ont été étudiées. La méthode des éléments finis a été choisie pour résoudre les

équations. Un nœud C-0 à quatre et un C-0 neuf éléments de nœud ont été mis en œuvre avec sept DOF de déplacement. Une méthode de déformation supposée était adoptée pour minimiser les effets du verrouillage de cisaillement et des modes d'énergie parasite dans la mise en œuvre FE. Garder la masse exacte de l'élément, une matrice de masse cohérente a été dérivée. Basé sur huit exemples statiques ou dynamiques différents rapports d'épaisseur côté / épaisseur et face / âme, conditions aux limites serrées et libres, aluminium et Des noyaux en PVC de différents modèles de stratification ont été étudiés. Les résultats globaux concordent bien avec la littérature concernant les sandwichs à noyau épais et mou.

Des solutions tridimensionnelles exactes pour les plaques isotropes minces et épaisses ont été abordées dans Demasi Une fois de plus dans la littérature, une solution de type Navier utilisant la série de Fourier a été élaborée. La forme mixte de La loi de Hooke (MFHL) a été utilisée et conduit à la description des conditions aux limites en surfaces haut et en basse en termes de contraintes transversales. Le problème des valeurs propres associé n'a pas donné suffisamment de linéarité vectrice propre indépendante. D'où une combinaison de vecteurs propres multipliée par des fonctions de direction de l'épaisseur a été proposée pour dériver six vecteurs propres distincts. Pour la charge de pression sinusoïdale sur la surface supérieure, une solution exacte a été obtenue. La théorie des plaques minces (TPT) et la théorie des plaques classiques (CPT) ont également été dérivées de la solution exacte. Comme test de validation, des formulations axiomatiques de 5^e et 10^e ordres basés sur Le théorème Reissner Mixte de variation a été implémenté à des fins de comparaison.

Demasi a présenté l'extension d'un précédent travail sur les solutions exactes pour les plaques isotropes à plaques multicouches. En suivant les étapes de l'article précédent, la solution 3D statique exacte a été développée pour le boîtier multicouche. Pour évaluer l'exactitude de la formulation, 23 théories axiomatiques 2D différentes ont été examinées et mis en œuvre. Les formulations de déplacement mixtes et classiques ont été étudiées en utilisant la théorie raffinements Zig-Zag de Murakamiou pas. Des théories équivalentes à une seule couche et par couche ont également été discutées. Champs de déplacement avec une expansion d'ordre très élevé de la coordonnée d'épaisseur (par exemple 7^e, 8^e et 9^e ordre, d'où l'étiquette «quasi 3D ont été dérivés et vérifiés pour une plaque sandwich à 3 couches. Des résultats pour des formulations d'ordre inférieur ont également été fournis.

Différents rapports d'aspect et de longueur sur épaisseur ont été étudiés. Après avoir résolu une assiette sandwich avec un noyau mou sous pression sinusoïdale, la précision de la présente formulation a été démontrée.

L'approche globale-locale 1-2-3 proposée par Li et Liu a été modifiée pour fournir une formulation de plaque, qui ne demande que la continuité C-0 dans les implémentations par éléments finis. En éliminant le premier dérivée du déplacement transversal à partir des fonctions de déplacement dans le plan, le Zhen et Wanji a réussi à réorganiser les termes et à dériver une formulation de plaque C-0. Deux configurations de stratifié différentes et deux autres configurations de plaques sandwich ont été étudiées dans des conditions de charge statique. Jusqu'à une plaque moyennement épais (longueur et largeur par épaisseur environ 20), les résultats de la formulation C-0 correspondent presque à ceux obtenus via le Exigences C-1. Les deux théories pourraient représenter avec précision les résultats exacts. Les résultats ont été obtenus en utilisant formulations analytiques via les séries trigonométriques de Navier.

L'élément de plaque C-0 pour les structures stratifiées dérivé par Zheng et Kanji a été appliqué à la dynamique analyse. La solution a été obtenue par des procédures de solution analytique et numérique. Le premier a utilisé la version dynamique de la série de type Navier, et la seconde a été implémentée en utilisant un élément quadrilatère à huit nœuds. Une matrice de masse cohérente a été considérée. En comptant les variables de déplacement par nœud, le nombre DOF de l'élément étaient égaux à 13×8 (104). C'était considérablement élevé la mise en œuvre pour une théorie équivalente à une seule couche. Néanmoins, ce nombre était indépendant du nombre de plis dans le stratifié. À la convergence étudiée indique une densité de maillage adéquate de 8×8 . La comparaison des fréquences naturelles pour deux stratifiés croisés et une plaque sandwich avec un noyau 1000 fois plus mou que les faces ont été représentées. Qualitatif résultats pour les variations géométriques du rapport d'épaisseur du noyau sur la face, du rapport d'aspect et du rapport de la portée sur l'épaisseur égaux aux résultats exacts. Les valeurs absolues pour chaque fréquence présentaient une réponse plus précise que les théories choisies pour comparaison.

La flexion et la vibration des plaques stratifiées composites et sandwich ont été étudiées par Tu, Thach et Quoc à travers une théorie monocouche équivalente. Des termes de troisième ordre ont été supposés pour le plan déplacement et un champ de déplacement transversal

indépendant, qui était une fonction de la variable dans le plan. Une l'implémentation FEM des éléments à neuf nœuds C-0 donne 81 DOF pour la théorie actuelle des plaques. La matrice de masse a été dérivée de manière cohérente. Peu d'études paramétriques ont été fournies. Comparaison avec d'autres solutions approximatives de la littérature pour le test de vibration gratuit a montré un bon accord. Malheureusement, la solution de base n'était pas la solution exacte. D'autre part, les résultats de flexion statique concordaient bien avec sa solution exacte.

Les travaux de Ghinet et Atalla ont présenté la formulation d'un modèle stratifié discret (DLM) pour plaques et poutres composites sandwich épaisses avec couches viscoélastiques linéaires. L'amortissement structurel a été envisagé. La théorie des couches couche par couche proposée était basée sur le champ de déplacement de Reissner - Mindlin. Cependant, lors de la réalisation de son inefficacité à capturer les réponses dilatatives (modes de mouvement symétriques) dans le sandwich à noyau souple structures, une étude complémentaire a été réalisée qu'utilisant des fonctions de déplacement améliorées. La solution des équations gouvernantes a été obtenue par la technique de Rayleigh - Ritz avec fonctions de forme trigonométrique. Le comportement en flexion et en cisaillement transversal a été déterminé en utilisant une cantilever poutre et un état libre. Les résultats ont été comparés à la méthode numérique des éléments finis spectraux (SFEM) méthode des éléments finis 3D (FEM) utilisant NASTRAN et des tests expérimentaux. Certains paramètres ont été calculés pour validation: facteur de perte d'amortissement structurel, fréquences propres, nombres d'onde, impédance mécanique et mobilité d'entrée. L'orthotropie du stratifié influence le facteur de perte d'amortissement en raison de la dépendance du en-tête des solutions de propagation. Néanmoins, le DLM développé a fourni un excellent accord avec les méthodes de base et données expérimentales.

Santiuste, Thomsen et Frostig ont étudié la réponse non linéaire thermomécanique d'une axisymétrique plaque sandwich circulaires avec âme en mousse souple. Basé sur des travaux antérieurs, les formulations de plaque ont suivi les mêmes hypothèses de déplacement. De telles hypothèses ajustées dans la Classe de théories d'ordre supérieur sur plaque sandwich (HSAPT). Cette classe de théories analyse les faces et le noyau séparément. Différent des fonctions de déplacement sont affectées à chaque composant. Les auteurs ont utilisé le CLT pour les visages et ont intégré les équations d'équilibre pour trouver un champ de déplacement pour le noyau, qui

varie selon un schéma quadratique en fonction de la direction de l'épaisseur. Deux modèles d'éléments finis ont été construits dans ABAQUS pour évaluer la précision de proposition de formulation analytique et ses simplifications. Un modèle était 2D et utilisait des éléments axisymétriques (CAX4R) et un autre modèle, qui était en 3D, utilisait des éléments solides (C3D8R). Bien qu'il soit légèrement plus rigide, les résultats analytiques ont montré une bonne concordance absolue et qualitative avec les modèles numériques. Pour le noyau PVC propriétés thermomécaniques utilisées dans les modèles, il est clair que ce matériau doit être modélisé indépendance de propriétés avec la température. De plus, cette dépendance, qui adoucit le noyau et augmente le déplacement du panneau résultats, génère de nouveaux problèmes de convergence dans l'algorithme de solution de Newton. Cela a un impact direct sur la vitesse de la solution car une discrétisation spatiale et temporelle plus fine est nécessaire. Mantari, Oktem et Soares ont proposé une nouvelle théorie monocouche équivalente pour les plaques stratifiées. Le déplacement hors plan a suivi l'indépendance habituelle de la coordonnée d'épaisseur. Au contraire, dans les déplacements plans définis par la théorie FSPT ont été améliorés en utilisant deux termes multipliant la rotation variable. Le premier terme était essentiellement le paramètre « m » à étalonner. Le deuxième terme était une fonction sinusoïdale de la coordonnée d'épaisseur pondérée par une fonction exponentielle du même paramètre « m » multipliée par une fonction cosinus de la coordonnée d'épaisseur. Afin d'obtenir la meilleure valeur pour « m », plusieurs solutions pour différents rapports longueur / épaisseur ont été regroupés et une valeur de 0,5 a été suggérée. Les équations gouvernantes ont été résolues via des solutions de type Navier. Sur la base des références et des exemples sélectionnés, la théorie proposée était également précise. En incorporant des fonctions Zig-Zag, les auteurs ont estimé que les résultats devraient fournir des erreurs plus faibles.

Une autre théorie HSAPT a été développée par Mantari, Oktem et Soares. Une formulation à trois couches a été dérivée en utilisant une amélioration des déplacements dans le plan via une fonction trigonométrique tangentielle. Le déplacement transversal a été supposé constant dans la direction de l'épaisseur pour les trois composants. La tige et les peaux inférieures ont présenté une théorie de la déformation par cisaillement linéaire avec raffinement Zig-Zag. Pour le noyau, le tangentiel a été appliquée en utilisant un FSPT. Pour réduire les DOF par nœud à sept, la compatibilité du déplacement aux interfaces supérieure et inférieure a été exploitée. Un élément à quatre nœuds a été implémenté pour cela formulation, donnant un élément avec 28 DOF. Pour

éviter le blocage de cisaillement de l'interpolation linéaire, une réduction programme d'intégration a été adopté. Les résultats semblaient très précis jusqu'à un rapport de rigidité peau / âme de 15.

Demasi a passé en revue le concept et les définitions des effets Zig-Zag des structures stratifiées. Puis un une revue de sa formulation unifiée généralisée a été donnée. Ensuite, l'auteur a proposé l'inclusion partielle de fonction Zig-Zag de Marakami (MZZF). Par partiellement, cela signifie qu'en exploitant le GUF (Generalized Uniform Formulation), on ne peut affiner qu'un des déplacements variables considérés par le MZZF. Pour évaluer la précision de l'inclusion partielle du MZZF, un modèle de référence a été choisi et comparé aux résultats exacts pour le cas de test choisi. La solution de base était une théorie avancée de l'ordre élevé (AHSDT) de quatrième ordre pour les trois variables de déplacement. Les raffinements de ZZ consistent en l'inclusion simple du MZZF pour le DOF sélectionné. Les résultats statiques ont montré que pour les plaques minces, les effets ZZ peuvent être négligés. Pour stratifiés épais, le MZZF est plus efficace, lorsqu'il est ajouté à tous les déplacements DOF en même temps. Suivant meilleur option était d'appliquer le MZZF simultanément sur les deux champs de déplacement dans le plan.

Structures composites laminées aux propriétés des matériaux variant progressivement dans l'épaisseur (Matériaux à classification fonctionnelle - MGF) ont été étudiés dans Neves et al. Les déplacements dans le plan étaient améliorés via la fonction hyperbolique de la coordonnée d'épaisseur. Une fonction exponentielle en utilisant un paramètre «P» a été suggéré pour évaluer la fraction volumétrique de céramique à une hauteur donnée. La loi des mélanges était alors suggérée pour obtenir les propriétés moyennes des matériaux à cette hauteur donnée. Equations dynamiques du mouvement et conditions aux limites de dérivées via la méthode PVD (Principe of Virtual Displacements) par intégration par les pièces. Une plaque composite en aluminium (face inférieure) et en alumine (face supérieure) a été étudiée numériquement en utilisant la formulation proposée. Pour résoudre avec précision les différentes propriétés dans la direction de l'épaisseur, 91 mathématiques des couches ont été utilisées pour résoudre les équations via la méthode RBF (Fonction de base radiale). La grille de Chebyshev a été utilisée et testé pour trois densités de mailles. Les résultats ont montré une solution quasi-3D des exemples choisis pour $p = 1, 4$ et 10 .

Neves et coll. ont étudié des structures composites stratifiées dont les propriétés des matériaux varient progressivement l'épaisseur (Matériaux fonctionnellement classés - FGM). Cependant, la formulation représente désormais une triple couche stratifiée. Deux configurations ont été étudiées. Pour la première, les deux faces étaient isotropes et le noyau était une MGF couche. Dans le second, le noyau était un matériau isotrope et les peaux étaient des couches de FGM. En raison de cette discontinuité du matériau à travers l'épaisseur du stratifié, MZZF a été appliqué à la fois au déplacement dans le plan fonctions de leur formulation précédente en utilisant une fonction sinus hyperbolique de la coordonnée d'épaisseur. Les équations gouvernantes et les solutions RBF pour les exemples statiques ont été dérivées via le même exercice. Les résultats ont été donnés pour 0,2, 0,5, 1, 2, 5 et 10 valeurs pour la fonction volumétrique exponentielle. Les résultats ont montré le même niveau de précision des travaux précédents.

En utilisant une théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre, Asadi, Wang et Qatu ont développé une théorie pour coquilles profondes. L'essentiel de l'approche consiste à conserver le terme « z / R » dans la formulation de la coque. Les équations du mouvement ont été résolues exactement en supposant un produit de la fonction trigonométrique pour les cinq variables de déplacement. Théories des coques régulières dérivées de la FSPT (First Shear Plate Theory) et de Qatu formulation, y compris le terme « z / R » (avec un facteur de correction de cisaillement de $5/6$), ont été comparés aux résultats 3D calculé en utilisant des éléments solides dans un modèle d'éléments finis construit dans ANSYS. La formulation de la coquille de Qatu a montré une petite amélioration par rapport au FSPT régulier Giunta et coll. ont travaillé sur des formulations de coquilles à double courbure pour prédire le comportement structurel de coques composites stratifiées. Plus précisément, ils ont testé la théorie classique du laminage, théorie de déformation par cisaillement de premier ordre, théorie de la déformation, par cisaillement d'ordre supérieur et théories Zig-Zag utilisant une méthode d'unification proposé par Carrera et Demasi. Giunta et coll évalué l'exactitude de chaque théorie en résolvant différents cas de chargement (flexion et charges ponctuelles uniformes bi-sinusoidales et réparties ou localisées) avec une Solution de type Navier. Pour montrer la précision de chaque théorie de coque considérée, différentes valeurs pour le côté à l'épaisseur (a/h) et les rapports rayon-côté de courbure (R / a) avec trois séquences d'empilement ($[0/90]$, $[0/90/0]$ et $[0/90]$), ont été évalués.

Malheureusement, il existe d'innombrables autres articles sur les théories des plaques et des coquilles, qui n'ont pas été cités dans ce travail qui peut être utile pour un problème particulier. Ceux discutés ici peuvent être vérifiés pour une enquête référence croisée. Principalement, les articles, qui comprennent des revues approfondies de la littérature, sont conseillés.

