



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquée

Mémoire sur:

Approximation de l'équation intégrale de Fredholm par les polynômes de Bernstien

Présenté par: **Farzouli Rachid**

Soutenu le : 30 /06 / 2019

Devant le jury composé de :

Dr. Brahim BEN ALI
Dr. Khaled HABITA
Dr. Mohammed BEGGAS

Président
Encadreur
Examineur

Univ. El Oued
Univ. El Oued
Univ. El Oued

Année universitaire 2018 – 2019

Remerciements

Avant tout je remercie **Allah**, le tout puissant d'avoir, éclaire notre vie, renforce notre courage et notre volante pour finie ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et ma profonde reconnaissance à notre encadreur de mémoire, Docteurs **Khaled HABITA** et **Belkacem LAKEHALI** qui nous a proposé le sujet de ce mémoire. Merci pour ses précieux conseils et ses encouragements.

Mes remerciements vont également à **Dr. brahim BEN ALI** pour le grand honneur qu'elle nous fait en présidant le jury de ce mémoire, et à **Dr. Beggas Mohammed** d'avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire. Merci pour leurs remarques et toutes leurs idées.

Je remercie également toutes les personnes qui nous ont aidé à réaliser ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents,

-A mes frères,

-A mes soeures,

-A toute ma famille,

-A tous mes disciples,

-A tous les amis et compagnons

Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

Enfin je dédie cette mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

Table des matières

Introduction	1
1 Rappel d'analyse fonctionnel	2
1.1 Définitions de base et exemples	2
1.1.1 Espace normé	2
1.1.2 Espace de Banach	3
1.1.3 Inégalité du Holder	3
1.1.4 L'inégalité de Minkowski	5
2 Équations intégrales linéaire	7
2.1 Classification des équations intégrales	7
2.1.1 équations intégrales de Volterra	8
2.1.2 Equations intégrales de Fredholm	8
2.2 Quelques théorèmes du point fixe	9
2.2.1 Contraction	9
2.2.2 L'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale Notions sur les opérateurs	10
2.2.3 Equation Intégral de Fredholm	14
2.2.4 Le théorème Alternative de Fredholm	15
3 Polynômes de Bernstein	16
3.1 L'idée principale	16
3.2 Propriétés des polynômes de Bernstein	19
3.3 Dérivation des polynômes de Bernstein	22
3.4 Base des polynômes de Bernstein	23
3.4.1 Conversion de la base de Bernstein à la base des monômes	23
3.4.2 Les polynômes de Bernstein forment une base pour l'espace des polynômes	24
3.5 Représentation matricielle des polynômes de Bernstien	25
3.6 Approximation par les polynômes de Bernstein	26
3.6.1 Développement d'une fonction en série de Bernstein	26
3.6.2 Théoreme de Weierstrass	28

4 Applications et Exemples numériques	30
4.1 Applications	30
4.2 Exemples numériques	31
Bibliographie	39

Notations

\mathbb{Z} : L'ensemble des nombres entiers.

$C([a; b])$: Espace des fonctions continues sur l'intervalle $[a; b]$.

$\|x\|$: La norme de vecteur x .

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: Un produit scalaire.

\mathbb{R} : Ensemble des nombres réels.

\mathbb{C} : Ensemble des nombres complexes.

\simeq : Approximation.

$B_{i,n}$: Polynôme de Bernstein.

$f(t)$: Fonction donnée.

λ, c : Paramètres réels non nul.

u : La fonction inconnue dans l'EDO (Solution exacte).

\tilde{f} : Solution approchée.

$\mathbb{R}_n[x]$: L'espace du polynômes.

EDO : Équation différentielle ordinaire.

Table des figures

Figure(1)	page18
Figure(2)	page28
Figure(3)	page33
Figure(4)	page36

Liste des tableaux

Tableau(1)	page27
Tableau(2)	page34
Tableau(3)	page37

Introduction

Une équation intégrale est une équation dont l'une des indéterminées est une intégrale. Les équations intégrales sont l'un des principaux outils dans divers domaines de la mathématique appliquée, de la physique et de l'ingénierie.

Les équations intégrales de Fredholm sont l'une des équations intégrales les plus importantes.

Comme pour les équations différentielles ordinaires ou les équations aux dérivées partielles, il n'est pas connu de méthode universelle pour la résolution des équations intégrales dites exactes. Il arrive très souvent que même celles qui présentent des formes apparemment simples ne se laissent pas résoudre avec ces méthodes dites exactes.

Des méthodes numériques de résolution avec des schémas algorithmiques pour leur implémentation sur ordinateur quand la méthode s'y adapte sont alors proposées.

Dans ce mémoire, nous présentons un algorithme basé sur la modification de la bases de l'espace des polynômes, la base de Bernstein. Nous discutons de la nouvelle forme des polynômes, les polynômes de Bernstein ont de nombreuses propriétés utiles.

L'ensemble des polynômes Bernstein de degré n sur un intervalle $[a; b]$, il constitue une base complète pour $(n + 1)$ polynômes continus.

Nous présentons la solution aux équations intégrales de Fredholm comme des combinaisons linéaires de ces polynômes $\varphi(x) = \sum_{i=0}^n c_i B_{i,n}(x)$ et les coefficients c_i seront déterminés à l'aide de la méthode de collocation.

Chapitre 1

Rappel d'analyse fonctionnel

1.1 Définitions de base et exemples

Dans ce chapitre, nous présenterons des définitions et des exemples concernant l'analyse fonctionnel d'entre eux :

- Espace normé
- Espace Banach
- Inégalité du *h*ölder
- L'inégalité de Minkowski

1.1.1 Espace normé

Nous allons considérer les espaces linéaires sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et nous gardons notre convention que chaque fois que nous devons faire référence au champ scalaire, nous prenons les nombres complexes.

Définition 1.1.1 ([1]page 103) Une norme sur un espace linéaire X est une fonction

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow [0, \infty)$$

telle que

1. $\|x\| \geq 0$ pour tous $x \in X$, et $\|x\| = 0$ implique que $x = 0$
2. $\|ax\| = |a| \|x\|$ pour tous $x \in X$ et tous $a \in \mathbb{C}$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous $x, y \in X$.

Un espace normé est un espace linéaire ayant une norme définie.