I.3. Conclusion:

Finalement, la question de telle théorie de plaque ou de coque présente les meilleurs résultats, en particulier dans les cas complexes comme celles des structures sandwich, reste ouverte. Comme de plus en plus de références sont vues, il est possible de dire qu'une théorie des plaques linéaires peut donner de meilleurs résultats qu'une théorie non linéaire sophistiquée, si elle est mieux résolue numériquement et / ou physiquement. Cela signifie que les erreurs numériques seront minimisées ou que la solution ne sera pas négliger la pertinence des comportements physiques et les dimensions du problème. Par conséquent, la section suivante est consacré à une revue des méthodes de résolution des théories plaque / coque utilisant principalement le FEM.

II. GENERALITE SUR LES METHODES DE RESOLUTIONS:

II.1.Introduction:

Dans ce chapitre on va faire une synthèse bibliographie sur les méthodes de résolutions notamment la méthode des éléments finis c'est la méthode plus utilisée grâce à sa flexibilité aux problèmes de détermination de comportement mécanique des plaques isotrope et plaques multicouches. On plus les approche utilisées de zig-zag, approche globale-locale et l'approche par couche.

II.2.Généralité sur les méthodes et les approches de résolutions:

Concernant la déformation de cisaillement et l'anisotropie des matériaux, Noor et Mathers ont étudié la convergence et précision de plusieurs éléments finis. Tous les éléments étaient conformes et obéissaient aux exigences de continuité C-0.

Les éléments étaient basés sur la théorie de la coque peu profonde, mais ils ont été modifiés pour tenir compte du cisaillement et de l'inertie rotative.

Ils se sont concentrés sur les effets de:

- 1) Changer l'ordre des polynômes d'approximation.
- 2) Y compris degré de liberté interne.
- 3) Utilisation des dérivées des déplacements comme paramètres nodaux.

En analysant les statiques, les dynamiques et problèmes de déplacement importants, les auteurs ont conclu que:

- 1) Les modèles de déplacement d'ordre supérieur atteignent un certain niveau de précision avec moins d'inconnues qu'un modèle d'ordre inférieur.
- 2) Les modèles d'ordre supérieur sont plus robustes concernant la limite des plaques minces.
- 3) L'utilisation de dérivés comme paramètres nodaux nécessite une attention particulière du aux les discontinuités non physiques possibles.
- 4) L'ajout de nœuds internes est préférable pour l'ajout de nœuds de réseau lorsque la convergence est en jeu. Cependant, pour des vibrations et un flambage libres, il est préférable d'ajouter des nœuds sur le réseau pour améliorer la précision, sauf dans le cas de modes de vibration plus élevés où les nœuds internes sont à nouveau conseillés.

- 5) Les modèles mixtes sont insensibles aux variations de déformation et d'épaisseur de cisaillement. Les interpolations d'ordre supérieur sont préférées afin d'améliorer les performances de l'élément. En revanche, les approches mixtes nécessitent un prétraitement supplémentaire en ce qui concerne de stockage matriciel des variables.
- 6) Même si l'anisotropie s'est avérée très influente sur les résultats, le couplage flexion-extension n'a pas d'effet majeur sur la convergence ou précision des éléments analysés.

Dans ce cas s'applique aux structures planes minces, qui ne sont sollicitées que par des charges agissant dans leur plan. Conventionnellement, le plan de la structure est xOy . L'épaisseur de la structure, très petite par rapport à ses deux autres dimensions, est symétriquement répartie de part et d'autre du plan xOy qui s'appelle le feuillet moyen. Ce type de comportement mécanique est par exemple applicable dans le cas d'un disque mince sollicité dans son plan ou d'une éprouvette de traction pour peu qu'elle soit suffisamment mince.

Un élément de coque non plat a été développé en utilisant une approche d'interpolation mixte par Bathe et Dvorkin. Une telle technique interpolait les valeurs de déformation calculées au milieu des bords de l'élément. Aucun la théorie de la coque spécifique n'a été abordée et l'élément a été conçu pour s'adapter aux analyses de coque épaisse et mince sans blocage de cisaillement.

La formulation tient également compte des grands déplacements et rotations, mais uniquement des petites déformations. La deuxième le tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff a été utilisée avec le tenseur de déformation conjugué de Green-Lagrange dans le Lagrangien Total formulation de l'élément fini. De plus, pour quelques patches tests, plusieurs autres exemples dont les cas linéaire de flambage et de plasticité parfaite (non-linéarité des matériaux) ont été comparés à d'autres solutions analytiques et tests expérimentaux. La formulation a montré une bonne capacité prédictive. Tous ces résultats peuvent être trouvés en détails dans la thèse de doctorat de Dvorkin. Dans sa thèse, le problème du verrouillage a été mieux souligné et expliqué, entre autres questions.

Plus tard, Bathe et Dvorkin ont dérivé un élément de plaque à quatre nœuds modifié, exploitant le continuum concepts dégénérés. Un élément iso-paramétrique a été développé sur la base de la théorie de Kirchhoff. Depuis les souches ont été résolues en tant que paramètres nodaux, la formulation a été considérée comme un type mixte. C'était l'un des principales

réalisations de cette formulation, l'utilisation de différentes interpolations pour les déplacements transversaux et déformations transversales de cisaillement. Les auteurs ont obtenu un élément robuste exempt ou indépendant de pathologies telles que le cisaillement blocage, modes zéro énergie et éléments déformés en utilisant une formulation de déplacement précédemment développée, Di Sciuva a comparé la précision et convergence d'éléments stratifiés triangulaires et rectangulaires dérivés de sa formulation (théorie raffinée) et via le classique. Ce dernier ne possédait que cinq variables par nœud (3 translation et 2 rotations) et les effets Zig-Zag dans le stratifié n'étaient pas représentés. Les problèmes de référence comprenaient la flexion et la liberté essais de vibration non amortis. Parmi les principaux résultats, les éléments formulés via la théorie classique présentée blocage de cisaillement, contrairement à ceux formulés avec sa théorie raffinée. Les résultats des éléments basés sur le la théorie raffinée avait également une meilleure précision. Une autre découverte intéressante est le fait que la précision des modèles construit dans des éléments triangulaires était sensible à leurs directions par rapport à la plaque Fried, Johnson et Tessler ont étudié la quantité minimale de degrés de liberté de triangulaires éléments pour prendre en compte correctement les déformations de cisaillement lors du pliage de plaques minces. Ils sont partis du nombre théorique de degrés de liberté nécessaires pour avoir des éléments compatibles pour le pliage de plaques minces et enlevés autant DDL que possible. Pour un élément de deuxième ordre, la quantité minimale de DDL trouvée était de 9, pour le quatrième ordre éléments, la quantité minimale de DDL était de 12. L'élément suivant était un élément de sixième ordre avec 18 DDL. Ce dernier élément était l'élément triangulaire compatible C-1 le plus connu.

Gilewski et Radwanska ont mené une enquête sur les éléments finis pour des coquilles moyennement épaisses. Ils ont classé les formulations de coque en éléments de coque dégénérés 3D ou en éléments de coque 2D en fonction des hypothèses des fonctions. Ils ont également séparé leur référence selon: stabilité, dynamique, coques laminées et sandwich problèmes géométriquement non linéaires, problèmes physiquement non linéaires, problèmes de transfert de chaleur et autres domaine. Concernant les performances des formulations proposées, il a été souligné que les formulations les plus récentes ont tendance à être plus gourmandes en calcul, mais elles sont plus précises. Mixtes ou hybrides sont exemples de ces approches.

Un élément de plaque rectangulaire à 40 degrés de liberté (Q40) a été proposé par Di Sciuva pour la solution de plaques stratifiées. On a supposé que la continuité inter-laminaire des contraintes transversales était remplie par l'équivalent approche monocouche. Sur les dix degrés de liberté par nœud, un avait 3 translations, 4 rotations, 2 courbures et 1 torsion. Les DDL assuraient la continuité C-1 pour les quantités transversales des quadrilatères de forme générale. Cinquième les polynômes d'ordre Hermite ont été utilisés comme fonctions d'interpolation pour se conformer aux exigences C-1. La forme des fonctions ont été définies avec des polynômes de Lagrange linéaires et, par conséquent, les variables dans le plan avaient une iso paramétrique fonction traitement, tandis que les transverses présentaient une approche sous-paramétrique. Les souches non linéaires ont été considérées selon les hypothèses de Von Kármán. Cisaille classique (CQ40), première (FQ40) et d'ordre supérieur (HQ40) des théories des plaques déformables ont été implémentées pour cet élément avec (RFQ40 et RHQ40) et sans effets Zig-Zag. Les formulations tenant compte des effets ZZ étaient appelées théories «raffinées». Les résultats avec ceux éléments ont été comparés à des solutions de forme fermée pour des problèmes statiques, dynamiques et non linéaires concernant stratifiés. En inspectant les tableaux de résultats, les éléments raffinés ont montré le meilleur accord avec les solutions d'analyse analytique.

Briassoulis a reformulé un élément C-0 à quatre nœuds à flexion par cisaillement pour éliminer à la fois la formulation et problèmes de verrouillage de cisaillement. La théorie des plaques Mindlin-Reissner a été utilisée pour tenir compte des effets de cisaillement. Une telle pathologie de la formulation de verrouillage eu lieu à la limite de la plaque mince, comme indiqué précédemment. Pour contrer ce verrouillage, l'auteur modifié le terme de couplage cisaillement-flexion dans la matrice de rigidité de l'élément. Le terme respectif a été évalué uniquement avec la contribution de la composante de déformation de cisaillement d'arête tangentielle. Ce faisant, les fausses fonctions responsables de ce mécanisme de verrouillage ont été évités. De plus, l'utilisation de l'intégration complète n'a assuré aucune déformation nulle modes d'énergie. Après avoir résolu le problème de verrouillage de cisaillement de la formulation, le problème de verrouillage de cisaillement était abordé. Si des plaques très minces (épaisseur / longueur $< 1 \times 10^{-3}$, cette limite dépend des charges externes et de la limite conditions) n'ont pas été prises en compte, la formulation proposée n'était pas sensible à la précision de cisaillement. Cependant, si des plaques plus minces étaient envisagées, le verrouillage de cisaillement aurait lieu. Une solution à ce problème a été proposée en utilisant l'addition d'un

facteur de pondération sur le facteur de correction de cisaillement d'environ l'inverse de la limite de plaque mince. Ensuite, multiplier le facteur de correction de cisaillement par 1×10^6 a rendu une théorie de déformation de cisaillement de premier ordre sans problèmes de verrouillage. La formulation a été testée et le niveau de précision était aussi bon que la théorie des plaques utilisée mais sans verrouillage.

Pour résoudre les problèmes de membrane et de flexion dans les coques peu profondes, la méthode Ritz a été rappelée comme une méthode de solution alternative par Qatu et Algothani. La technique a été comparée à la célèbre MEF procédure avec des éléments triangulaires (trois ou six nœuds) et rectangulaires (quatre ou huit nœuds) non compatibles.

Avec beaucoup moins de degrés de liberté et des résultats légèrement moins précis, la méthode Ritz s'est avérée être un précieuse technique pour étudier les coques laminées en flexion.

Toujours en 1994, un fait important a été mis en évidence par Qatu. Même si la non-linéarité géométrique les hypothèses sont importantes, elles ne doivent être prises en compte que pour les plaques et coques minces à moyennement épaisses ($\text{longueur}/\text{épaisseur} > 20$). En revanche, si la structure est une plaque ou une coque épaisse et que les flèches sont approximativement égale à l'épaisseur de la structure, la non-linéarité du matériau doit être considérée à la place. Il a défendu fondamentalement qu'une formulation tenant compte à la fois de la déformation de cisaillement et de la non-linéarité géométrique n'a une utilisation pratique dans des problèmes d'ingénierie typiques avec des structures stratifiées.

Dans deux études, un élément plat triangulaire multicouche nommé LACOT (Laminated Composite Triangle) a été généralisé dans la gamme des applications linéaires, non linéaires et thermiques. Basé sur un Kirchhoff type de théorie des plaques, les auteurs ont dérivé un élément fini en essayant d'éviter les pathologies classiques telles que verrouillage de la membrane et du cisaillement, modes parasites et à énergie nulle et anisotropie induite. Pour ce faire, la méthode naturelle mode a été proposée. En résumé, les modes naturels sont les modes de déformation purs, qui excluent les déplacements des corps rigides. Un nouveau système de coordonnées, défini comme système de coordonnées naturelles, a été dirigé par un total dans le plan directions de déformation. Dans ce nouveau système de coordonnées, les 18 DDL ont été réduits à 12 DDL.

Par conséquent, le 12x12 la matrice de rigidité des éléments a pris en compte les effets de dilatation, de distorsion et de cisaillement L'effet de cisaillement était découplé des déformations directes et a été estimé à partir des contributions de flexion antisymétriques. La matrice de rigidité a été formulée et assemblée en utilisant la méthode de regroupement physique intelligent. À traversé qui valence de l'énergie de déformation, le milieu continu a été regroupé en un média discret. La proposition technique était supposé mieux évaluer et contrôler les matrices de rigidité des éléments finis. Analyses non linéaires de grandes déplacements et les petites déformations ont confirmé les hypothèses avec de bons résultats pour différentes plaques composites. Puisqu'une théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre a été utilisée, des facteurs de correction de cisaillement ont été calculés sur la base de l'équivalence d'énergie de déformation de cisaillement transverse. Un bon accord avec les résultats de référence a été obtenu via la formulation en exemples statiques linéaires et non linéaires. Intégration des équations différentielles d'élasticité d'équilibre permise pour une estimation quadratique des contraintes transversales du continuum. Les meilleurs résultats ont été observés pour les plaques minces (longueur / épaisseur = 100), car le stratifié a été analysé en utilisant une théorie monocouche équivalente.

Utilisant toujours les coordonnées naturelles et la méthode de regroupement physique intelligente, Argyris et Tenek développé une théorie de coquille peu profonde nommée ARTE. Dans la formulation proposée, les arêtes triangulaires étaient représenté par des polynômes du troisième ordre et, par conséquent, des courbures linéaires. Contrairement au plat laminé similaire éléments également développés par les auteurs, les matrices de rigidité globale étaient pleines de différents termes de couplage. Comme pour ces éléments plats, le degré de liberté azimutal a été géré en utilisant une petite pondération ($1E-6$ facteur pour éviter les singularités dans la matrice de rigidité globale. Les exemples linéaires et non linéaires d'isotropes et les coques composites ont démontré la précision et la robustesse de la formulation. De meilleurs résultats de convergence pour l'élément de coque ont été réalisés par rapport à l'élément plat équivalent. En outre, aucun effet de verrouillage, faux modes, modes sablier ou similaires ont été vus. Malgré tous les résultats positifs, aucun effet dynamique n'a été discuté.

Deux éléments de coque à petite déformation créés par Dvorkin via l'interpolation mixte de tensorielle les critères des composants (MITC) ont été revus afin d'appliquer ce concept aux

analyses élasto-plastiques. Un nœud à quatre l'élément (MITC4) et un huit nœud (MITC8) ont été détaillés pour montrer comment l'interpolation spécifique peut éviter la pathologie de blocage de cisaillement. Les éléments proposés étaient exempts de modes d'énergie parasites, qui sont très courant dans les techniques d'intégration réduite / sélective. Dvorkin a déclaré que le succès de l'approche MITC en calcul des déformations transversales repose sur l'interpolation des valeurs des déformations calculées aux nœuds médians de l'élément. Après avoir évoqué les avantages et les particularités des éléments MITC4 et MITC8, l'auteur a dérivé une formulation élasto-plastique pour les déformations finies, c'est-à-dire les grandes déformations, pour l'élément MITC4. Le nouvel élément a été nommé MITC4-TLH après la formulation développée Total Lagrangian-Hencky. Le tenseur Hencky de déformation logarithmique et son tenseur de contrainte conjugué ont été utilisés. En raison de l'intérêt pour les matériaux métalliques, l'écroutissage isotrope (en utilisant la règle d'écoulement associée) et le critère d'élasticité de Von Mises (J_2) ont été supposés. Même bien que deux exemples d'application de la formulation élasto-plastique aient été donnés, aucune comparaison avec une formulation expérimentale ou autre une approche analytique numérique a été fournie.