Définition 1.1.2 ([1]page 103) Si X est un espace normé, alors la boule d'unité fermée de X , notée X_1 , est l'ensemble

$$X_1 = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

Chaque espace normé est un espace métrique, où la métrique est induite par la norme $d(x, y) = \|x - y\|$. On dit qu'un espace normé a une certaine propriété si l'espace métrique sous-jacent a cette propriété. Par exemple, un espace normé est dit **séparable** s'il est séparable en tant qu'espace métrique et il est dit **complet** s'il est complet en tant qu'espace métrique.

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.1.3 ([1]page 104) Un espace de Banach est un espace normé complet.

Exemple 1.1.1 Soit X un espace topologique. l'espace $C_b(X)$ des fonctions continues bornées équipées de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ est un espace de Banach. En particulier, si X est un espace compact, alors $C(X)$ équipé de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

Soit $p \in [1, \infty)$. Pour toute séquence finie ou infinie $x = (x_k)_k$ on définit

$$\|x\|_p = \left(\sum |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Nous définissons également

$$\|x\|_\infty = \|x_k\|$$

Une famille importante d'espaces de Banach de dimension finie est donnée par les espaces communément désignés par ℓ_n^p (pour $p \in [1, \infty]$ et $n \in \mathbb{N}$), qui sont les espaces vectoriels \mathbb{C}^n dotée de la norme $\|\cdot\|_p$. Les espaces dimensionnels infinis ℓ^p ($p \in [1, \infty)$), donnés par

$$\ell^p = \{ x = (x_k)_{k=0}^\infty \in \mathbb{C}^\infty : \|x\|_p < \infty \}$$

Pour $p = 2$, on obtient l'espace de Hilbert ℓ^2 . Pour $p = 1$ ou $p = \infty$, il est clair que $\|\cdot\|_p \in \{1, 2, \infty\}$ est une norme, mais pour p il n'est pas évident que $\|\cdot\|_p$ est une norme.

Définition 1.1.4 ([1]page 104) Deux nombres réels étendus $p, q \in [1, \infty]$ sont dits exposants conjugués si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Si $p = 1$, alors nous comprenons que cela signifie que $q = \infty$.

1.1.3 Inégalité du Holder

Lemme 1.1.1 ([1]page 104) (**Inégalité du Holder**).

Soient $p, q \in [1, \infty]$ des conjugués exposants. Puis pour deux séquences finies ou infinies quelconques x_1, x_2, \dots et y_1, y_2, \dots

$$\sum_k |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Preuve. Le coeur du problème est de prouver l'inégalité des suites finies. Pousser le résultat à des séquences infinies ne nécessite aucune idée intelligente.

Par conséquent, nous devons prouver que pour chaque $x = (x_k)_{k=1}^n$ et $y = (y_k)_{k=1}^n$ dans \mathbb{C}^n ,

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.1)$$

Le cas $p = 1$ ou $(p = \infty)$ est immédiat. La partie droite (1,1) est continue pour p lorsque x et y sont fixes, il suffit donc de vérifier l'inégalité d'un ensemble dense de valeurs de p dans $(1, \infty)$ défini par

$$S = \left\{ \frac{1}{p} \in (0, 1) \mid p \text{ satisfait l'Equation (1,1) pour tous } x, y \in \mathbb{C}^n \right\}$$

Notre tâche se limite maintenant à montrer que S est dense en $(0, 1)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que $1 \in S$. De plus, les rôles de p et de q sont interchangeables, donc $\frac{1}{p} \in S$ si et seulement si $1 - \frac{1}{p} \in S$. Soit $a = \frac{q}{2p+q}$ (a est choisi pour être la solution $2ap = (1-a)q$, nous l'utiliserons bientôt). Maintenant, si $\frac{1}{p} \in S$, on applique (1,1) aux séquences $(|x_k| |y_k|^a)_k$ et $(|y_k|^{1-a})_k$, puis on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k y_k| &= \sum_{k=1}^n |x_k| |y_k|^a |y_k|^{1-a} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p |y_k|^{ap} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^{(1-a)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^{2p} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^{2ap} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^{(1-a)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \end{aligned}$$

où $\frac{1}{p'} = \frac{1}{2p}$ et $\frac{1}{q'} = \frac{1}{2p} + \frac{1}{q}$. Donc, si $s = \frac{1}{p} \in S$, alors $\frac{s}{2} = \frac{1}{2p} \in S$, et si $s = \frac{1}{q} \in S$, alors $\frac{s+1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{2} \frac{1}{p}$ est aussi dans S .

Comme on sait que $\frac{1}{2}$ est dans S , il s'ensuit par induction que pour $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$, la fraction $\frac{m}{2^n}$ est dans S . Hense S est dense en $(0, 1)$, et la preuve est complète.

Remarque 1.1.1 Il est parfois utile d'invoquer l'inégalité de Hölder sous la forme

$$|\sum_k x_k y_k| = \left(\sum_k |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_k |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

, ce qui découle évidemment de celui que nous avons prouvé. En fait, ceci est équivalent.

1.1.4 L'inégalité de Minkowski

Lemme 1.1.2 (L'inégalité de Minkowski)

Pour chaque $p \in [1, \infty]$ et chaque séquence (finie ou infinie) x_1, x_2, \dots et y_1, y_2, \dots

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

En particulier, si $x, y \in \ell^p$ alors $x + y \in \ell^p$.

Preuve. Aussi, les cas $p = 1, \infty$ sont faciles, et le résultat pour des séquences infinies est une conséquence du résultat pour des séquences finies. Par conséquent, posons $p \in (1, \infty)$, et mettons $x, y \in \mathbb{C}^n$. Avec $q = \frac{p}{p-1}$, nous utilisons l'inégalité de Hölder et l'identité $q(p-1) = p$ pour trouver

$$\begin{aligned} \sum_k |x_k + y_k|^p &= \sum_k |x_k + y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \\ &\leq \sum_k |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_k |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \\ &\leq \|x\|_p \left(\sum_k |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{q}} + \|y\|_p \left(\sum_k |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

L'inégalité de Minkowski suit.

Théorème 1.1.1 Pour tout $p \in [1, \infty]$, et tous $n \in \mathbb{N}$ les espaces ℓ_n^p et ℓ^p sont des espaces de Banach.