Sansour et Bednarczyk ont formulé et testé deux éléments de coque finis (quatre et neuf nœuds) par en utilisant une nouvelle théorie de coque construite sur les concepts du continuum de Cosserat. Une discussion complète du processus de dérivation était disponible pour deux espaces de configuration (Killing ou Euclidian Metric). Déplacement et les champs de rotation ont été explicitement introduits. Un traitement numérique approprié a été effectué pour éviter les phénomènes de verrouillage et pour permettre à l'élément formulé de modéliser correctement des rotations finies. Perçage des degrés de liberté étaient inhérentes à la formulation théorique. Les éléments ont été développés sur un modèle principe variationnel partiellement mixte. En ce qui concerne la discrétisation régulière, les quatre et les neuf éléments nœuds ont montré une précision équivalente.

Cependant, l'élément à neuf nœuds était un meilleur choix pour les comportements de grande distorsion. Ces conclusions étaient extrait d'exemples résolus de cliquetis d'un cylindre à charnière, cliquetis d'une calotte sphérique, pincé cylindre, cylindre pincé avec diaphragme rigide et coque hémisphérique pincée.

En utilisant la théorie de la coque mince de Sander, un élément triangulaire conforme à dix nœuds avec 30 DDL était développé par Farsakh et Qatu. Les relations constitutives de l'élément ont été dérivées pour le stratifié coques composites dans le cadre des théories monocouches équivalentes. On a supposé une déformation par cisaillement négligeable.

La théorie de la coque de Sandwich est une théorie de la coque profonde et, par conséquent, plus souple que la théorie de la coque peu profonde. Pour cette raison, la formulation d'élément proposée a montré une meilleure précision et des performances de convergence en raison de sa conformité caractéristiques. La conclusion a été obtenue après inspection et comparaison de l'élément et de sa théorie de la coque à d'autres théories et techniques de résolution (analytiques, MEF, Ritz et expérimentales) dans les problèmes statiques et vibratoires de coques laminées anisotropes.

Taylor, Vasiliev et Dillard ont étudié la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre en divisant la solution dans le potentiel du champ de déplacement et des fonctions de flux liées au mouvement du plan de rotation.

En reconnaissant que les fonctions de flux étaient liées aux effets de couche limite, un verrouillage (comme h_0), déformation de cisaillement ne disparaît pas, la soi-disant solution sans cisaillement parasite a été dérivée, lorsque les auteurs ont négligé l'influence des effets de frontière (fonctions de flux) sur les déformations transversales de cisaillement. Uniquement en torsion pure ou en contact problèmes, par exemple, ces effets ne doivent pas être écartés comme l'affirment les auteurs. Ainsi, un 36 DDL, l'élément de quatre nœud avec les exigences de continuité C-2 a été développé (les bords de l'élément ont été alignés avec le axe x-y). Excellent accord avec les solutions exactes de type Navier et bon taux de convergence (mailles 1x1 avec conditions de symétrie) ont été vérifiées. Bien que les résultats soient prometteurs, l'approche n'a été possible que pour matériaux transversalement isotropes. Pour les matériaux orthotropes et anisotropes, la séparation des équations en équations indépendantes était rarement possible.

En exploitant une technique de sous-structuration, un élément plaque / coque triangulaire à six nœuds par couche a été créé par Botello, Oñate et Canet en utilisant une formulation mixte déplacement-déformation. L'approche mixte consistait à supprimer la rigidité excessive de la théorie de déformation par cisaillement du premier ordre utilisée. Une telle sous-structuration

technique a permis de réduire le nombre réel d'équations de couche à résoudre à un ensemble d'équations de couche. Cependant, il a également permis d'augmenter le nombre d'équations de couche afin d'augmenter la précision, c'est-à-dire qu'un stratifié à trois couches peut être transformé en un stratifié virtuel à neuf couches. Bien qu'une telle technique ait à réduire la taille de la matrice système, les calculs algébriques supplémentaires nécessitaient plus de temps de traitement. Par conséquent on pourrait maintenant résoudre des systèmes plus grands à des vitesses plus lentes en utilisant le même matériel. Si le stockage n'est pas un problème peut-être que la proposition technique n'est pas si attrayante. Ainsi, une enquête supplémentaire est nécessaire. Statique et dynamique des exemples dans le papier ont montré un bon comportement de l'élément pour les stratifiés composites fins et épais par rapport aux autres résultats de la littérature.

Carrera a étudié l'influence de la contrainte normale transversale sur le déplacement classique ou théories mixte (Théorème variationnel mixte de Reissner) des plaques et des coquilles. Les formulations évaluées étaient équivalentes aux théories monocouche en utilisant des déplacements améliorés selon la théorie Zig-Zag de Murakami. Jusqu'à des théories troisième d'ordre ont été mises en œuvre et comparées à une théorie mixte du quatrième ordre par couches, qui donne presque de résultats de l'élasticité exacte. Les formulations des recherches précédentes ont également été comparées pour des problèmes et analyses vibratoires gratuites. Carrera a conclu que la recommandation de Koiter devrait également être étendu aux plaques et coques laminées, concernant la continuité inter laminaire. Pour hautement anisotrope et coques épais, seule une description par couches du problème pourrait fournir des résultats dynamiques très précis.

Carrera et Demasi ont publié deux articles complémentaires avec des éléments de plaque à 4, 8 et 9 nœuds formulé via les méthodes PVD ou RMVT (Théorème variationnel mixte de Reissner). Un modèle de nomenclature selon l'ordre d'expansion, l'énoncé variationnel, la description des variables, la continuité inter-laminaire et Zig-Zag des fonctions de déplacement ont été proposées. Cette formulation pourrait être considérée comme un type de formulation unifiée. Cela signifie que toute théorie des plaques dans la littérature (en fait la plupart d'entre elles) peut être décrite en utilisant le bon choix des variables et des constantes dans la formulation de ce travail. Dans la première partie de l'œuvre, l'élément les formulations ont été

présentées et expliquées. Une attention particulière doit être portée aux éléments développés via approche RMVT en raison des DDL de contraintes supplémentaires impliquées. Sur la deuxième partie, 66 éléments différents ont été évalués en utilisant des plaques stratifiées symétriques et asymétriques sous quatre cas de charge: force concentrée, pression uniforme, charges sinusoïdales et bi-sinusoïdales. Le blocage de cisaillement a été évité en utilisant l'intégration sélective / réduite. Les auteurs ont constaté que les éléments RMVT n'introduisaient pas de problèmes numériques supplémentaires, lorsque par rapport à ceux basés sur la déclaration PVD classique. Les résultats ont également montré que les modèles mixtes avec la continuité des contraintes normales transversales étaient plus attractives que celles qui violaient la contrainte physique. Par couches les solutions se sont avérées être complexes en termes de calcul et pourraient être comparées aux solutions d'élasticité 3D. Par conséquent, ce type de formulation ne doit être utilisé que dans les cas extrêmes de face à épaisseur, cœur à peau rapports épaisseur / module élastique. Les matériaux composites stratifiés anisotropes avec des couches dissymétriques peuvent également avoir besoin d'approximations couches par couches.

En ce qui concerne toujours les UF, un examen approfondi des structures de plaques et de coques multicouches a été réalisé par Carrera. Pour des raisons de continuité, ce document est examiné dans cette section. Dans le cadre de l'axiomatique approches, il a proposé une formulation unifiée pour les coquilles et les plaques et l'a nommée CUF (Carrera's Unified Formulation). Cette formulation permet aux utilisateurs de choisir l'ordre d'expansion dans le sens de l'épaisseur pour les variables à portée de main. L'ordre d'expansion était le même pour toutes les directions de la variable à résoudre. Zigzag des améliorations peuvent également être implémentées dans CUF. Cela a été accompli grâce à la définition d'un noyau fondamental de la matrice de rigidité. Dans ses recherches, différentes théories pour représenter la complication des effets résultant de l'anisotropie du matériau ainsi que les exigences de continuités $C-0z$ ont été discutés et regroupés selon:

- 1) élimination de la coordonnée d'épaisseur z .
- 2) choix de la variable inconnue.
- 3) définition du déplacement global.
- 4) solution par les méthodes EF.

Le premier groupe était divisé en:

1. Continuité ou modèles basés sur les résultantes de contrainte.
2. Approches asymptotiques.
3. Approches axiomatiques.

Le deuxième groupe comprend:

1. la formulation de la contrainte.
2. Formulation de déplacement.
3. Formulation mixte.

Le troisième groupe était formé par:

1. Modèles monocouches équivalents;
2. Modèles par couches.

Finalement, comme option aux deux dimensions de plaque et éléments de coque, la dernière catégorie offre la possibilité de résoudre les équations par:

1. Développer des éléments finis dégénérés.
2. Utilisation de méthodes hybrides.
3. Utiliser des approches globales / locales avec Méthodes «p» ou «s». Concernant les

Modèles classiques appliqués aux structures multicouches, Carrera a souligné que les déformations transversales de cisaillement négligées dans les théories classiques (Kirchhoff – Love, CLT) sont insuffisantes pour modéliser correctement les stratifiés épais. De plus, les formulations classiques en plaques épaisses (Reissner – Mindlin, FSDT) ne décrivaient ni effets Zig-Zag ni continuité inter-laminaire, ce qui n'était pas satisfaisant pour les analyses de défaillance locale, par exemple. Pour ces problèmes, la recommandation de Koiter doit être suivie, c'est-à-dire que les contraintes transversales et normales doivent être considérées en même temps. On a vu que trois types de théorie Zig-Zag peuvent être trouvés dans la littérature (Lekhnitskii, Ambartsumian et Reissner). Les théories de Lekhnitskii et d'Ambartsumian sont dérivées en assimilant les contraintes transversales aux interfaces des couches et intégrer les

relations de déformation via équations constitutive (loi de Hooke) pour trouver les fonctions de déplacement Zig-Zag. Reissner a utilisé une approche mixte et décidé de résoudre à la fois les variables de déplacement et de contrainte, ce qui donne de meilleurs résultats. Pour réduire le nombre de variables dans cette dernière approche, Carrera a proposé l'utilisation d'une forme faible de la loi de Hooke (WFHL de sorte que les matrices finales ne comportent que des contraintes ou des déplacements. Pour finir, l'examen a conclu que l'utilisation des théories par couches est obligatoire pour obtenir des champs de déplacement presque 3D et des contraintes transversales directement à partir de relations constitutives.

Afin d'évaluer l'exactitude et la robustesse de la formulation compacte unifiée proposée, il a publié un article d'accompagnement avec une vaste collection d'autres théories publiées sur les plaques et les coquilles. Premièrement, pour évaluer la précision exacte de chaque formulation, il a utilisé des solutions analytiques pour la flexion et la vibration des plaques, Couche par couche par rapport à la description Couche simple équivalente, pré et post évaluations des contraintes transversales normales, flexion des coques, vibration des coques et enfin, effet de la contrainte normale transversale sur la flexion et les vibrations d'assiettes. Deuxièmement, des solutions d'éléments finis à neuf nœuds ont été utilisées pour comparer les différentes formulations. Tondre l'effet de verrouillage a été géré par le concept Contrainte de cisaillement naturelle supposée. Chaque fois que disponibles, des solutions de forme fermée ont été utilisées pour évaluer les erreurs de la méthode EF. Après une inspection détaillée des résultats, en résumé, Carrera a soutenu que:

1. Les descriptions mixtes (RMVT) sont plus précises que la formulation de déplacement classique (PVD).
2. Les analyses mixtes ne nécessitent aucune procédure de post-traitement.
3. Les descriptions couche par couche sont plus précises que celles équivalentes à une seule couche, mais elles sont plus cher.
4. Au fur et à mesure que le nombre de couches augmente, les théories couches par couches deviennent insensibles à l'ordre d'expansion ou l'approche variationnelle utilisée (déplacement ou mixte).
5. Les stratifiés asymétriques sont sensibles à l'ordre d'expansion. Les extensions quadratiques semblent être plus efficace sur ces stratifiés.

6. La précision des théories monocouches équivalentes développées sur les variables de déplacement ne diminue en fonction de l'augmentation des plis dans le stratifié.
7. Pour les stratifiés épais et les structures sandwich, la contrainte normale transversale ne peut être négligée.
8. La comparaison des théories monocouche équivalentes montre que la formulation mixte (RMVT) nécessite les deux continuité inter-laminaire et effets Zig-Zag; sinon, utiliser l'approche mixte est inutile.
9. La précision des différentes formulations est encore subordonnée aux résultats attendus.

Mieux les évaluations de la contrainte dans le plan par rapport à la contrainte transversale sont obtenues par différentes modélisations Sur la base des travaux précédents de Carrera ci-dessus, Carrera et Ciuffreda ont fourni une comparaison élargie des théories des plaques. Trente-sept théories ont été mises en œuvre. Ils ont considéré les problèmes de flexion du sandwich et plaques croisées sous des distributions harmoniques, uniformes, triangulaires et en forme de tente des charges de pression transversales Certaines des charges étaient nouvelles dans la littérature. Les théories ont été résolues via des solutions analytiques de type Navier et via la méthode des éléments finis. Théories monocouche équivalentes, théories Couche par couche, déplacement classique des formulations et des formulations mixtes, toutes avec des ordres de précision différents, ont été soumises aux tests. Effets ZZ et la continuité inter-laminaire a également été analysée. Le résultat des tests peut être résumé en déclarant que le meilleur la solution de plaque approximative était le type Couche par couche du quatrième ordre obtenu par une approche mixte Couche par couche(LM4), et la moins précise est la théorie classique des stratifiés (CLT). Les trente-cinq autres approches se situent entre, à savoir: Couche équivalente mixte (EMC), monocouche équivalente irréductible (ED), irréductible Couche par couche (LD) et autres. D'autres conclusions à souligner sont le fait qu'un déplacement équivalent les théories peuvent être complètement erronées même pour des plaques moyennement épaisses et des stratifiés à noyau faible, ce qui exige des déplacements descriptions d'ordre supérieur ou Couche par couche.

Ferreira, Roque et Jorge ont utilisé une théorie de la déformation par cisaillement pour modéliser une composite plaque symétrique discrétisées par une méthode sans maillage basée sur des fonctions de base radiales multi quadriques globales (RBF). Le papier était limité à la fonction multi quadrique appliquée sur des grilles régulières pour différentes densités. En

utilisant fonctions trigonométriques dans le sens de l'épaisseur, le critère des contraintes de cisaillement transversales nulles en haut et les surfaces inférieures de la plaque étaient satisfaites, car c'était une forme de solution forte. Les résultats de cross-ply et les stratifiés sandwich pour 11, 15 et 21 points de grille étaient en bien meilleur accord avec la solution exacte, lorsque par rapport aux résultats obtenus via les théories CLT, FSDT et HSDT (High Order Shear Deformation Theory).

Pour éviter d'avoir à gérer les exigences de continuité C-1 et C-2 et en utilisant une plaque raffinée théorie (comportement Zig-Zag modélisé via la fonction Heaviside) pour résoudre des plaques stratifiées en utilisant des méthodes éléments finis, une méthode de post-traitement a été développée et recommandée par Icardi. Le cœur de la proposition la formulation repose sur l'équivalence des valeurs d'énergie de déformation obtenues en utilisant la théorie FSDT bien connue avec cinq DDL de base (u, v, w, x, y) et une théorie des plaques de Zig-Zag d'ordre élevé. Une telle approche était motivée par l'imprécision du FSDT pour capturer correctement les contraintes transversales. Tout d'abord une plaque rectangulaire C-0 à huit nœuds L'élément a été dérivée en utilisant les fonctions de forme de hasard du second ordre pour le FSDT. L'élément a été utilisé pour obtenir une première estimation des cinq valeurs de déplacement de base. Ensuite, en ajoutant interactivement des termes correctifs, La solution FSDT a été améliorée jusqu'à ce que la nouvelle énergie de déformation obtenue atteigne la valeur de celle qui était obtenu via la théorie Zig-Zag.

Cela a été accompli en minimisant la fonction définie par la différence de énergies de déformation calculées via la formulation FSDT et Zig-Zag. Pour calculer les déformations et les contraintes, les valeurs de déplacement ont été interpolées à l'aide de fonctions splines, qui ont ensuite été différenciées. Les contraintes transversales ont été post-traitées en utilisant l'intégration des équations d'équilibre locales. Pour quantifier la précision de la méthode, Icardi a comparé les résultats de sa formulation raffinée (3D) à des solutions exactes. En outre, il a étudié la défaillance des stratifiés sous des charges d'impact à faible vitesse. Il a sélectionné huit critères de défaillance composites et vérifié les résultats de sa formulation en utilisant les résultats des expériences. Les dommages et le délaminage induits par l'impact prévus les occurrences à travers l'épaisseur ont montré une bonne concordance avec celles détectées par l'inspection par ultrasons.

Moreira, Dias Rodrigues et Ferreira ont amélioré la théorie des plaques de Reissner-Mindlin avec le MITC (Interpolation mixte des composants tensoriels -) technique. Deux éléments ont été proposés. Ils étaient étiquetés comme layw4c et layw4m. Le premier ne portait pas les modes de déformation quadratiques incompatibles mis en œuvre dans le deuxième élément pour améliorer la réponse au cisaillement de la membrane. Les degrés de liberté de forage étaient abordés en utilisant une rigidité de forage fictive. La matrice de masse cohérente a été regroupée par une mise à l'échelle diagonale technique, qui a mieux préservé les termes de couplage dans la matrice d'origine. Les éléments ont passé la plaque mince patch test, et la formulation de la plaque a été testée en utilisant des exemples statiques particuliers trouvés dans la littérature (Morley's plaque oblique, cylindre pincé, plaque sandwich orthotrope de Srinivas avec noyau souple, etc.) et les dynamiques habituelles évaluations des fréquences naturelles. Les résultats statiques ont atteint les données de référence pour les maillages aussi grands que 32x32éléments. Les résultats dynamiques ont montré un taux de convergence plus rapide pour les fréquences naturelles calculées avec la matrice de masse localisée. En tant qu'approche couches par couches, tous les résultats étaient très proches des valeurs de référence, qui étaient supposé exact.

Karger et coll. ont amélioré la performance FSDT appliquée aux structures sandwich, en utilisant un trois couche (couche par couche), élément à huit nœuds avec neuf DDL par nœud. En utilisant un prétraitement équations de l'équilibre, la contribution de la rigidité de déformation transversale a été améliorée. Pour éviter les fonctions de forme de second ordre, les dérivées de déformation ont été remplacées par des forces de cisaillement transversales, qui ne nécessitaient que les premières dérivées de la forme fonction. Ceci a été accompli en écrivant les dérivées de déformation en termes de dérivées de moment. Les contraintes transversales de cisaillement ont été obtenues par post-intégration des équations d'équilibre. Une structure sandwich à noyau souple sous une charge transversale distribuée de manière sinusoïdale a été utilisée pour le benchmark. Les solutions exactes et approximatives étaient comparées. Les résultats numériques ont montré que le nouvel d'élément avait de bonnes capacités de prédiction en ce qui concerne déplacements et contraintes. Par exemple, le post-traitement adopté a fourni de très bonnes contraintes transversales.

D'Ottavio et al. Ont appliqué la formulation unifiée (CUF) de Carrera à une étude de cas sélectionnée afin d'évaluer la précision des formulations unifiées. Le boîtier se composait d'un stratifié à trois couches de graphite / époxy avec la séquence d'empilement [0/90/0]. Tous les plis avaient la même épaisseur. Le module d'élasticité longitudinal était de 25 fois supérieur au transversal. Un blocage de cisaillement a été trouvé dans certains des tests de formulations, et il était supprimée en utilisant l'intégration sélective / réduite comme d'habitude. Les auteurs ont rappelé que le cisaillement et le verrouillage de la membrane peut être moins prononcé, mais toujours présent, selon l'ordre de la formulation, plaque et la géométrie des éléments et les propriétés des matériaux. Tout comme l'a observé Carrera, les résultats du CUF étaient robustes et aussi précis que les théories analysées pourraient l'être dans la mise en œuvre des éléments finis.

Demasi était principalement concerné par les variables de contrainte dans les formulations mixtes couches par couches dans son article. Il a mis en œuvre la formulation unifiée de Carrera, puis résout les équations en condensant ou non la contrainte. Les DDL au niveau de l'élément pour travailler avec des déplacements uniquement au niveau de la structure au lieu d'un système linéaire. L'approche a donné deux éléments multicouches: LMN et LMNF (L = couche par couche, M = formulation mixte, N ordre d'expansion des variables dans la direction z, F = cas complet sans condensation). Lorsque la condensation statique a été utilisée, la continuité des contraintes transversales n'était pas garantie contrairement au cas complet où il était. La condensation statique était une technique de sous-structuration généralement appliquée dans les analyses dynamiques pour réduire les coûts de calcul dus aux DDL qu'il fallait résoudre via un modèle EF. Une poutre à deux couches et une plaque à quatre couches ont été analysés. Le premier exemple a été comparé à une solution numérique obtenue via une EF commerciale paquet NASTRAN. Malheureusement, aucun détail du modèle NASTRAN n'a été donné explicitement. Le deuxième exemple a été comparé à des solutions 3D analytiques. Les comparaisons du premier exemple ont été données graphiquement et a présenté une correspondance globale satisfaisante des résultats. Le deuxième cas a été comparé à un tableau contenant les résultats pour les deux éléments étudiés mis en œuvre jusqu'au quatrième ordre. Il semblait que les contraintes transversales ont été grandement améliorées en utilisant l'élément LMNF, mais le déplacement transversal ne l'était pas. Aussi non des informations sur les

résultats dans le plan ont été fournies pour évaluer la précision totale de la formulation avec cet exemple.

Un travail antérieur de Li et Liu a été amélioré dans le travail de Zhen et Wanji pour rendre compte de couches normales transversales. La nouvelle théorie raffinée d'ordre supérieur global-local était l'extension de Li et Liu 3-1,2 théorie d'ordre supérieur global-local avec contribution explicite de la déformation normale transversale par termes d'ordre supérieur dans l'équation de déplacement transversal (w). L'expression «1,2-3 global-local» signifie qu'il y avait deux raffinements locaux. La première modification a ajouté des descriptions de premier et deuxième (1,2) ordre aux déplacements locaux. Le deuxième raffinement local a été l'inclusion d'un troisième mandat de commande (3). Seulement deux des améliorations étaient possibles en raison du nombre d'exigences de continuité disponibles. L'approche était indépendante du nombre de couches du stratifié. Une telle proposition a été mise en œuvre via des éléments finis avec C-1 continuité du déplacement transversal. Un élément de sérendip à huit nœuds a été transformé en un élément à quatre nœuds par suppression des nœuds intermédiaires via les fonctions Hermite. Sur la base de cette réduction, l'élément présentait 4x19 DDL. Cet élément était nommé QLP19 et Li et Liu's QLP13. Malgré l'effort pour trouver le sens de cette lettre acronyme, on croyait que QLP signifie « Plate Quadrilatère ». Cependant, les chiffres ont été liés à la DDL de chaque nœud. La méthode de l'élément quadrilatéral discret en plaque mince a été utilisée pour contourner la C-1 exigence dans le travail. Les fonctions de déplacement C-0 ont été dérivées pour formuler la déformation de cisaillement. Contraintes thermique sont également été pris en compte pour la proposition de théorie des plaques. Les résultats de trois études de cas avec différentes longueurs d'épaisseur les rapports et les configurations de stratifié ont montré que la performance de l'élément proposé était très proche des solutions analytiques exactes et était meilleur que Li et Liu.

L'application des théories des plaques aux structures sandwich a été examinée par Hu et al, les formulations single de couche équivalent (ESL) couche et couche par couche (LW) ont été examinées avec des raffinements de Zig-Zag (ZZ). Depuis le noyau est généralement constitué d'un matériau viscoélastique mécaniquement plus faible que le matériau des faces, l'approche a tenté une formulation de plaque par couches. Une telle théorie comprend deux couches pour modéliser les peaux et une pour représentent le noyau. Pour estimer l'exactitude de la

formulation proposée, sept autres théories différentes des plaques et deux problèmes ont été choisis. CLT, HSDT-Reddy's (avec et sans ZZ-IC), HSDT-Touratier's (avec et sans ZZ-IC) et deux autres modèles, qui attribuaient la théorie des plaques CLT aux faces et celle du FSDT au cœur. Tout d'abord, le problème était un test de flexion en trois points d'une poutre sandwich pour évaluer la contrainte et le déplacement des champs. Le deuxième problème était l'analyse des vibrations libres d'une poutre sandwich viscoélastique simplement supportée. Les solutions pour les deux cas ont été dérivées analytiquement. Une solution numérique a été développée en utilisant une solution bidimensionnelle élément de plaque à huit nœuds avec 16 DDL (2D-Q8), qui a été implémenté en interne le code EF. Dynamique et des tests statiques ont montré la nécessité d'utiliser des modèles d'ordre supérieur pour les structures sandwich à âme épaisse et souple. Outre la continuité inter-laminaire des contraintes transversales était nécessaire pour déterminer correctement la contrainte de cisaillement maximale en le stratifié.

Demasi a proposé une généralisation supplémentaire de la formulation unifiée de Carrera (CUF). Cette généralisation a été étiquetée comme GUF (Generalized Unified Formulation). Exactement comme dans CUF, la théorie a tourné autour d'un noyau ou noyau fondamental de la formulation unifiée. Pour CUF, ce noyau était un invariant 3x3 matrices de rigidité, qui s'est développée selon les raffinements inclus pour les champs de déplacement (ordre d'expansion et inclusion de termes Zig-Zag) et le type d'approche (Simple Equivalente Couche ou par couche). Pour le GUF actuel, chaque champ de déplacement était désormais découplé des autres concernant les raffinements choisis. Désormais, chaque champ peut être affiné indépendamment de l'autre. La procédure a maintenant donné une matrice de noyau avec 6 composants (en raison de la symétrie) qui ont été expansés différemment les uns des autres. Par ces moyens, L'auteur a confirmé que la formulation avait 6 matrices invariantes 1x1 au lieu d'une matrice invariante 3x3 comme dans CUF L'intégration des termes de direction d'épaisseur étaient plus délicate, en raison de la complexité de l'intégrale. Puisque, pour chaque champ de déplacement «u», «v» et «w», on peut désormais assigner des combinaisons de raffinement infinies, l'auteur a suggéré le symbole -3 pour son GUF et -1 pour CUF. Pour tester la formulation, une solution de type Navier a été utilisé pour obtenir une solution analytique. L'examen des résultats a montré que le choix du maximum l'ordre d'expansion dans le sens de l'épaisseur pourrait rendre des prévisions médiocres ou très précises. Cela dépendait de chacun niveau de raffinement choisi par l'utilisateur pour chaque champ de déplacement. L'approche était également intéressante pour le

multi-domaine des problèmes tels que des problèmes thermoélectriques-mécaniques, des matériaux piézoélectriques par exemple.

La même théorie publiée dans ses travaux précédents a été revue dans les travaux suivants. Cependant, plus une explication et une dérivation complètes et détaillées de tous les noyaux de GUF ont été présentées. La formulation reposait uniquement sur des variables de déplacement; par conséquent, il a été étiqueté comme approche classique. Malgré la mention MEF dans le titre, l'article ne faisait qu'indiquer le potentiel de la formulation dans le développement de codes intelligents. Ils devraient utiliser les ressources de calcul minimales en réduisant automatiquement les DDL de la formulation à l'essentiel. Plusieurs combinaisons de raffinement pour les trois champs de déplacement ont été testées et comparées à la solution exacte pour évaluer l'influence de chaque type et intensité de raffinement.

Un nouveau GUF basé sur une approche mixte dérivée par Demasi. Le travail a suivi les étapes de sa formulation axiomatique de déplacement classique «-3», où des raffinements découplés infinis ont été rendus possibles pour chacune des trois variables de déplacement. Maintenant, trois autres des raffinements non couplés pour les variables de contrainte ont été développés. Puisqu'il y avait trois autres variables de contrainte, la nouvelle théorie a donc été étiquetée «-6». Dans l'article, il a soulevé tous les types existants de théories des plaques et brièvement a expliqué les différences et les performances. Basé sur la même logique du GUF développé avec les déplacements variables uniquement via PVD, les équations qui régissent ce cas mixte, présentées dans la partie I, ont donné 13 1×1 matrices de noyau invariantes. À titre de comparaison, la formulation unifiée de Carrera génère 4 noyaux invariants 3×3 matrices avec 22 termes non nuls pour la formulation mixte.

Les approches mixtes Couche par couche nécessitent le couplage des matrices de noyau de déplacement et de contrainte. Partie II a détaillé les avantages de la formulation et comment les matrices de noyau pour chaque couche ont été assemblées pour former la matrice de rigidité globale. En raison de la grande quantité de DDL, une technique de condensation statique peut être appliquée pour réduire le coût de calcul. Cette possibilité et ses conséquences ont déjà été étudiées par Demasi. L'auteur a également détaillé comment obtenir les contraintes dans le plan et hors plan grâce à des équations constitutives et par l'intégration d'équations d'équilibre.

La partie III traite en utilisant des théories monocouches équivalentes d'ordre élevé. Ce qui doit être souligné dans le papier était la procédure d'assemblage du niveau de la couche au niveau multicouche pour obtenir la matrice de rigidité globale basée sur cette formulation unifiée mixte. Trois combinaisons ont été évaluées. Quand les matrices de noyau de déplacement pures étaient impliquées, les contributions ont été additionnées comme d'habitude. Lorsque les matrices de noyau de couplage étaient impliquées, seulement les termes correspondant au déplacement transversal et à la contrainte des couches supérieure et inférieure de deux plis consécutifs ont été additionnés. Finalement, lorsque des matrices de noyau de contraintes pures ont été assemblées, le processus suit le foret par couches. Compte tenu de la complexité de l'assemblage, l'auteur a étiqueté les formulations proposées comme des approches «quasi-Couche par couche».

Des considérations Zig-Zag ont été faites dans le quatrième article. Demasi a brièvement passé en revue les principales théories de Zig-Zag et à l'instar de la partie III de son enquête, il a expliqué comment une formulation équivalente à une seule couche pourrait être améliorée. La fonction Zig-Zag de Murakami a été expliquée et choisie pour affiner les formulations en raison de sa simplicité et efficacité. Une fois de plus, il faut faire attention au processus d'assemblage, qui rend une quasi-couche matrice élasticité de rigidité globale Le GUF basé sur une approche mixte est résumé dans un organigramme dans le dernier article. Pour tester les théories infinies, l'auteur a résolu analytiquement deux cas de test via des fonctions de type Navier. Parmi les principaux résultats, on peut souligner le fait que les champs de déplacement et de contrainte dans le sens de l'épaisseur peuvent osciller.

De plus, l'utilisation du raffinement de Murakami n'améliorait pas toujours les résultats. D'autres conclusions pourraient être tirées de ce dernier article (Partie V), mais en raison de la complexité des raffinements combinés, il était sage de les lire en papier original.