Preuve. Concentrons-nous sur le cas des séquences infinies. Par l'inégalité de Minkowski, ℓ^p est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ est une norme. Pour $p \neq \infty$, la complétude est établie exactement de la même manière que pour l'espace ℓ^2 , en remplaçant 2 par p . Le cas $p = \infty$ découle de l'exemple. La catégorie des espaces normés est beaucoup plus riche que celle des espaces de Hilbert. Sauf $p = 2$, il n'existe pas de produit intérieur sur ℓ^p (ou sur ℓ_n^p) donnant lieu à la norme $\|\cdot\|_p$. Les normes induites par un produit interne sont exceptionnelles.

Exemple 1.1.2 Une norme sur un espace normé X est induite par un produit intérieur si et seulement si elle satisfait à la loi du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \text{ pour tous } x, y \in X.$$

En utilisant le résultat de l'exemple, il n'est pas difficile de montrer que certaines normes très fréquentes, telles que les normes $\|\cdot\|_p$ ou la norme opérateur sur $B(H)$, ne sont pas induites par des produits intérieurs.

Théorème 1.1.2 ([1]page 107) Chaque espace normé X peut être intégré isométriquement dans un espace de Banach unique contenant X en tant que sous-test dense.

La preuve du théorème est semblable à celle du théorème (le théorème d'achèvement dans l'espace d'Hilbert), mais plus simple. L'unique espace Banach contenant X est appelé l'achèvement de X .

Exemple 1.1.3 Soit ℓ_0 l'espace vectoriel de toutes les séquences supportées finement. pour $1 \leq p \leq \infty$, équiper ℓ_0 avec la norme $\| \cdot \|_p$. Calculer l'achèvement de ℓ_0 par rapport à $\| \cdot \|_p$.

Exemple 1.1.4 Une fonction $f \in C(\mathbb{R}^k)$ est dite avoir un support compact si le support de f , défini comme étant $\text{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$, est un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^k . Une fonction f est dite **vanich à l'infini** si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un K compact tel que $|f(x)| < \epsilon$ pour tout $x \notin K$. Soit $C_c(\mathbb{R}^k)$ l'espace de toutes les fonctions continues supportées de manière compact, et $C_0(\mathbb{R}^k)$ l'espace de toutes les fonctions continues exerçant leur activité à l'infini. Prouver que $C_c(\mathbb{R}^k)$ est un espace normé incomplet et que l'achèvement de $C_c(\mathbb{R}^k)$ est $C_0(\mathbb{R}^k)$.

Exemple 1.1.5 Soit D un joli sous-ensemble dans \mathbb{R}^k (par exemple, un ensemble ouvert, ou un carré $[0, 1]^k$, etc.). Soit $C_c(D)$ les fonctions continues avec support compact dans D . Définissons une norme sur $C_c(D)$ par $\|f\|_p = \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$. Le fait qu'il s'agisse d'une norme dépend de l'inégalité de Minkowski pour les intégrales. Ensuite, $L^p(D) = L^p(D, dx)$ peut être identifié avec (et peut également être défini comme) l'achèvement de $C_c(D)$ par rapport à cette norme.

Notez que si $p = 2$ et $D = [a, b]$, alors, nous obtenons la même définition de $L^2[a, b]$.

Exemple 1.1.6 $L^p(D)$ est séparable (c-à-d. Que $L^p(D)$ contient un sous-ensemble dense dénombrable) pour tous les $p \in [1, \infty)$. ℓ^p est séparable pour $p \in [1, \infty)$ et non séparable pour $p = \infty$.

Exemple 1.1.7 L'exemple précédent s'inscrit dans une famille d'espaces plus large, définie en termes de théorie des mesures. Si (X, μ) est un espace de mesure et $p \geq 1$, on peut alors définir les espaces de Lebesgue $L^p(X, \mu)$ comme l'espace de toutes les fonctions mesurables sur X pour lesquelles $\int_X |f|^p d\mu < \infty$. Si $X = 1, 2, \dots$, et μ sont la mesure de comptage, alors nous obtenons l'espace ℓ^p (la mesure de comptage est la mesure qui attribue à chaque ensemble S

la valeur $\mu(S) =$ le nombre d'éléments dans S .

Chapitre 2

Équations intégrales linéaire

En mathématiques, une équation intégrale est une équation dans laquelle une fonction inconnue apparaît sous un signe intégral. Il existe un lien étroit entre équations différentielles et intégrales, et certains problèmes peuvent être formulés de toute façon.

2.1 Classification des équations intégrales

Une équation intégrale peut être classée comme étant soit une équation intégrale linéaire ou bien comme une équation intégrale non linéaire. Il y a une similitude parfaite avec la classification des équations différentielles ordinaires ou celle aussi des équations aux dérivées partielles. Les équations intégrales les plus fréquemment utilisées sont les équations intégrales de Volterra et celles de Fredholm. qui consistent donc les deux principales catégories. A ces deux catégories d'équations intégrales, nous pouvons considérer encore deux autres types,

savoir Les équations intéro-différentielles et les équations intégrales singulières.

Nous savons l'équation intégrales dans ce formulaire :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x, t)\varphi(t) dt \quad (2.1)$$

où $k(x; t)$ est appelée le noyau de l'équation intégrale (2,1), $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ c'est à sont les limites de l'intégration. On peut facilement observer que la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaît sous le signe de l'intégrale. Il est à noter ici que le noyau $k(x; t)$ et la fonction $f(x)$ dans l'équation (2,1) sont des fonctions donné, et λ est une constante paramètre au sens physique on supposera dans toute la suite que $\lambda = 1$ L'objectif principal de ce texte est de déterminer la fonction inconnue $\varphi(x)$ qui va satisfaire l'équation (2,1) en utilisant un certain nombre de techniques de solutions. Nous doit consacrer des effort considérables dans l'exploration de ces méthodes pour trouver des solutions de la fonction inconnue.

2.1.1 Équations intégrales de Volterra

On appelle équation intégrale de Volterra linéaire de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (2.2)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $k \in C([a, x] \times [a, x])$, $f \in C([a, x])$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

1- Si $f(x) = 0$ l'équation (2,2) s'écrit

$$\int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = \varphi(x)$$

elle est appelée équation intégrale linéaire homogène de Volterra de seconde espèce

2- Une équation de la forme

$$\int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue est appelée équation intégrale de Volterra linéaire de première espèce

3- Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit

$$\int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = 0$$

Cette équation est dit équation intégral homogène de volterra de première espèce.