Carrera, Cinefra et Nali ont incorporé la technique MITC dans CUF en utilisant le principe de déplacement virtuel (PVD). Une charge transversale bi-sinusoïdale a été considérée pour l'évaluation de la modification. Les solutions analytiques de forme fermée (A) de ce cas de chargement ont été comparées à l'approche MITC4 actuelle, et les formulations de déplacement classiques sous un schéma numérique différent: points de Gauss 2x2 complets (N), réduction du point de Gauss 1x1 (R) et du point de Gauss sélectif 1x1 pour la flexion et 1x1 pour le cisaillement transversal. Les résultats global ont montré que, par ordre de précision décroissante,

on avait: A> R> S> MITC4> N («>» signifie plus précis. Cependant, les trois solutions approximatives (R, S et M) ont produit des modes d'énergie parasite. Il a été déclaré que ces «modes non physiques» dépendaient du cas du matériau, des géométries, du maillage, des chargements, etc. Une étude de convergence des fréquences propres d'une poutre d'aluminium isotrope, résolues via le schéma d'intégration sélective, ont révélé que le nombre de modes parasites a été réduit par l'augmentation de la densité de maillage. Dans ce contexte, le MITC technique réduit encore davantage le nombre de modes d'énergie parasite et décale le mode restant vers les hautes fréquences. Ainsi, malgré l'augmentation de la complexité de la dérivation du CUF modifié, le montant des DDL était le idem du CUF original.

Selon Carrera, Miglioretti et Petrolo, l'approche CUF a été utilisée pour obtenir une meilleure compréhension de chaque terme d'expansion dans chaque variable de déplacement. Les modèles ESL obtenus via des la formulation du déplacement a été étudiée. En particulier, la couche unique équivalente du quatrième ordre (ED4) et les théories par couches du quatrième ordre (LD4) ont été comparées. La théorie LD4 a été utilisée comme solution de référence. Une fois encore, une solution analytique de forme fermée a été utilisée pour résoudre les équations d'une plaque stratifiée sous différents charges transversales. Ensuite, d'autres paramètres différents ont été autorisés à changer:

Le rapport longueur / épaisseur, le rapport orthotrope, orientation des plis, symétrie de la stratification et conditions aux limites en plus du chargement.

Chacun de ces cinq paramètres a été évalué un à la fois. Ensuite, l'influence de chaque terme d'expansion dans le La théorie ED4 a été évaluée par sa suppression. La théorie résultante a été comparée graphiquement à la solution LD4 pour la contrainte normale dans le plan et la contrainte de cisaillement hors plan. En inspectant ces graphiques, un déplacement spécifique des fonctions ont été dérivées pour chaque variable de déplacement et de contrainte. Les nouveaux résultats par rapport aux données de la littérature ont montré que la formulation pouvait réduire les erreurs jusqu'à trois ordres de grandeur. Quant à la étude paramétrique des formulations, l'influence de chaque terme a également été fortement influencée par configuration le stratifié.

Tous les paramètres ont montré une influence qualitative sur les résultats et l'inclusion ou la suppression des termes peuvent changer avec le paramètre. L'intensité de chaque terme variait également en fonction des paramètres. Les travaux ont explicitement approuvé la difficulté de formuler une théorie précise et robuste des plaques.

Carrera, Miglioretti et Petrolo ont à nouveau exploré le CUF pour générer des directives sur le choix de quels termes d'expansion que doivent être conservés et ceux qui doivent être supprimés pour prédire la réponse des plaques en conditions de flexion. Les auteurs ont développé plusieurs schémas pour évaluer les contributions en tant que fonctions des conditions de chargement et limites, géométrie, matériau et anisotropie de la plaque. Tous ces schémas étaient groupés pour donner la meilleure courbe de plaque. C'était une courbe en forme de désintégration exponentielle, qui limitait les théories avec le plus petit nombre de termes pour une précision donnée. Bien que ce fût une tâche très laborieuse, il semble que meilleur outil pour choisir une théorie d'ordre élevé particulière en fonction de la précision et du coût de calcul souhaités.

L'amortissement actif et passif dans les structures sandwich a fait l'objet de Moita et al. Un cinq couches assiette sandwich a été envisagée. Les couches inférieure et supérieure étaient des couches piézoélectriques agissant soit comme un capteur, soit comme un actionneur. L'âme était en matériau viscoélastique pour augmenter passivement l'amortissement de la structure. Entre ces couches sont les couches stratifiées composites élastiques. Pour les couches élastiques et piézoélectriques, le CLT a été considérée et le noyau visqueux a été résolu via FSPT. Les équations dynamiques, compte tenu de la mécanique déformation des couches piézoélectriques, ont été dérivées en utilisant le principe de Hamilton. Pour obtenir une solution, une non-conformité L'élément de plaque triangulaire C-0 a été développée avec huit degrés de liberté par nœud. Un de ceux-là Les DDL ont été enregistrés pour contrôler les singularités dans la matrice de rigidité globale lorsque les éléments de coque étaient coplanaires. En effet, la théorie originale ne présentait aucune rigidité liée au DDL de forage (rotation autour de la direction normale de l'élément). Trois cas de test ont prouvé l'efficacité de la solution théorique pour modéliser l'amortissement passif et actif des structures sandwich. Pour les essais de structures sandwich, l'amortissement actif a été aussi efficace que le passif. Cependant, l'étude manquait

d'informations sur la sensibilité de l'électrique paramètre dans les résultats globaux. Aucune donnée expérimentale n'a été fournie non plus.

Les coquilles minces et épaisses ont été analysées par Ferreira et al. En utilisant une méthode de base radiale. La formulation Carrera unifiée a été mise en œuvre pour un ensemble particulier de fonctions de champ de déplacement. Les trois déplacements variables présentaient la contribution de la membrane, un terme linéaire dans la direction de l'épaisseur et une fonction sinus pour la direction de l'épaisseur également. En utilisant le principe des déplacements virtuels (PVD), les noyaux fondamentaux pour des coques doublement courbées ont été explicitement démontrés. L'approche colocalisée exigeait la définition des conditions aux limites essentielles et naturelles, qui forment un deuxième ensemble de matrices de noyaux. Les résultats dynamique et statique ont été obtenus sur une grille de Chebyshev et une forme optimisée de la fonction radiale de Wendland. L'approche sans maillage avait l'avantage d'un codage facile, de l'absence de maillage et d'une discrétisation aisée des équations de mouvement. Les déplacements statiques et les fréquences propres sorties de la méthode actuelle étaient en excellent accord avec les solutions analytiques.

Ferreira et coll. ont abordé une solution au CUF par le biais des fonctions de base radiale (RBF). Les noyaux fondamentaux ont été déterminés pour l'approche de déplacement classique (PVD) en utilisant l'intégration par parties des équations du mouvement. La matrice globale a été assemblée de manière équivalente à une seule couche. La méthode sans maillage de la base radiale a ensuite été revue. Basé sur la méthode, la solution au problème statique, d'inertie dynamique et celui du flambement ont été dérivés. Deux théories axiomatiques des plaques ont été considérées. Tous les deux La fonction Zig-Zag de Murakami et une extension complète en série du second ordre de la coordonnée d'épaisseur pour les déplacements transversaux ont été effectués. Pour les déplacements dans le plan, la première théorie a ajouté un terme cubique à la formulation FSPT, et la seconde a ajouté une fonction sinusoïdale de la coordonnée d'épaisseur. Ces raffinements ont essayé pour modéliser avec précision les contraintes de cisaillement transversales. Les résultats ont montré une légère dépendance des densités de grille testée (13 x 13, 17 x 17 et 21 x 21). La prédiction des résultats exacts via la théorie de la plaque sinusoïdale a donné de meilleurs résultats. Cela était probablement dû au fait que la théorie de la plaque de poing ne portait que les deux premiers termes du sinus série infinie de fonction trigonométrique.

Roque et coll. ont également utilisé des fonctions de base radiale pour étudier le transitoire réponse des plaques composites et sandwich. Cependant, la théorie des plaques non linéaires de Reddy et un FSDT étaient assumé dans les formulations. Des exemples de plaques symétriques (0/90/90/0), non symétriques (0/90) et sandwich étaient évalué. Les fonctions de base radiale proposées avec la méthode psédospectrale (RBF-PS) ont montré une meilleure performance que la méthode de Kansa.

Les problèmes de vibrations statiques et libres des plaques stratifiées croisées et des boîtiers de flambage ont été étudiés par Ferreira et al. Ils ont développé une solution RBF en utilisant une théorie monocouche équivalente améliorée via fonction Zig-Zag de Murakami pour les fonctions de déplacement linéaire dans le plan, et une expansion quadratique du coordonnée d'épaisseur pour le déplacement transversal. PVD a été supposé. Tout comme leur travail précédent, les problèmes numériques ont été résolus en utilisant une version améliorée de la fonction radiale de Wendland dans la grille Chebyshev. La comparaison avec les résultats approximatifs et exacts de la littérature a indiqué une bonne résolution de la méthode. La comparaison directe de la formulation proposée avec la précédente seul condition par les mêmes auteurs n'était pas possible en raison de la différence de configuration des stratifiés des exemples donnés.

Le papier développé par Bouayed et Hamdi a apporté un nouvel élément de coque sandwich par couches pour les problèmes dynamiques et vibratoires. Les fonctions de déplacement varient linéairement avec la direction normale de la coquille. L'élément avait douze DDL par nœud et huit nœuds avec des fonctions de forme quadratique. Pas de blocage de cisaillement a été vu dans les résultats en utilisant la proposition d'approche, et l'élément a été considéré comme sans verrouillage. Les équations dynamiques du mouvement ont été résolues dans le domaine fréquentiel pour gagner du temps de calcul. Une assiette sandwich et un cas de test académique à coque sandwich cylindrique ont été résolus en utilisant l'élément proposé et via 3D modèles d'éléments finis créés dans deux logiciels commerciaux (Rayon-VTM et NASTRAN). Puis, une validation expérimentale a été réalisée pour deux pare-brise industriels avec et sans propriétés acoustiques en la fine couche d'âme viscoélastique en polyvinylbutyral (PVB). Les pare-brise ont été suspendus avec un élastique cordes léger et la réponse en

fréquence a été mesurée à l'aide du système de vibration laser Polytec PSV-400. Les résultats dynamiques ont confirmé l'exactitude de l'approche proposée pour la structure sandwich.

Un élément fini dynamique à quatre nœuds basé sur un HSAPT a été développé par Elmalich et Rabinovitch. FSPT a été affecté au champ de déplacement dans les peaux. Quant au noyau, les déplacements dans le plan étaient définis avec une série d'expansion d'ordre cubique complète de la coordonnée d'épaisseur. Le deuxième ordre a été utilisé pour le déplacement transversal. Grâce aux conditions de compatibilité aux deux interfaces, les fonctions déplacement du noyau ont été réorganisées en fonction des DDL de déplacement supérieur et inférieur. Ainsi, l'approximation EF comprenait 11 DDL de déplacement. Par conséquent, l'élément avait 44 DDL, qui étaient considérablement faibles pour théories de la structure composite stratifiée. Les équations de mouvement ont été résolues avec l'algorithme de Newmark. L'amortissement n'a pas été envisagé. Les 20 premiers modes de vibration détectés par le modèle actuel ont été comparés à résultats expérimentaux et 2D EFA à partir de la même référence. Hormis les valeurs pour trois fréquences naturelles, les résultats de formulation n'étaient pas plus de 4% différents des références. Pour tester les aspects numériques de la formulation, une plaque sandwich en «L» a été étudiée. Certains aspects uniques de la structure sandwich tels que effets localisés, déformabilité du noyau, effets des conditions aux limites et évolution des fréquences ont été évalués basé sur CUF, Ferreira et al, ont modifié les matrices d'éléments finis de masse et de rigidité pour modéliser le comportement viscoélastique des couches. Les fonctions de déplacement étaient linéaires par rapport à la direction de l'épaisseur. À cette fin, des paramètres d'ingénierie complexes ont été supposés. Ensuite, le principe de Hamilton a été utilisé pour dériver les équations de mouvement. Un élément à neuf nœuds a été implémenté et le problème de valeur propre qui en résulte a été résolu itérativement. Les évaluations de cas sandwich amortis ont montré un excellent accord avec les résultats de référence.

La même année, Cinefra et Carrera ont étudié les résultats statiques d'un cylindre résolu via un nouveau 9nœud élément fini de coque. Pour éviter le blocage de cisaillement, la technique déjà discutée d'interpolation mixte des composantes tensorielles (MITC) ont été supposées. La formulation a été écrite en utilisant l'unification de Carrera (CUF) et, par conséquent, un ordre différent d'expansion, des modèles équivalentes monocouches et par Couche par couche étaient évalués. Les résultats, une fois de plus, ont approuvé l'utilisation de théories plus complexes lors

de la résolution de coquilles épaisses. Plus tard, en 2015, Cinefra et Valvano ont appliqué la même procédure de pour mettre à niveau coque de rayon unique respectif à un double rayon. Les conclusions pour les coquilles sphériques testées sont similaires à celles de et la formulation de a également donné de bons résultats pour les coquilles peu profondes ou profondes.

Chinosi et coll, dans le cadre de CUF, a dérivé un élément monocouche équivalent basé sur l'idée d'interpolation de Dvorkin. Au lieu d'interpoler les souches, les auteurs proposent une parabolique interpolation des contraintes transversales. D'autre part, les degrés de liberté de déplacement ont été décrits via FSPT. Sous ces hypothèses, la formulation a été nommée EM1-2, car elle était dérivée théorème de Reissner. Les tests de la formulation actuelle pour les plaques sandwich ont montré une équivalence entre FSPT et EM1-2 formulations de plaques. Néanmoins, l'EM1-2 a permis de respecter les exigences de continuité inter-laminaire. De plus le problème de verrouillage a été contourné avec succès.

Une formulation global-local considérant FSPT pour les déplacements globaux et un seul local linéaire le raffinement des deux déplacements globaux dans le plan a été publiée par Khalili, Shriyat et Rajabi. Les conditions de compatibilité aux interfaces ont rendu un élément à neuf nœuds avec onze DDL par nœud. C'était un 99-DDL élément. Les contraintes transversales ont été calculées via l'intégration d'équations d'équilibre. Résultats globaux correspondait assez bien à l'analyse.

Sartorato et coll, a développé une coque intelligente aux éléments finis fonctionnant sous les effets du d31 ou du d33réponse constitutive. Une théorie linéaire couche par couche a été utilisée pour le champ électrique tandis qu'une seule couche équivalente l'approche dégénérée a été développée pour l'approche mécanique. Une courbure implicite a été imposée à la coque. La formulation a été mise en œuvre via une sous-routine d'élément utilisateur (UEL) dans l'élément fini commercial logiciel ABAQUS. La formulation proposée a été discutée en ce qui concerne ses limites et ses potentialités lorsque les résultats virtuels ont été comparés aux données expérimentales.

Une approche EF pour les problèmes géométriquement non linéaires des plaques et coques renforcées de fibres a été présentée par Sampaio, Paccola et Coda. La motivation de cette implémentation était sa capacité à modéliser une coque à fibres courtes ou longues sans avoir à

augmenter le nombre de DDL de l'élément avec l'inclusion des fibres. En ce sens, la formulation peut être étiquetée comme du type ESL. En outre, la nécessité de faire correspondre les nœuds de fibres et de coquilles ont été évités. Ils ont utilisé un élément triangulaire de 70 DDL. Le déplacement résulte des cinq cas de test ont montré le bon potentiel de la formulation. Aucun résultat microscopique n'a été donné.

On a vu que de nombreuses méthodes de dérivation et hypothèses différentes peuvent être utilisées pour résoudre un problème d'utilisation d'un code EF. D'autres méthodes de résolution telles que les RBF et les séries de Fourier ont été citées mais elles n'ont pas aussi polyvalent que. Cela signifie que le MEF est capable de résoudre une plus grande variété de problèmes géométriquement complexes. La précision des méthodes de solution augmente généralement avec le nombre de DDL de la formulation. Cependant, le temps de traitement et les coûts augmentent également. En fin de compte, il devient difficile de répondre s'il faut choisir entre un «p» ou un «h» raffinement de la solution. Le premier augmente la complexité des fonctions d'interpolation. Le second essaie d'améliorer la précision en augmentant le nombre de sous-domaines (éléments) qui est généralement obtenu en réduisant leur taille initiale pour tenter le problème géométriquement linéaires.