2.1.2 Equations intégrales de Fredholm

On appelle l'équation intégrale de Fredholm linéaire de seconde espèce l'équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (2.3)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $k \in C([a, b] \times [a, b])$, $f \in C([a, b])$ sont des fonctions connues et un paramètre réel.

où $\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)dxdt < \infty$

1- Si $f(x) = 0$ l'équation (2,3) s'écrit

$$\int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = \varphi(x), \quad x \in [a, b]$$

elle est dite équation intégrale de Fredholm de seconde espèce homogène

2- Une équation de la forme

$$\int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x \in [a, b]$$

est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

3-Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit

$$\int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = 0, \quad x \in [a, b]$$

Cette équation dit équation intégral homogène de Fredholm de première espèce.

2.2 Quelques théorèmes du point fixe

Le théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach. On va appliquer les théorèmes classiques du point fixe pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution pour la résolution d'une équation de la forme $A\varphi = \varphi$, où A est un opérateur défini sur un espace de Banach H , pas nécessairement linéaire. Nous allons voir que si A est un opérateur **contractant**, alors cette équation admet une solution unique pour tout f dans H .

2.2.1 Contraction

Définition 2.2.1 Soit A un opérateur borné sur un espace de Banach H . On dit que A est un opérateur contractant s'il existe une constante positive k telle que $0 < k < 1$ i.e.

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq k\|\varphi_1 - \varphi_2\| \quad (2.4)$$

pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in H$.

Le résultat suivant est appelé théorème de l'application contractante.

Théorème 2.2.1 Soit A un opérateur contractant sur H . Alors l'équation homogène

$$A\varphi = \varphi \quad (2.5)$$

admet une solution unique dans H . Une telle solution est un point fixe de l'opérateur A .

Montrons d'abord l'unicité du point fixe. Raisonnons par l'absurde et supposant qu'il existe deux points fixes φ_1 et φ_2 telles que $A\varphi_1 = \varphi_1$ et $A\varphi_2 = \varphi_2$, alors

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\| = \|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq K\|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

et

$$(1 - k)\|\varphi_1 - \varphi_2\| < 0$$

D'où $\|\varphi_1 - \varphi_2\| = 0$,

ce qui implique $\varphi_1 = \varphi_2$.

Pour montrer l'existence, nous allons construire un processus itératif. Soit la donnée d'un élément initial φ_0 et d'une suite récurrente définie par

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

On doit montrer d'abord que cette suite est de Cauchy,

et que sa limite est une solution de (2,5). Que la limite existe, découle du fait que dans un Banach toute suite de Cauchy est convergente. Notons que,

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| = \|A\varphi_n - A\varphi_{n-1}\| \leq k\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\|$$

D'où

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| \leq k\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| \leq k^2\|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\| \leq \dots \leq k^n\|\varphi_1 - \varphi_0\|$$

en général, si $n > m$,

$$\begin{aligned}\|\varphi_n - \varphi_m\| &= \|(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) + \dots + (\varphi_{m+1} - \varphi_m)\| \\ &\leq \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| + \|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\| + \dots + \|\varphi_{m+1} - \varphi_m\| \\ &\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k^m)\|\varphi_1 - \varphi_0\| \\ &\leq (k^m + k^{m+1} + \dots)\|\varphi_1 - \varphi_0\| = \frac{k^m}{1-k}\|\varphi_1 - \varphi_0\|\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0$$

Par conséquent, la suite (φ_n) est de Cauchy, notons sa limite par φ . Il reste à montrer que φ est une solution de (2,5). Comme A est continu, nous avons

$$A\varphi = A(\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} A\varphi_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n) = \varphi$$

2.2.2 L'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale Notions sur les opérateurs

1. Opérateur linéaire

Théorème 2.2.2 Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :

-Condition additive :

$$\forall u_1, u_2 \in E \text{ on a } A(u_1 + u_2) = A(u_1) + A(u_2)$$

-Condition homogène :

$$\forall u_1, u_2 \in E, \text{ et } \lambda, \mu \in \mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \text{ on a } A(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda A(u_1) + \mu A(u_2)$$

Définition 2.2.2 2. Opérateur linéaire borné

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $c > 0$, telle que :

$$\|A(x)\|_F \leq c\|x\|_E, \forall x \in E$$

3. Opérateur intégrale linéaire

Un opérateur intégral linéaire à noyau défini à l'aide d'une intégrale paramétrique sur certains espaces fonctionnels. La forme générale d'un opérateur intégral est donnée par l'expression suivante :

$$A : C([a, b]) \longrightarrow C([a, b])$$

$$\varphi = (A\varphi)(x) = \int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt$$

$$K : C([a, b]) \times C([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une fonction continue qui s'appelle le noyau de l'opérateur intégral A .

Cet opérateur est borné, avec

$$\|A\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |K(x, t)| dt$$

4. Opérateur compact

Un sous-ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte, c'est-à-dire chaque suite de S contient une sous-suite convergente.

Les sous-ensembles finis et bornés d'un espace normé sont relativement compacts.

Soit $A : X \longrightarrow Y$, où X et Y deux espaces de Banach. L'opérateur A est compact, si et seulement si pour toute suite bornée $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$, la suite $\{Ax_n\}_{n \geq 1}$ admet une sous-suite convergente dans Y . Dans le cas particulier où $X = C([a, b])$, le théorème suivant d'Arzela-Ascoli est généralement utilisé pour prouver la compacité de A .

On note par $k(X)$ l'ensemble des opérateurs compacts.

Théorème 2.2.3 (Arzela-Ascoli)

Un ensemble $U \subset C([a, b])$ est relativement compact si et seulement s'il est **borné** et **équicontinue**, c'est-à-dire il existe une constante c sachant que :

$$|\varphi(x)| \leq c, \forall x \in [a, b], \forall \varphi \in U$$

et U est c'est à dire : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que

$$\forall x, t \in [a, b], |x - t| < \delta, \forall \varphi \in U, |\varphi(x) - \varphi(t)| < \epsilon$$

L'opérateur intégral A de $C([a, b])$ dans $C([a, b])$ à noyau continu est un opérateur compact.

Soit G un ensemble borné de $C([a, b])$ alors, on a :

$$\|\varphi\| \leq M \text{ pour tout } \varphi \in G$$

de plus

$$|A\varphi(x)| \leq M |b - a| \max_{x, t \in [a, b]} |K(x, t)|, \forall x \in [a, b] \text{ et } \forall \varphi \in G$$

d'où l'ensemble $A(G)$ est uniformément borné.