Par conséquent, pour simplifier l'étude des méthodes de résolution des structures stratifiées et sandwich, les auteurs approuvent l'utilisation de MEF et de formulations unifiées (UF), pour résoudre ces problèmes de plaque / coque. Ce couple permet une flexibilité dans les paramètres de théorie (GUF) et de géométrie (MEF) de tout problème particulière ingénierie.

En fait, les auteurs ont proposé une nouvelle méthode de solution pour le noyau GUF étiqueté CGF (Caliri's Formulation généralisée). Un élément de plaque à quatre nœuds avec continuité C-1 du déplacement transversal champ a été dérivé de cette méthode. Les résultats sont plus cohérents physiquement à mesure qu'ils se rapprochent des résultats de trois dimensions. Modèles EF. Avec cette mise en œuvre, les performances et la précision des différentes théories de plaque peuvent être systématiquement étudiée pour les comportements dans le plan et hors du plan. Néanmoins, la dérivation et les performances du CGF relèvent d'autres publications.

II.3. Conclusions:

Dans ce chapitre, nous avons mentionné: de nouvelles théories plaque / coque peuvent être résolues via d'anciennes méthodes de solution, ce qui donne une nouvelle approche combinée pour structures stratifiées et sandwich. De même, de nouvelles méthodes de solution pour les problèmes de structure stratifiée et sandwich peuvent utiliser a vieille théories de plaque / coque, donnant également une nouvelle approche pour le problème de la structure stratifiée. En raison de la quantité de plaques / coquilles publiées chaque année, l'utilisation de formulations unifiées (UF) fournit des moyens robustes de choisir une théorie plaque / coque appropriée. Même ainsi, pour des applications particulières, des théories et des codes optimisés peuvent être dérivés et dans ce cas, ils peuvent surpasser les UF. C'est le cas de certaines structures sandwich, qui sont résolues par théories ordre supérieure des plaques sandwich (HSAPT).

Finalement, l'utilisation d'approches plus cohérentes physiquement et généralisées, telles que les UF, est conseillée dans la conception de structures stratifiées et sandwich dans des applications telles que les structures intelligentes, les 'âmes éoliennes et autres structures composites complexes.

III. FORMULATION DU MODELE BASE SUR LA THEORIE DE PREMIER ORDRE :

III.1. Introduction:

Dans le chapitre bibliographie précédente, nous avons vu que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente, présentent des difficultés lorsqu'il s'agit de la prédiction et de l'estimation des déplacements et des contraintes inter laminaires aux interfaces. Donc, l'utilisation d'une description par-couche devient indispensable pour avoir une bonne prévision de l'état des contraintes. Cette description est plus répandue car chaque couche est traitée individuellement, en imposant les conditions de continuité en déplacements et en contraintes au niveau des interfaces. Par conséquent, ce chapitre a pour objectif de présenter et analyser le comportement des composites multicouches et notamment les plaques qu'elles soient symétriques ou non-symétriques. Le nombre de degrés de liberté est indépendant du nombre de couches. Le modèle proposé est la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) est adoptée pour modéliser les peaux. Cette théorie satisfait les exigences de continuités des déplacements inter laminaires ainsi que les conditions de compatibilité. Le nouveau modèle permet de calculer les contraintes de cisaillement transversal d'une manière précise en utilisant directement les équations constitutives plutôt que les équations d'équilibre et sans recours à des facteurs de correction.

III.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First-Order Shear Deformation Theory: FSDT):

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, quant à leur mouvement de flexion (elle n'est plus très petite devant la dimension des ondes de flexion), une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire.

Rayleigh en 1877 puis Timoshenko en 1921 montrent que la prise en compte des effets d'inertie de rotation et de cisaillement, affectent les fréquences propres de flexion des poutres. Ces deux effets tendent à diminuer les fréquences de résonances calculées en raison de la croissance de l'inertie et de la flexibilité du système.

Une extension à la théorie des plaques quant au cisaillement est proposée par Reissner en 1945 dans le cas statique. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation est proposée par Uflyand en 1948. C'est cependant l'article de Mindlin, publié trois (3) ans plus tard qui fera date. [10][11].

Les éléments basés sur la théorie Mindlin-Reissner sont les mieux adaptés dans le cas des plaques d'épaisseur modérée. Leur formulation est basée sur une approximation des trois variables indépendantes w, φ_x, φ_y . Cependant, on note que dans l'expression de l'énergie de déformation n'interviennent que des dérivées premières de w, φ_x, φ_y . La condition de la compatibilité inter-éléments ne nécessite qu'une continuité C^0 .

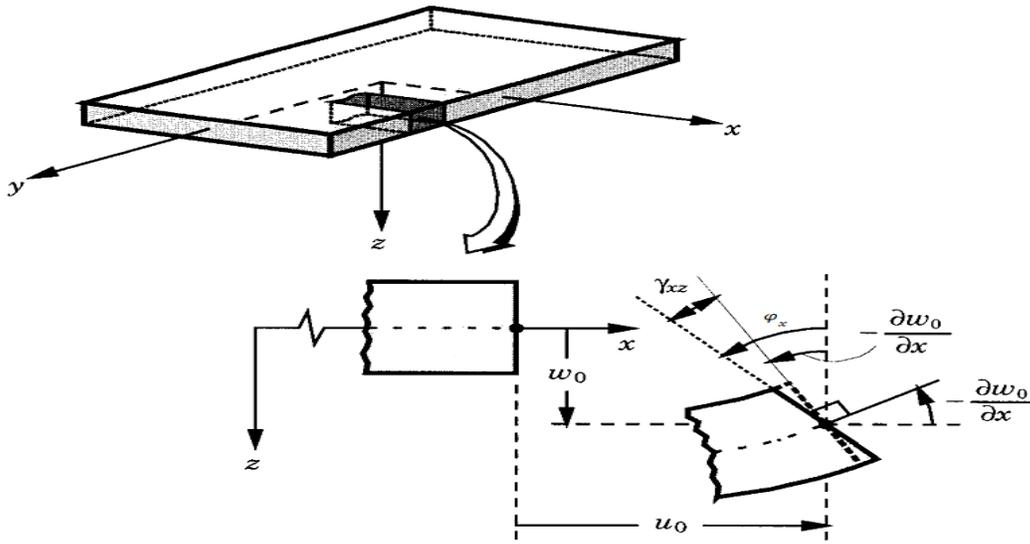


Figure III.1: Schéma du déplacement pour la théorie de la plaque de Mindlin

III.3. Champs de déplacement:

Dans la théorie des plaques épaisses, ou théorie de Reissner et Mindlin, la fibre normale reste toujours rectiligne, mais n'est plus nécessairement perpendiculaire au plan moyen. Si φ_x et φ_y désignent les angles que fait la fibre normale avec l'axe z , ils ne correspondent plus à l'inclinaison du plan moyen, on a donc:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varphi_x(x, y) \\ \varphi_y(x, y) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 1)$$

$$u = u_0 + z\varphi_x$$

$$v = v_0 + z\varphi_y \quad (\text{III} - 2)$$

$$w = w_0$$

Donc, les variables cinématiques indépendantes sont :

u_0 et v_0 : Les déplacements de la membrane ;

w_0 : Le déplacement transversal ;

φ_x : La rotation du plan xy autour de y ;

φ_y : La rotation du plan xy autour de x ;

III.4. Relation cinématiques:

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en z. Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes dans chaque couche et discontinues entre les couches. L'étude des composites épais restes aléatoires par ce type d'approche cinématique. Donc, le champ des déplacements s'exprime alors en fonction des trois variables par la relation(III – 1).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{III-3})$$

$$\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Concernant le champ de déformation, les termes gardent leur forme générale :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = 0 \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (\text{III} - 4)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_m + z \cdot k \quad (\text{III} - 5)$$

Tel que: ε_m : déformation membranaire, k : rotation courbure

Le vecteur de déformation membranaire:

$$\varepsilon_m = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{III} - 6)$$

Le vecteur des courbures:

$$k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{III} - 7)$$

Et par ailleurs, ε_{xz} et ε_{yz} ne sont plus nuls :

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{III} - 8)$$

On ne peut donc plus négliger le cisaillement.

Déformation de cisaillement:

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \text{tel que } \frac{\partial w_0}{\partial x} = cte \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad \text{tel que } \frac{\partial w_0}{\partial y} = cte\end{aligned}\quad (\text{III} - 9)$$

On ne considère ici que les matériaux homogènes : les caractéristiques du matériau ne dépendent pas du point étudié. On se limite également au domaine élastique linéaire, les contraintes varient proportionnellement à la déformation. Les déformations doivent être suffisamment petites de manière à rester dans la partie linéaire de la loi constitutive et présenter le même comportement en traction et en compression. La loi reliant les déplacements aux déformations est également linéaire: on se place donc dans le cadre de la mécanique linéaire. Le tenseur des contraintes, symétrique, est entièrement déterminé en tout point par la connaissance de six composantes sur les neuf.

III.5. Loi de comportement d'un stratifié:

La théorie élémentaire des plaques fait l'hypothèse que les contraintes normales σ_{zz} sont négligeables dans le volume de la plaque, par rapport aux composantes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} . Cette hypothèse est étendue à la théorie des stratifiés. Les relations contraintes-déformations dans le système de coordonnées locales sont données par :

$$\{\sigma\}^T = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})$$

Le tenseur des déformations est lui aussi entièrement déterminé en tout point par la connaissance de six composantes sur les neuf, que l'on représente vectoriellement :

$$\{E\}^T = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz})$$

La relation qui relie ces deux « vecteurs » se note sous la forme d'une matrice carrée de dimension 6 : c'est la matrice de Hooke dite aussi loi constitutive. :

$$[\sigma] = [E][\varepsilon] / \sigma \text{ contrainte} \quad (\text{III} - 10)$$

Cette matrice 6x6 n'est pas symétrique à moins de l'exprimer en utilisant les distorsions angulaires γ_{ij} au lieu des déformations angulaires ε_{ij} . Pour un matériau homogène et isotrope,

c'est-à-dire un matériau pour lequel les caractéristiques mécaniques sont les mêmes en tout point et dans toutes les directions de l'espace, deux coefficients élastiques sont suffisants pour la relation précédente. Les composantes de la rigidité ij Q sont données par:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{54} & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{cases} \quad (\text{III} - 11)$$

Où les indices 1 et 2 désignent respectivement, la direction longitudinale des fibres et la direction transversale aux fibres dans le plan de la plaque; 3 est la direction normale à la plaque.

Les composantes de la rigidité Q_{ij} sont données par:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$Q_{66} = G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13} \quad (\text{III} - 12)$$

Avec E_1 , E_2 sont des modules d'Young du matériau dans les directions 1 et 2, G_{12} , G_{13} et G_{23} sont des modules de cisaillement; et ν_{12} et ν_{21} sont des coefficients de Poisson.

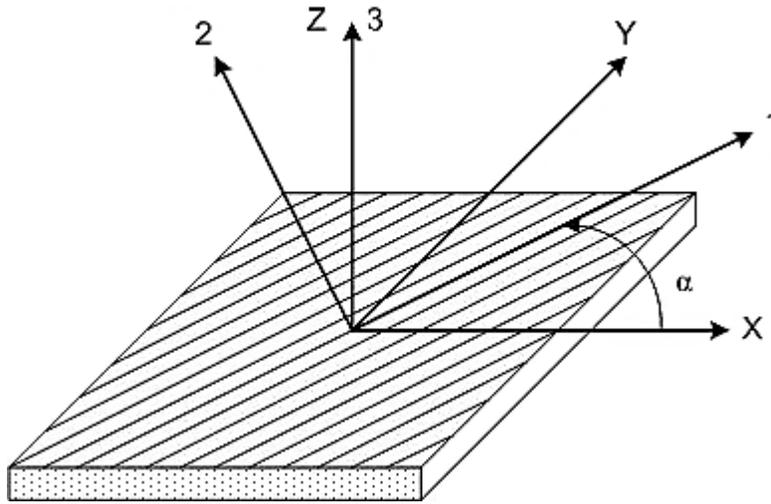


Figure III.2: Les axes de référence (X, Y, Z); et les axes de fibre du couche ($1, 2, 3$)

La loi de Hooke généralisée dans le système de coordonnées globales figure (III.2) peut être obtenue en utilisant la matrice de transformation $[T]$ donnée par:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (\text{III} - 13)$$

de que $\varepsilon_{zz} = 0$. On peu réduit cette matrice en 5x5

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (\text{III} - 14)$$

Chaque terme multiplier ε_{zz} sera = 0 donc:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (\text{III} - 15)$$

D'où, $c = \cos\alpha$ et $s = \sin\alpha$, dans laquelle α est l'angle de la fibre comme représenté sur la figure (III.2). On appelé cette matrice: matrice d'élasticité réduite.

On peu le devisée en deux matrice:

Matrice membranaire:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{13}} \\ \overline{Q_{21}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{23}} \\ \overline{Q_{31}} & \overline{Q_{32}} & \overline{Q_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III} - 16)$$

Matrice de contrainte de cisaillement:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{44}} & \overline{Q_{45}} \\ \overline{Q_{54}} & \overline{Q_{55}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (\text{III} - 17)$$

III.6. Les effets résultants d'un stratifié:

III.6.1. Efforts résultants de membrane:

Le vecteur des résultantes en membrane noté $N(x, y)$, d'une couche k , est défini par:

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (\text{III} - 18)$$

III.6.2. Moments de flexions :

Les moments de flexion et de torsion sont définis par:

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (\text{III} - 19)$$

III.6.3. Efforts résultantes de premier ordre en cisaillement :

Le vecteur force en cisaillement noté $V(x, y)$ est défini de la même manière par:

$$V(x, y) = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (\text{III} - 20)$$

En substituant les équations (III – 5), (III – 6), (III – 7) et (III – 11) dans les expressions des efforts résultants (Eq(III – 18), (III – 19) et (III – 20)), on obtient:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left[[Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{mxx} \\ \varepsilon_{myy} \\ \gamma_{myx} \end{Bmatrix} + [Q]_z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{yx} \end{Bmatrix} \right] dz \quad (\text{III} - 21)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left[[Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{mxx} \\ \varepsilon_{myy} \\ \gamma_{myx} \end{Bmatrix} + [Q]_z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{yx} \end{Bmatrix} \right] dz \quad (\text{III} - 22)$$

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left[[Q] \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \right] dz \quad (\text{III} - 23)$$

Les composantes des matrices de rigidité de stratifiées:

$$A = [A_{ij}] \Rightarrow A_{ij} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} Q_{ij} dz = \sum_{i=1}^n (h_k - h_{k-1})(Q'_{ij})_k \quad (\text{III} - 24)$$

$$B = [B_{ij}] \Rightarrow B_{ij} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} Q_{ij} z dz = \sum_{i=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2)/2 (Q'_{ij})_k \quad (\text{III} - 25)$$

$$D = [D_{ij}] \Rightarrow D_{ij} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} Q_{ij} z^2 dz = \sum_{i=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3)/3 (Q'_{ij})_k \quad (\text{III} - 26)$$

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{44} & E_{45} \\ E_{54} & E_{55} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} dz = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{54} & C_{55} \end{bmatrix}_k (h_k - h_{k-1}) \quad (\text{III} - 27)$$

$i, j = 1, 3$

n : nombre total les couche

$$(E_{ij}^s) = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} Q_{ij} dz \quad (\text{III} - 28)$$

Les expressions développées des résultantes s'écrivent:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{mxx} \\ \varepsilon_{myy} \\ \gamma_{myx} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{yx} \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 29)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{mxx} \\ \varepsilon_{myy} \\ \gamma_{myx} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{yx} \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 30)$$

Il est intéressant de noter que (B, D) sont des matrices de couplage. Les termes de couplage de même ordre s'annulent pour une âme symétrique. Les expressions développées pour les efforts résultants au cisaillement s'écrivent:

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 31)$$

Les équations constitutives de l'âme peuvent être écrites sous la forme contractée suivante:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 32)$$

$$\{V\} = [E]\{\gamma\} \quad (\text{III} - 33)$$

III.7. Conclusion:

Nous pouvons conclure que si l'épaisseur de la plaque augmente, les contraintes de cisaillement apparaissent avec les processus de déplacement, donc les résultats divergent en utilisant l'hypothèse de Kirchhoff et sont imprécis, ce que nous recourons à l'hypothèse Mindlin-Reissner, théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First-Order Shear Deformation Theory: FSDT) qui nous donne des résultats très proches dans notre expérience du chapitre quatre

IV. DEVELOPPEMENT D'UN ELEMENT FINIS RECTANGULAIRE POUR L'ANALYSE DES PLAQUES MULTICOUCHES:

IV.1. Introduction:

Dans ce chapitre, nous allons alors procéder au développement d'un nouvel élément fini, bi-dimensionnelle (2D), construit un élément rectangulaire à quatre nœuds et cinq degrés de libertés par nœud, la formulation est basée sur la théorie de Mindlin et l'approche par couche équivalent, alors que les trois degrés de liberté de type translation et deux rotations. Cet élément est destiné à l'analyse statique des plaques stratifiées, qu'elles soient symétriques ou non-symétriques. Les résultats obtenus ceux obtenus par d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature, Après la formulation, une série de tests ont été entrepris dans l'objectif de valider l'élément développé (RFT20: **R**ectangular **F**irst **T**heory with **20**-degrees of freedom).