D'autre part, le noyau K est uniformément continu sur le compact $[a; b] \times [a; b]$,

d'où pour tout x, t, y de $[a; b]$, on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } |x - t| < \delta \Rightarrow |K(x, y) - K(t, y)| < \frac{\epsilon}{M|b-a|}$$

d'où

$$|A\varphi(x) - A\varphi(t)| < \epsilon, \text{ pour tout } \varphi \in G \text{ et } x, t \in [a, b] \text{ avec } |x - t| < \delta$$

Ceci exprime que l'ensemble $A(G)$ est équicontinu, d'où $A(G)$ est relativement compact, par le théorème d'Arzela-Ascoli, alors A est compact.

Lemme 2.2.1 Soient X et Y deux espace vectoriel normés et soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur de rang fini alors A est un opérateur compact.

La série géométrique de Neumann

Soit l'équation intégrale issue d'un noyau continu $k(x; y)$

$$\varphi(x) - \int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt = f(x) \quad (2.6)$$

qu'on peut l'écrire aussi sous la forme :

$$\varphi - A\varphi = f \quad (2.7)$$

L'existence de la solution pour cette équation dépend de l'existence de l'inverse de l'opérateur $I - A$, (i.e. $(I - A)^{-1}$).

Théorème 2.2.4 (de Banach)

Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach E dans lui même, avec $\|A\| < 1$, et soit I l'opérateur identique sur E . Alors $I - A$ admet un opérateur inverse borné donné par la série de Neumann

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad (2.8)$$

de plus

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} \quad (2.9)$$

Preuve. Comme $\|A\| < 1$, on a la convergence absolue

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

dans l'espace de Banach E , par conséquent la série de Neumann converge en norme et elle est définie par un opérateur linéaire borné

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

avec $\|S\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$, de plus S est l'inverse de $I - A$.

En effet, en utilisant les notations $A^0 = 1$, $A^k = AA^{k-1}$, on peut voir que

$$(I - A)S = (I - A) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n A^k = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A^{n+1}) = I$$

et

$$S(I - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n A^k (I - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A^{n+1}) = I$$

puisque $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \rightarrow 0$, lorsque $n \rightarrow \infty$

Grâce à ce théorème, l'unique solution φ de l'équation (2,6) est de la forme :

$$\varphi = (I - A)^{-1} f = f + A(f) + A^2(f) + \dots + A^n(f) + \dots$$

cette solution s'appelle la série de Neumann.

A partir de cette série,

on peut approcher la solution φ en posant :

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^n A^i f$$

Définition 2.2.3 Si le noyau $k(x; t)$ d'une équation intégrale s'écrit de la forme

$$k(x; t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \beta_i(t)$$

où les fonction $\alpha_i(x)$ pour $i = 1 \dots n$ sont linéairement indépendantes.

Alors il est dit noyau séparable ou dégénéré.

Exemple 2.2.1 Soit $X = Y = C([a; b])$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$

Considérons l'équation intégral linéaire de Fredholm de première espèce :

$$\int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \tag{2.10}$$

supposons que le noyau dégénéré la fonction $k(x; t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \beta_i(t)$

les fonctions α_i sont continues sur $[a; b]$ et les fonctions β_i sont absolument intégrales dans $[a; b]$.

Alors l'opérateur intégrale A associe au noyau k est borné et de rang fini de

$C([a; b]) \rightarrow C([a; b])$ l'équation (2,10) est de la forme

$$A\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(t) \varphi(t) dt, \varphi \in C([a; b]) \tag{2.11}$$

$$\|A\| \leq M \sum_{i=1}^n \|\alpha_i\| \int_a^b |\beta_i(t)| dt$$

d'après (2,11), $A\varphi \in C([a; b])$ et $Im(A) \subset span \alpha_1, \dots, \alpha_n$ donc de rang fini d'après le lemme (2,2,1) l'opérateur A est compact.

Un autre façon Montrer que tout opérateur défini sur un espace de Hilbert de dimension finie est compact, (utilisez le théorème de Bolzano-weierstrass).

Exemple 2.2.2 L'exemple le plus important des opérateurs compacts est l'opérateur intégral A défini sur l'espace $L^2([a; b])$ par

$$(A\varphi)(x) = \int_a^x k(x, t)\varphi(t) dt; a \leq x \leq b \quad (2.12)$$

où a et b sont finis et k une fonction continue sur $[a; b] \times [a; b]$, dite le noyau de l'opérateur.

Pour montrer que l'opérateur A de la formule (2,12) est compact,

on va procéder comme suite :

Si A est un opérateur défini sur un espace de dimension finie, alors il est borné. Donc si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée il s'en suit que, $(Au_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite bornée. Par le théorème de Bolzano-weierstrass, la suite $(Au_n)_{n \in \mathbb{N}}$

contient une sous-suite $(Au_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente.

Théorème 2.2.5 Soit $I = [a; b]$ un intervalle compact et k un noyau continu sur

$I \times I$. Alors l'équation intégrale de Fredholm admet une unique solution si $(b - a) \|k\|_\infty < 1$

Théorème 2.2.6 $I = [a; b]$ un intervalle compact et k un noyau continu sur $I \times I$.

Alors l'équation intégrale de Volterra admet une unique solution. Voir [5] [page 184-185]

2.2.3 Equation Intégral de Fredholm

On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt = f(x) \quad (2.13)$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $k(x; t)$ et $f(x)$ des fonctions données, x et

t deux variables réelle parcourant l'intervalle (a, b) et λ un facteur numérique.

La fonction $k(x; t)$ est le noyau de l'équation intégrale (2,13), on suppose que le noyau $k(x; t)$ est défini dans le carré

Ω $a \leq x \leq b, a \leq t \leq b$ du plan

(x, t) et continu dans Ω , ou bien présente des discontinuités telle que l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dx dt < \infty$$

soit finie.

Si $f(x) \neq 0$, l'équation (2,13) est dit non homogène, dans le cas contraire,

l'équation intégrale (2,13) s'écrit

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = 0$$

et on dit qu'elle est homogène.

Cette condition provoque le développement de la solution de l'équation intégrale de Fredholm (2,13) Cette relation est également, sans preuve,

est connu par le **théorème Alternative de Fredholm**. Cela relation les solutions des équations intégrales homogènes et non homogènes de Fredholm.

2.2.4 Le théorème Alternative de Fredholm

Si l'équation intégrale homogène de Fredholm

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$$

où $k \in C([a, b] \times [a, b])$ et $\int_a^b \int_a^b k^2(x, t) dx dt < \infty$

N'a que la solution triviale $\varphi(x) = 0$, alors l'équation de Fredholm non homogène correspondante

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$$

A toujours une solution unique. Ce théorème est connu par **le théorème Alternative de Fredholm**.

Chapitre 3

Polynômes de Bernstein

Les polynômes sont des outils mathématiques très utiles car ils sont simplement définis, peuvent être calculés rapidement sur les systèmes informatiques et représentent une énorme variété de fonctions. Ils peuvent être différenciés et intégrés facilement,

et peuvent être assemblés pour former des courbes splines qui peuvent approximer n'importe quelle fonction à toute précision souhaitée. La plupart des étudiants sont introduits dans les polynômes à un stade très précoce de leurs études de mathématiques, et prennent la forme suivante :

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

Qui représente un polynôme en tant que combinaison linéaire des monômes : $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$.

En général, toute fonction polynomiale ayant un degré inférieur ou égal à n peut être écrite de cette manière, et les raisons sont simplement

- L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n forme un espace vectoriel.
- L'ensemble des fonctions $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ forme une base pour l'espace vectoriel des polynômes, dite la base canonique bien sûr elle n'est pas unique.

Dans ce chapitre on va choisir et étudier une autre base pour l'espace vectoriel des polynômes qui est la base de Bernstein.

3.1 L'idée principale

Supposons que nous sommes concernés par un polynôme $p(t)$ sur l'intervalle $t \in [0, 1]$.

A n'importe quel point de cet intervalle, les valeurs t et $1 - t$ représentent les distances des points d'extrémités de l'intervalle, $t = 0$ et $t = 1$. Nous appelons t et $1 - t$ les coordonnées barycentriques d'un point par rapport à l'intervalle $t \in [0, 1]$. Si l'on considère l'intervalle comme une tige rigide, il équilibrera précisément le point de choix lorsque nous placerons des poids proportionnels à $1 - t$ et t aux extrémités $t = 0$ et $t = 1$. les coordonnées barycentriques

$(1, 1 - t)$ d'un point sont évidemment redondantes, puisque $t + 1 - t \equiv 1$ pour n'importe quel t , mais ils fournissent une spécification ou une position plus symétrique ou "équilibrée" sur l'intervalle $[0, 1]$.

En prenant l'identité $t + 1 - t \equiv 1$ et en effectuant un développement binomiale de l'expression à la puissance n^{ieme} , on obtient

$$[t + (1 - t)]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 - t)^{n-k} t^k \equiv 1$$

Définition 3.1.1 Voir ([2], page 2) Les polynômes Bernstein de degré n sont définis par

$$B_{i,n}(t) = \begin{cases} \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i} & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.1)$$

où

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Quelques polynômes

les polynomes de Bernstein de degré 1 sont :

$$B_{0,1}(t) = 1 - t$$

$$B_{1,1}(t) = t$$

Les premiers polynômes de Bernstein sur l'intervalle $[0, 1]$, pour $n = 10$ sont :

$$B_{0,10}(t) = (1 - t)^{10}$$

$$B_{1,10}(t) = 10(1 - t)^9 t$$

$$B_{2,10}(t) = 45(1 - t)^8 t^2$$

$$B_{3,10}(t) = 120(1 - t)^7 t^3$$

$$B_{4,10}(t) = 210(1 - t)^6 t^4$$

$$B_{5,10}(t) = 252(1-t)^5 t^5$$

$$B_{6,10}(t) = 210(1-t)^4 t^6$$

$$B_{7,10}(t) = 120(1-t)^3 t^7$$

$$B_{8,10}(t) = 45(1-t)^2 t^8$$

$$B_{9,10}(t) = 10(1-t) t^9$$

$$B_{10,10}(t) = t^{10}$$

On voit entre autres qu'ils sont tous positifs pour $t \in [0, 1]$

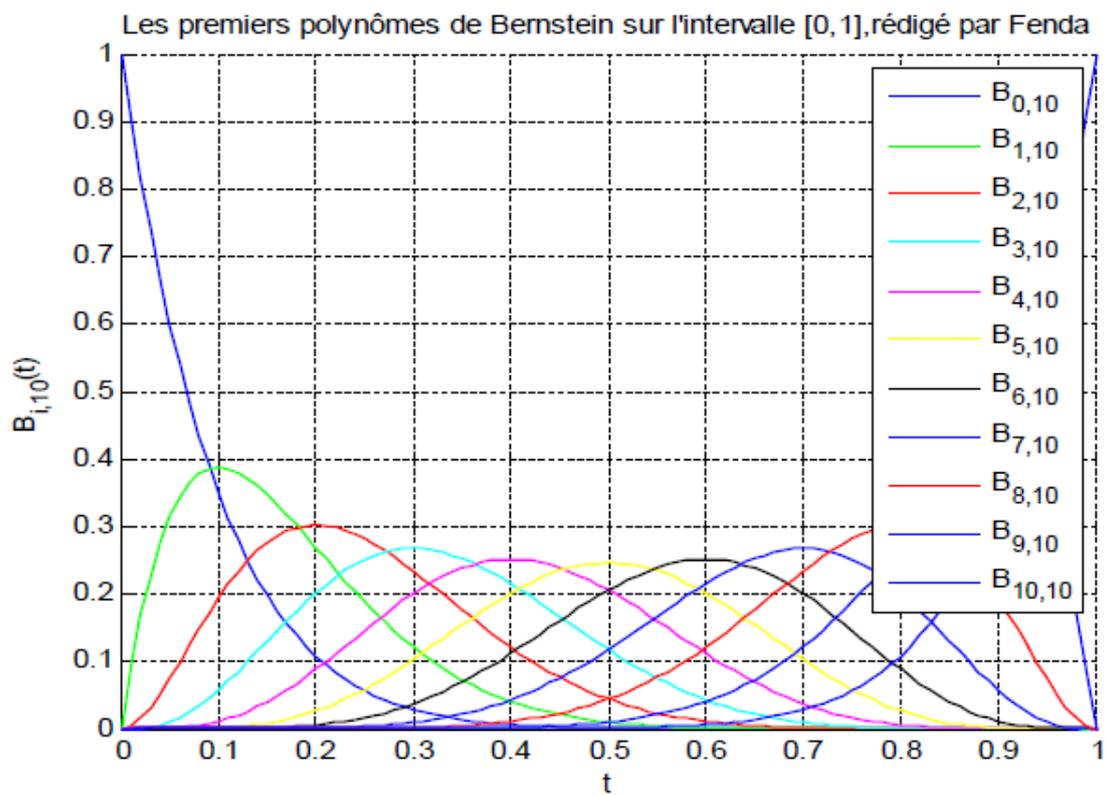


figure (01)