IV.2. Formulation de l'élément RFT20:

IV.2.1. Description de l'élément rectangulaire RFT20 :

L'élément rectangulaire développé, nommé RFT20 (**R**ectangular **F**irst **T**heory with **20**-degrees of freedom), est formulé sur la base du modèle par couche équivalent, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT). Cet élément à continuité C_0 , défini par quatre nœuds et cinq degrés de liberté par nœud (5 ddl/nœud). Figure IV.1 montre la géométrie de l'élément RFT20 et ses degrés de liberté correspondants

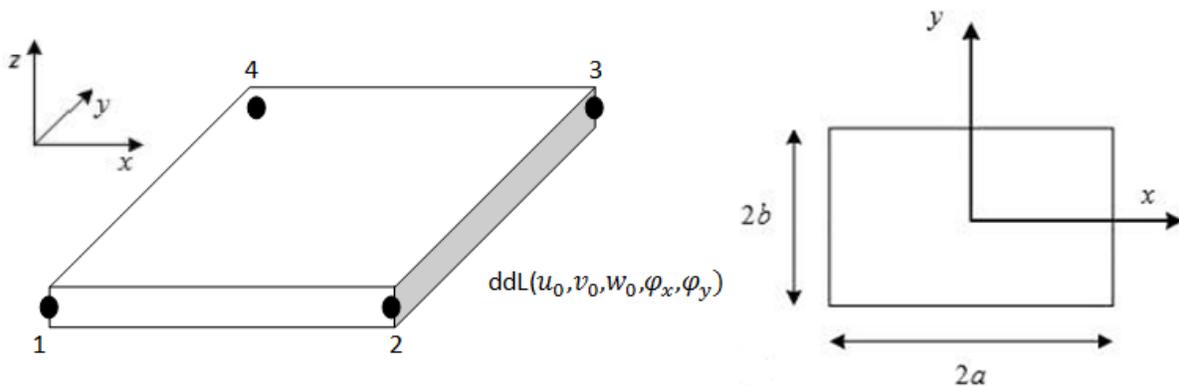


Figure IV. 1: élément quadrilatère de type Lagrange quatre nœuds.

IV.2.2.Approximation nodale des déplacements:

La formulation de l'élément nécessite uniquement une approximation C_0 . Le vecteur déplacement en tous points de coordonnées (x, y) de la plaque peut être exprimé par:

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \delta_i \quad (IV - 1)$$

Où $\delta(x, y) = \{u_{0i} \ v_{0i} \ w_{0i} \ \varphi_x \ \varphi_y\}^T$ est le vecteur des déplacements nodaux de l'élément, i étant le numéro du nœud considéré ($i=1, 2, 3, 4$).

Les fonctions d'interpolation bi-linéaire N_i de type Lagrange ont les expressions suivantes:

$$N_1 = \frac{1}{4ab} (a - x)(b - y)$$

$$N_2 = \frac{1}{4ab} (a + x)(b - y)$$

$$N_3 = \frac{1}{4ab} (a + x)(b + y) \quad (IV - 2)$$

$$N_4 = \frac{1}{4ab} (a - x)(b + y)$$

L'approximation des variables cinématiques de la couche équivalente peut être exprimée comme suit:

a- Les translations:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \sum_{i=1}^n N_i(x, y) u_{0i} \ ; \ v_0(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) v_{0i} \ ; \\ w_0(x, y) &= \sum_{i=1}^n N_i(x, y) w_{0i} \end{aligned} \quad (IV - 3)$$

b- Les rotations:

$$\varphi_x(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \varphi_{xi} \ ; \ \varphi_y(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \varphi_{yi} \quad (IV - 4)$$

L'approximation nodale du vecteur de déformation de la couche équivalent (Eq. III-4) en un point quelconque de coordonnée (x, y) pourra être exprimée par les dérivées des déplacements nodaux comme suit:

$$\{\varepsilon_m\} = [B_m]_e \{\delta_i\}_e ; \{\varepsilon_f\} = [B_f]_e \{\delta_i\}_e ; \{\gamma\} = [B_c]_e \{\delta_i\}_e \quad (IV - 5)$$

Avec:

$$[B_m]_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (IV - 6)$$

$$[B_f]_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (IV - 7)$$

$$[B_c]_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (IV - 8)$$

$i=1, 2, 3, 4$ (nombre de nœud).

IV.2.3. Evaluation de matrice de rigidité élémentaire:

Pour établir la relation entre les forces et les déplacements, on a utilisé le principe du travail virtuel, soit:

$$\delta U - \delta W = 0 \quad (IV - 9)$$

Où U indique l'énergie potentielle de déformation dans la couche équivalente et W présente le travail effectué par les forces extérieures.

$$\delta U = \int_{A_i}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} ([\sigma]^T \delta \varepsilon) dv = \int_A \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + \sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \delta \varepsilon_{yz}) dz dA \quad (IV - 10)$$

Le travail virtuel effectué par les forces externes est donné par:

$$\delta W = \int_{-b}^b \int_{-a}^a f(x, y) \delta w dx dy \quad (IV - 11)$$

IV.2.4. Matrice de rigidité de la couche équivalente:

La substitution des expressions (Eqs(IV – 10)– (IV – 11)) dans l'expression de travail virtuel dans la couche équivalent (Eq.(IV – 9)). Nous permet d'écrire :

$$\int_{-b}^b \int_{-a}^a (\{\delta \varepsilon_m\}^T [A] \{\varepsilon_m\} + \{\delta \varepsilon_m\}^T [B] \{\kappa\} + \{\delta \kappa\}^T [B] \{\varepsilon_m\} + \{\delta \kappa\}^T [D] \{\kappa\} + \{\delta \gamma_c\}^T [E] \{\gamma_c\}) dx dy - \int_{-b}^b \int_{-a}^a f \delta w dx dy = 0 \quad (IV - 12)$$

L'introduction des relations déformation-déplacement dans l'expression (précédent(IV – 12)), mène à l'équation d'équilibre suivante:

$$[K_e] \{d_e\} = \{f_e\} \quad (IV - 13)$$

$$[K_e] = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \underbrace{([B_m]^T [A] [B_m])}_{\text{membranaire}} + \underbrace{[B_m]^T [B] [B_f]}_{\text{couplage membrane-flexion}} + \underbrace{[B_f]^T [B] [B_m]}_{\text{couplage flexion-membrane}} + \underbrace{[B_f]^T [D] [B_f]}_{\text{flexionnelle}} + \underbrace{[B_c]^T [E] [B_c]}_{\text{cisaillement}} dx dy \quad (IV - 14)$$

$[K_e]$ C'est la matrice de rigidité élémentaire.

IV.3. Validation numérique de l'élément RFT20 (Rectangular First Third with 20-degrees of freedom):

Dans cette section, nous allons évaluer les performances de l'élément développé (RFT20), en termes de précision, de convergence et de stabilité, à travers une série de tests réalisés par un programme de Fortran. Des plaques isotropes, composites stratifiées symétriques et non symétriques ainsi que différents cas de chargement, géométrie et conditions aux limites ont été considérés. Les résultats obtenues seront comparés avec les solutions obtenus analytiquement et ceux obtenus par d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature.

IV.3.1. Organigramme de programme FORTRAN:

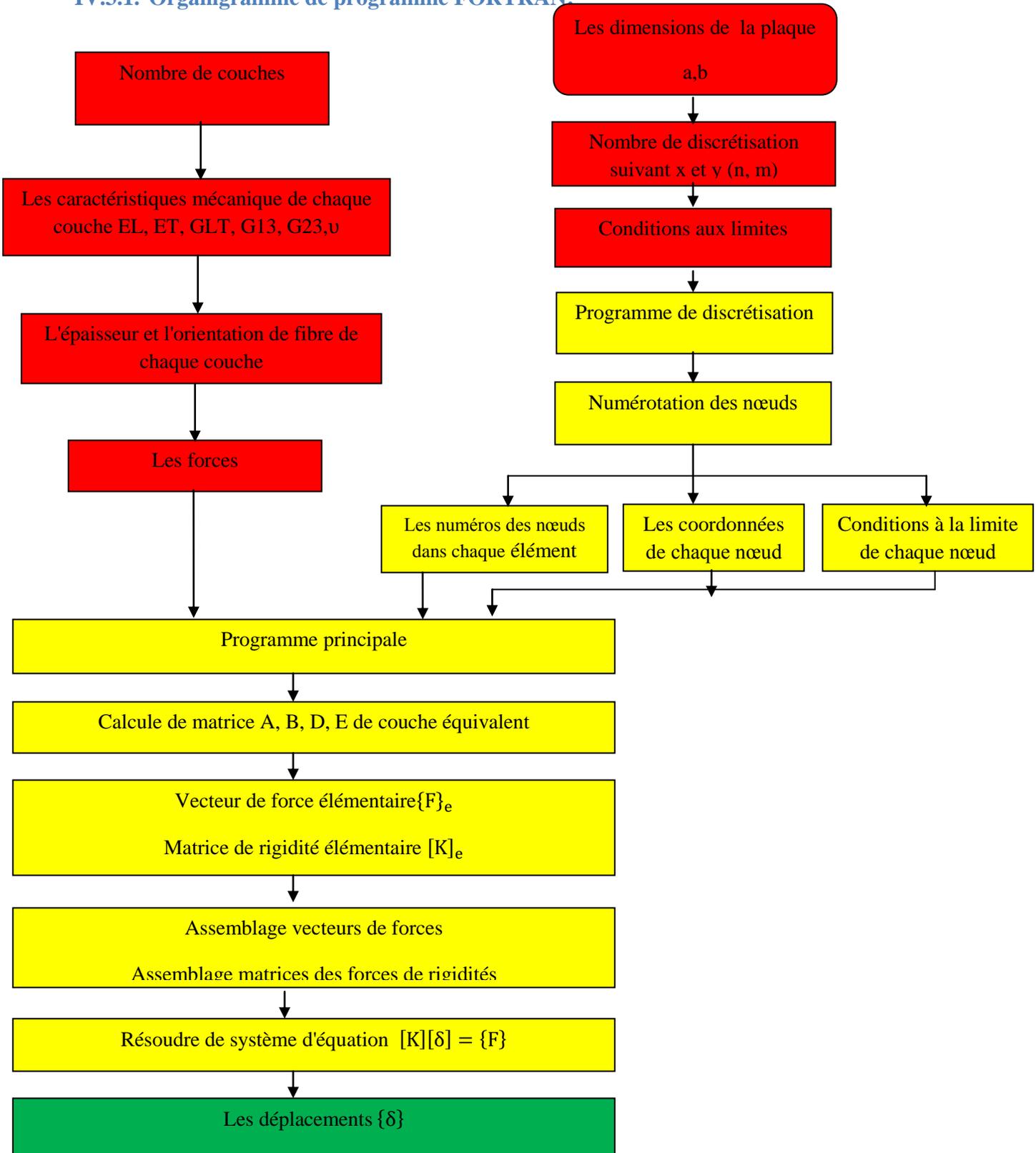


Figure IV. 2: Organigramme de programme FORTRAN utilisé dans cette mémoire

IV.3.2. Conditions aux limites adoptées :

Les conditions aux limites considérées dans cette étude sont présentées dans le tableau

4.1. Les notations de ces conditions sont:

CCCC: Plaque encastrée sur les quatre bords.

SSSS: Plaque simplement appuyée sur les quatre bords.

CSCS: Deux bords opposés encastrés et deux autres bords simplement appuyés

CFCF: Deux bords opposés encastrés et deux autres bords libres.

L'arrangement du maillage utilisé dans tous les exemples est illustré dans la figure 4.5.

IV.3.3. Plaques isotropes :

Afin de montrer la capacité de la présente formulation dans l'analyse des plaques isotropes, deux exemples ont été considérés.

Le premier exemple concerne une plaque isotrope carrée simplement appuyée avec différents rapports d'épaisseur (a/h). Quant au deuxième exemple, il concerne une plaque isotrope rectangulaire simplement appuyée avec différents rapports d'aspect et différentes valeurs du coefficient de poisson.

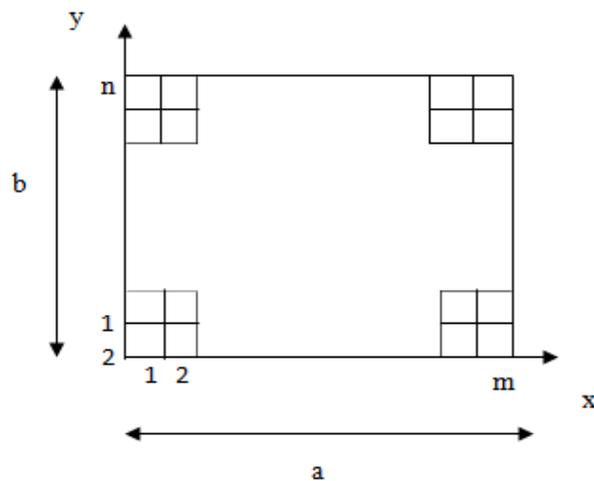


Figure IV. 3:Plaque rectangulaire ayant une maille de $m \times n$.

Table IV.1: Détails de conditions aux limites utilisées pour les exemples numériques.

Conditions aux limites	Abréviations	Bords retenus
Simplement appuyé	SSSS	$w_0 = \varphi_y = 0$ at $x = \pm \frac{b}{2}$ $w_0 = \varphi_x = 0$ at $y = \pm \frac{b}{2}$
Encastré	CCCC	$u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_y = \varphi_x = 0$
Encastré - Simplement appuyé	CSCS	Encastré à $x = \pm \frac{b}{2}$ Simplement appuyé à $y = \pm \frac{b}{2}$
Encastré-Libre	CFCF	Encastré à $x = \pm \frac{b}{2}$ Libre à $y = \pm \frac{b}{2}$

Réuni les résultats du déplacement transversal non-dimensionnel (w), pour différents maillages et différents rapports d'épaisseurs ($a/h = 2, 3, 4, 5$ et 10).

$$\bar{w} = (100 Dw/a^4 q_0) \text{ avec } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (IV - 20)$$

Les résultats obtenus par l'élément développé (RFT20) sont en bon accord avec la solution analytique de Kant [12]; et ceux trouvés par des modèles d'éléments finis, basés sur des théories du premier ordre [13, 14] et des théories d'ordre supérieur [15].

IV.3.3.1. Plaques isotropes carrée:

Table IV.2: Déflexion normalisé \bar{w} d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée.