3.2 Propriétés des polynômes de Bernstein

Ces polynômes constituent une base de $\mathbb{R}_n[t]$ (l'ensemble des polynômes définis sur \mathbb{R}) et vérifient, pour tout $t \in [0, 1]$, les identités suivantes :

1. Les polynômes de Bernstein sont définis par une relation de récurrence

Proposition 3.2.1 Voir ([2]. page 5) On peut définir les polynômes de Bernstein de degré n par deux polynômes de Bernstein de degré $n - 1$

$$B_{k,n}(t) = (1 - t)B_{k,n-1}(t) + tB_{k-1,n-1}(t) \quad (3.2)$$

Preuve. pour démontrer ça, on utilisant la définition des polynômes de Bernstein et quelques opérations algébriques :

$$\begin{aligned} (1 - t)B_{k,n-1}(t) + tB_{k-1,n-1}(t) &= (1 - t) \binom{n-1}{k} t^k (1 - t)^{n-1-k} + t \binom{n-1}{k-1} (1 - t)^{n-1-(k-1)} \\ &= \binom{n-1}{k} t^k (1 - t)^{n-k} + \binom{n-1}{k-1} t^k (1 - t)^{n-k} \\ &= \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] t^k (1 - t)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} t^k (1 - t)^{n-k} \\ &= B_{k,n}(t) \end{aligned}$$

2. Les polynômes de Bernstein sont tous non négatifs

Proposition 3.2.2 Voir ([2]. page 5) Une fonction $f(t)$ n'est pas négative sur un intervalle $[a, b]$ si $f(t) \geq 0$ pour tous $t \in [a, b]$. Dans le cas des polynômes de Bernstein de degré n , chacun n'est pas négatif sur l'intervalle $[0, 1]$.

Preuve. Pour montrer cela , nous utilisons la propriété de définition récursive ci-dessus et l'induction mathématique. Il est facile de voir que les fonctions $B_{0,1}$ et $B_{1,1}$ ne sont pas négatives pour $0 \leq t \leq 1$. si nous supposons que tous les polynômes de Bernstein de degré moins k ne sont pas négatifs, puis en utilisant la relation récurrente des polynômes de Bernstein, nous pouvons écrire

$$B_{i,k}(t) = (1 - t)B_{i,k-1}(t) + tB_{i-1,k-1}(t)$$

Et affirment que B n'est pas non plus négatif pour $0 \leq t \leq 1$, puis que tous les composants du côté droit de l'équation sont des composants non négatifs pour l'induction $0 \leq t \leq 1$,

tous les polynômes Bernstein ne sont pas négatifs pour $0 \leq t \leq 1$. Dans ce processus, on a

$$B_{i,n} \geq 0, \forall t \in [0, 1] \quad (3.3)$$

3. Les polynômes de Bernstein forment une partition de l'unité

Proposition 3.2.3 Voir ([2]. page 6) Un ensemble de fonctions $f_i(t)$ est dit une partition d'unité si :

$$\forall t, \sum f_i(t) = 1$$

Les $k + 1$ polynômes de Bernstein de degré k forment une partition d'unité si :

$$\forall t \in [0, 1], \sum_{i=0}^k B_{i,n}(t) = 1 \quad (3.4)$$

Preuve. Pour montrer que cela est vrai, il est plus facile de montrer d'abord un fait légèrement différent, pour chaque $k + 1$, la somme des k polynômes de Bernstein du degré $k - 1$. C'est,

$$\sum_{i=0}^k B_{i,k}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t).$$

Ce calcul est simple, en utilisant la définition récursive et réorganisant intelligemment les sommes :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k B_{i,k}(t) &= \sum_{i=0}^k [(1-t)B_{i,k-1}(t) + tB_{i-1,k-1}(t)] \\ &= (1-t) \left[\sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t) + B_{k,k-1}(t) \right] + t \left[\sum_{i=0}^k B_{i-1,k-1}(t) + B_{k-1,k-1}(t) \right] \\ &= (1-t) \sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t) + t \sum_{i=0}^{k-1} B_{i-1,k-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t) \end{aligned}$$

Où nous avons utilisé

$$B_{k,k-1}(t) - B_{k-1,k-1}(t) = 0$$

Il est facile d'écrire :

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(t) = \dots = \sum_{i=0}^1 B_{i,1}(t) = (1-t) + t = 1.$$

La partition de l'unité est une propriété très importante lors de l'utilisation des polynômes de Bernstein dans la modélisation géométrique et l'infographie. En particulier, pour tout ensemble de points P_0, P_1, \dots, P_n dans l'espace tridimensionnel, et pour tout t , l'expression

$$P(t) = P_0 B_{0,n}(t) + P_1 B_{1,n}(t) + \dots + P_n B_{n,n}(t).$$

Donne une combinaison affine de l'ensemble des points p_0, p_1, \dots, p_n et si $0 \leq t \leq 1$, c'est une combinaison convexe des points.