Références	Modèles	Rapport d'épaisseur a/h		
		2	4	10
Présent élément (10×10)	RFT20	0.9376	0.5323	0.3777
Présent élément (14×14)	RFT20	0.9353	0.5352	0.4004
Présent élément (16×16)	RFT20	0.9346	0.5728	0.4065
Kant et al. [15]	HSDT	0.8530	0.5222	0.4230
Kant [12]	HSDT	-	-	0.4240
Rao et al. [13]	FSDT	-	0.5157	0.4237

Table IV.3: Déflexion normalisé \bar{w} d'une plaque carrée isotrope encastré.

Références	Modèles	Rapport d'épaisseur a/h		
		2	4	10
Présent élément (10×10)	RFT20	0.6639	0.2603	0.1256
Présent élément (14×14)	RFT20	0.6635	0.2630	0.1365
Présent élément (16×16)	RFT20	0.6081	0.2637	0.1395
Kant et al. [15]	HSDT	0.8530	0.5222	0.4230
Kant [12]	HSDT	-	-	0.4240
Rao et al. [13]	FSDT	-	0.5157	0.4237

Table IV.4: Déflexion normalisé \bar{w} d'une plaque carrée isotrope encastré - simplement appuyé.

Références	Modèles	Rapport d'épaisseur a/h		
		2	4	10
Présent élément (10×10)	RFT20	1.1784	0.4769	0.2327
Présent élément (14×14)	RFT20	1.1653	0.4795	0.2585
Présent élément (16×16)	RFT20	1.1618	0.4737	0.2657
Kant et al. [15]	HSDT	0.8530	0.5222	0.4230
Kant [12]	HSDT	-	-	0.4240
Rao et al. [13]	FSDT	-	0.5157	0.4237

Table IV.5: Déflexion normalisé \bar{w} d'une plaque carrée isotrope encastré-libre.

Références	Modèles	Rapport d'épaisseur a/h		
		2	4	10
Présent élément (10×10)	RFT20	0.7989	0.3534	0.1860
Présent élément (14×14)	RFT20	0.7975	0.3565	0.2015
Présent élément (16×16)	RFT20	0.7971	0.3572	0.2057
Kant et al. [15]	HSDT	0.8530	0.5222	0.4230
Kant [12]	HSDT	-	-	0.4240
Rao et al. [13]	FSDT	-	0.5157	0.4237

On constate que pour les quatre cas (SSSS), (CCCC), (CSCS) et (CFCF), plus les valeurs du rapport d'épaisseur (a/h) est élevé, plus les valeurs de \bar{w} est basse.

IV.3.3.2. Plaques isotropes rectangulaires simplement appuyées :

On considère une plaque rectangulaire simplement appuyée et soumise à un chargement uniforme. Dans ce test, différents rapports d'aspect (a/b) avec différents coefficients de Poisson (ν) ont été considérés. Les résultats obtenus par notre élément (RFT20) sont normalisés par la formule (IV – 21).

$$\bar{w} = \frac{w \cdot G}{h \cdot q} \quad (IV - 21)$$

Les résultats du déplacement transversal (\bar{w}) sont représentés dans le tableau 4.6. La comparaison a été faite avec la solution analytique de Kant et *al.* [120] et M.O. Belarbi. Les résultats obtenus par l'élément RFT20 montrent les performances de la formulation proposée.

Table IV.6: Déflexion normalisé (\bar{w}), d'une plaque isotrope simplement appuyée ($E = 1 \text{ GPa}$, $\nu = 0.2, 0.3 \text{ et } 0.4$)

ν	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{h}$	$N \times N$	$\bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$		
				Présent élément	Élasticité [16]	M.O. Belarbi
0.3	1.0	10	16×16	170.722	178.440	174.890
		7.14	16×16	66.931	48.446	47.952
	2.0	10	16×16	29.434	29.604	29.472
		7.14	16×16	12.020	8.440	8.470
0.2	1.0	10	16×16	184.334	203.150	198.116
0.4	1.0	10	16×16	155.568	153.760	151.530

En remarque dans le tableau 4.6 si la valeur du rapport d'épaisseur < 10 , que les résultats obtenus par l'élément développé (RFT20) et la solution analytique de Kant [12] ne sont pas compatibles avec que nous avons obtenu par des modèle d'élément finis basés sur des théories du premier ordre.

IV.3.4. Plaques stratifiées

Dans cette section, des exemples ont été considérés pour mettre en évidence la performance du modèle proposé dans l'analyse du comportement des plaques stratifiées.

Table IV.7: Propriétés des matériaux (normalisés) utilisés pour les plaques stratifiées

Propriétés mécaniques	Location	E_1	E_2	G_{12}	G_{13}	G_{23}	$\nu_{12} = \nu_{21}$
Plaques stratifiées	All layer	25E	E	0.500E	0.50E	0.20E	0.25

IV.3.4.1. Plaques carrées à trois et cinq couches sous chargement uniforme:

On considère une plaque stratifiée carrée simplement appuyée et soumise à une charge uniformément répartie. Les propriétés mécaniques sont celles de Tableau 4.7

Deux types de stratifications croisées, dont lesquelles, trois couches (0 / 90 / 0) et cinq couches (0 / 90 / 90 / 90 / 0), ont été étudiées. Dans les deux cas, les couches de même orientation ont la même épaisseur. Différents maillage (10×10, 14×14 et 16×16) ont été considérés. Dans les tableaux 4.8 et 4.9, on présente les résultats du déplacement transversal au centre de la plaque pour les deux stratifications. Les résultats obtenus sont normalisés par la formule précédente (IV – 21).

Les résultats obtenus sont comparés avec ceux issus de la solution analytique donnée par la théorie d'ordre supérieur de Reddy [17], la méthode EFG28, basée sur la théorie FSDT, présentée par Belinha et al. [18], et à ceux obtenus par d'autres modèles numériques de la littérature [19, 20, 21, 22]. Par exemple: Xiao et al. [23] ont utilisé le logiciel commercial ABAQUS pour modéliser ce type de plaque, en choisissant un élément fini brique (3D) à 20 nœuds, avec un maillage de 4800 éléments, pour le quart de la plaque. Les auteurs ont également utilisé deux éléments MQ-MLPG et TPS-MLPG, qu'ils ont développé sur la base de " la théorie d'ordre supérieur et la déformation normale de la plaque " (HOSNDPT) 29; et la formulation de point fini (MLPG)³⁰ basée sur la méthode de la fonction de base radiale multi quadrique (RBFs)³¹. La comparaison montre la précision et l'efficacité de l'élément RFT20, dans l'analyse des plaques stratifiées multicouches.

Table IV.8: Déplacement transversal non-dimensionnel (\bar{w}) d'une plaque stratifiée carrée à trois couches (0 / 90 / 0), simplement appuyée, sous chargement uniforme.

Références	Modèles EF	Rapport d'épaisseur ($\frac{a}{h} = 10$)	\bar{w}
Présent élément (10×10)	RFT20	1.0649	1.016
Présent élément (14×14)	RFT20	1.0679	1.014
Présent élément (16×16)	RFT20	1.0686	1.007
Reddy [17]	HSDT-Anal	1.0900	
Belinha et Dinis [18]	FSDT-EFG	1.0225	
Topdar et al. [19]	FEM-R4- PRHSDT	1.1584	
Topdar et al. [19]	FEM-R4-PFSDT	1.0220	
Xiao et al. [23]	MQ-MLPG1	0.9465	
Xiao et al. [23]	TPS-MLPG1	0.9415	
Xiao et al. [23]	FEM-3D	1.1543	
Ghosh et Dey [22]	FEM-T6-HSDT	0.9650	
Sedira [24]	FEM-Q4-DMQPz	1.1357	
Meftah [21]	SFR80	1.1450	

Table IV.9: Déplacement transversal (\bar{w}) d'une plaque stratifiée carrée à cinq couches (0 / 90 / 90 / 90 / 0), simplement appuyée, sous chargement uniforme.

Références	Modèles EF	Rapport d'épaisseur ($\frac{a}{h} = 10$)	\bar{w}
Présent élément (10×10)	RFT20	0.9926	0.9997
Présent élément (14×14)	RFT20	0.9950	0.9976
Présent élément (16×16)	RFT20	0.9956	0.9887
Reddy [17]	HSDT-Anal	0.9727	
Belinha et Dinis [18]	FSDT-EFG	0.9722	
Xiao et al. [23]	MQ-MLPG1	1.0576	
Xiao et al. [23]	TPS-MLPG1	0.9085	
Xiao et al. [23]	FEM-3D	0.9040	

IV.3.5. L'effet d'empilement des couches :

La résistance à la rupture d'une interface peut être évaluée par la connaissance d'une grandeur couramment appelée adhérence, qui correspond à l'énergie minimale à apporter pour permettre la propagation d'une fissure à l'interface. Il est important de prendre en compte le fait que, généralement, l'adhérence dépend du mode de sollicitation mécanique (mixité modale).

Table IV.10: *d'empilement des couches*

$\frac{a}{h}$	ν	L'orientation	N×N	\bar{w}
10	0.25	(0/90/90/90/0)	16×16	99.978
		(90/0/90/0/90)	16×16	96.949
		(90/90/0/90/0)	16×16	93.427

IV.3.6. L'effet de l'orientation des fibres:

La contribution de la fibre à la durabilité dépend de sa répartition au sein de composite, et en particulier de l'orientation des fibres par rapport à la fissuration et de l'uniformité de leur répartition. Par conséquent, l'effet de la procédure de fabrication (c'est-à-dire la position et la pression) sur l'orientation et la distribution des fibres dans les échantillons standard est d'une grande importance ou d'une grande importance.

Table IV.11: *l'orientation des fibres*

$\frac{a}{h}$	ν	L'orientation	N×N	\bar{w}
10	0.25	(0/90/90/90/0)	16×16	99.978
		(0/45/45/45/0)	16×16	93.570
		(0/30/30/30/0)	16×16	91.902

IV.4. Conclusion:

En conclusion, le rapport d'épaisseur ($a/h > 10$) dans les tableaux (4.2-3-4-5) pour les plaques carrée est supérieur à 10, nous constatons que nos résultats sont proches des résultats du M.O Belarbi, Kant, et Reo, et aussi les tableaux (4.8-9) pour les plaques rectangulaire portent les mêmes comparaisons; mais dans le tableau (4.6) nous constatons que quel que soit le rapport d'épaisseur est inférieur à 10, nos résultats divergent. Sur les tableaux (4.10-11) l'orientation des couches chevauche les résultats que nous avons obtenus, et plus il y a d'empilement, plus les valeurs de résultat sont élevées, si les fibres sont orientées à un angle de 90 degrés, le meilleur résultat est obtenu, et si nous changeons l'angle, les résultats sont moindres.

CONCLUSION GENERALE

Dans le présent travail, nous avons abordé les résultats du chapitre 4 selon l'hypothèse de Mindlin-Reissner, qui exige que le rapport longueur / épaisseur soit supérieur à 10 ($a/h > 10$) que pour le cas de l'épaisseur moyenne, en utilisant l'approche de la méthode des éléments finis.

Toutes les recherches que nous avons incluses dans cet article des matériaux composite ont eu des résultats presque similaires, car les chercheurs ont présenté le facteur de correction pour obtenir des résultats proches, donc même les hypothèses n'étaient pas uniformes, la première théorie de plaques classiques (Love-Kirchhoff) pour les épaisseurs très faibles (en ne peut pas utiliser sur la deuxième ou troisième théorie) et en négligeant les contraintes de cisaillement, et la seconde théorie de premier ordre des plaques (en ne peut pas utiliser sur le couche mince. (Mindlin-Reissner)) pour le rapport la longueur sur l'épaisseur supérieure à 10, Et la troisième théorie d'ordre supérieur est pour couche épais. De sorte que même les hypothèses n'étaient pas uniformes. Surtout la couche mince, moyenne et épaisse, nous voyons donc que nous devons rechercher une théorie et une méthode complètes pour résoudre ces hypothèses. Nous avons demandé à d'autres collègues de réorienter cette recherche.

Bibliographiques

- [1] Gerard, Pierre, et al. "Controlled architecture polymers at Arkema: synthesis, morphology and properties of all-acrylic block copolymers." 2009. 361-373.
- [2] Viviano, Christina E., et al. "Composition of Amazonian volcanic materials in Tharsis and Elysium, Mars, from MRO/CRISM reflectance spectra." *Icarus* 328 (2019): 274-286.
- [3] Reissner, E., and YI Stavsky. "Bending and stretching of certain types of heterogeneous aeolotropic elastic plates." (1961): 402-408.
- [4] Yang, P. Constance, Charles H. Norris, and Yehuda Stavsky. "Elastic wave propagation in heterogeneous plates." *International Journal of solids and structures* 2.4 (1966): 665-684.
- [5] Mindlin, RD0044. "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates." *J. appl. Mech.* 18 (1951): 31-38.
- [6] Whitney, J. M., and N. J. Pagano. "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates." (1970): 1031-1036.
- [7] Reissner, E. "A consistent treatment of transverse shear deformations in laminated an isotropic plates." *AIAA Journal* 10.5 (1972): 716-718.
- [8] Caliri Jr, Mauricio F., Antonio JM Ferreira, and Volnei Tita. "A review on plate and shell theories for laminated and sandwich structures highlighting the Finite Element Method." *Composite Structures* 156 (2016): 63-77.
- [9] Belarbi, M. O. "Éléments finis pour l'analyse des structures sandwichs." *Université Mohamed Khider, Biskra, Thèse Doctorat Juin* (2015).
- [10] Kirchhoff, Gustav. *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe.* 1850..
- [11] Jaouen, Juc. "Vibration de flexion des plaques." *Rapport de recherché/Université de Sherbrooke* (2002)..
- [12] Kant, Tarun. "Numerical analysis of thick plates." *Computer methods in Applied Mechanics and engineering* 31.1 (1982): 1-18.
- [13] Rao, G. Venkateswara, J. Venkataramana, and I. S. Raju. "A high precision

- triangular plate bending element for the analysis of thick plates." *Nuclear Engineering and Design* 30.3 (1974): 408-412.
- [14] Yuan, Fuh- Gwo, and Robert E. Miller. "A cubic triangular finite element for flat plates with shear." *International journal for numerical methods in engineering* 28.1 (1989): 109-126.
- [15] Kant, Tarun, D. R. J. Owen, and O. C. Zienkiewicz. "A refined higher-order C plate bending element." *Computers & structures* 15.2 (1982): 177-183.
- [16] Kant, Tarun, et al. "Elasticity solution for cross-ply composite and sandwich laminates." *Composite structures* 83.1 (2008): 13-24.
- [17] Reddy, Junuthula N. "A simple higher-order theory for laminated composite plates." (1984): 745-752.
- [18] Belinha, J., and L. M. J. S. Dinis. "Analysis of plates and laminates using the element-free Galerkin method." *Computers & structures* 84.22-23 (2006): 1547-1559.
- [19] Topdar, P., A. H. Sheikh, and N. Dhang. "Finite element analysis of composite and sandwich plates using a continuous inter-laminar shear stress model." *Journal of Sandwich Structures & Materials* 5.3 (2003): 207-231.
- [20] Sheikh, A. H., and A. Chakrabarti. "A new plate bending element based on higher-order shear deformation theory for the analysis of composite plates." *Finite elements in analysis and design* 39.9 (2003): 883-903.
- [21] MEFTAHA, Kamel. "Modélisation numérique des solides par éléments finis volumiques basés sur le concept SFR (Space Fiber Rotation) ". *Diss. Université Mohamed Khider–Biskra*, 2013.
- [22] Ghosh, A. K., and S. S. Dey. "A simple finite element for the analysis of laminated plates." *Computers & structures* 44.3 (1992): 585-596.
- [23] Xiao, J. R., et al. "Analysis of thick composite laminates using a higher-order shear and normal deformable plate theory (HOSNDPT) and a meshless method." *Composites Part B: Engineering* 39.2 (2008): 414-427.
- [24] Sedira, Lakhdar. "Contribution à la Modélisation de Composites 2D/3D à l'Aide d'Eléments Finis Spéciaux". *Diss. Reims*, 2013.