4. Relation des polynômes de Bernstein entre eux (formules d'élévation de degré) voir ([2]. page 8)

L'un des polynômes de Bernstein à degré inférieur ($degr < n$) peut être exprimé sous la forme d'une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein de degré n . En particulier, tout polynôme de Bernstein de degré $n - 1$ peut être écrit comme une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein de degré n . Nous notons tout d'abord que :

$$\begin{aligned}
 tB_{i,n}(t) &= \binom{n}{i} t^{i+1} (1-t)^{n-i} \\
 &= \binom{n}{i} t^{i+1} (1-t)^{(n+1)-(i+1)} \\
 &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i+1}} B_{i+1,n+1}(t) \\
 &= \frac{i+1}{n+1} B_{i+1,n+1}(t)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (1-t)B_{i,n}(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n+1-i} \\
 &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}} B_{i,n+1}(t) \\
 &= \frac{n-i+1}{n+1} B_{i,n+1}(t).
 \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\binom{n}{i}} B_{i,n}(t) + \frac{1}{\binom{n}{i+1}} B_{i+1,n}(t) &= t^i (1-t)^{n-i} + t^{i+1} (1-t)^{n-(i+1)} \\
&= t^i (1-t)^{n-i-1} ((1-t) + t) \\
&= t^i (1-t)^{n-i-1} \\
&= \frac{1}{\binom{n-1}{i}} B_{i,n-1}(t).
\end{aligned}$$

En utilisant cette équation finale, on peut écrire un polynôme arbitraire de Bernstein en termes de polynômes Bernstein de degré supérieur :

$$\begin{aligned}
B_{i,n-1}(t) &= \binom{n-1}{i} \left[\frac{1}{\binom{n}{i}} B_{i,n}(t) + \frac{1}{\binom{n}{i+1}} B_{i+1,n}(t) \right] \\
&= \left(\frac{n-i}{n} \right) B_{i,n-1}(t) + \left(\frac{i+1}{n} \right) B_{i+1,n}(t).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Qui exprime un polynôme de Bernstein de degré $n-1$ en termes d'une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein de degré n . Nous pouvons facilement étendre cela pour montrer que tout polynôme Bernstein de degré k (moins que n) peut être écrit comme une combinaison linéaire de Les polynômes de Bernstein de degré n , un polynôme de Bernstein de degré $n-2$ peut être exprimé sous la forme d'une combinaison linéaire des polynômes de Bernstein de degré $n-1$, Chacun d'entre eux pouvant être exprimé sous la forme d'une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein de degré n etc.

3.3 Dérivation des polynômes de Bernstein

Proposition 3.3.1 Voir ([2]. page 9) Les dérivés des polynômes de Bernstein de degré n sont des polynômes de degré $n-1$. En utilisant la définition du polynôme de Bernstein, nous pouvons montrer que cette dérivée peut être écrite comme une combinaison linéaire des polynômes de Bernstein de degré $n-1$ En particulier

$$\frac{d}{dt} B_{i,n}(t) = n (B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)). \tag{3.6}$$

Preuve. Pour $0 \leq k \leq n$. Cela peut être démontré par une différenciation directe :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} B_{k,n}(t) &= \frac{d}{dt} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\
&= \frac{kn!}{k!(n-k)!} t^{k-1} (1-t)^{n-k} + \frac{(n-k)n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k-1} \\
&= \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} t^{k-1} (1-t)^{n-k} + \frac{n(n-1)!}{k!(n-k-1)!} t^k (1-t)^{n-k-1} \\
&= n \left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} t^{k-1} (1-t)^{n-k} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} t^k (1-t)^{n-k-1} \right) \\
&= n(B_{k-1,n-1}(t) - B_{k,n-1}(t))
\end{aligned}$$

C'est-à-dire que la dérivée d'un polynôme de Bernstein peut être exprimée comme le degré du polynôme, multiplié par la différence des polynômes Bernstein de grenaille du degré $n-1$

3.4 Base des polynômes de Bernstein

3.4.1 Conversion de la base de Bernstein à la base des monômes

Puisque la base de puissance des monômes constitue une base pour l'espace de polynômes de degré inférieur ou égal à n . Alors tout polynôme Bernstein de degré n peut être écrit en termes de base des monômes. Cela peut être calculé directement en utilisant la définition des polynômes de Bernstein et le théorème binomial, comme suit, voir ([2]. page 8) :

$$\begin{aligned}
B_{k,n}(t) &= \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} t^k \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} t^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n}{k} \binom{n-k}{i} t^{i+k} \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{i-k} \binom{n}{k} \binom{n-1}{i-k} t^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{i-k} \binom{n}{i} \binom{i}{k} t^i
\end{aligned}$$

Où nous avons utilisé le théorème binomial pour développer $(1-t)^{n-k}$.

Pour montrer que chaque élément de base des monômes peut être écrit comme une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein, nous utilisons les formules d'élévation de degré et l'induction pour calculer :

$$\begin{aligned}
t^k &= t(t^{k-1}) \\
&= t \sum_{i=k-1}^n \frac{\binom{i}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} B_{i,n-1}(t) \\
&= \sum_{i=k}^n \frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}} t B_{i-1,n-1}(t) \\
&= \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{\binom{i}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \frac{i}{n} B_{i,n}(t) \\
&= \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} \frac{i}{n} B_{i,n}(t),
\end{aligned}$$

Où l'hypothèse d'induction a été utilisée dans la deuxième étape.

3.4.2 Les polynômes de Bernstein forment une base pour l'espace des polynômes

Voir ([2]. page 10) Pourquoi les polynômes Bernstein d'ordre n forment-ils une base pour l'espace de polynômes de degré inférieur ou égal à n ?

- Ils couvrent l'espace des polynômes-tout polynôme de degré inférieur ou égal à n peut être écrit comme une combinaison linéaire des polynômes de Bernstein.

Les polynômes de Bernstein sont une polarisation des polynômes.

- Ils sont linéairement indépendants :

$$c_0 B_{0,n}(t) + c_1 B_{1,n}(t) + \dots + c_n B_{n,n}(t) = 0 \implies c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$$

Tient pour tout t , alors c_i doit être nul.

Si cela était vrai, nous pourrions écrire

$$\begin{aligned}
 0 &= c_0 B_{0,n}(t) + c_1 B_{1,n}(t) + \dots + c_n B_{n,n}(t) \\
 &= c_0 \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n}{0} t^i + c_1 \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \binom{i}{1} t^i \\
 &\quad + \dots + c_n \sum_{i=n}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \binom{i}{n} t^i \\
 &= c_0 + \left[\sum_{i=0}^1 c_i \binom{n}{1} \binom{1}{1} \right] t^1 + \dots + \left[\sum_{i=0}^n c_i \binom{n}{n} \binom{n}{n} \right] t^n.
 \end{aligned}$$

Puisque la base de puissance est un ensemble linéairement indépendant, nous devons avoir cela

$$\begin{aligned}
 &c_0 = 0 \\
 &\sum_{i=0}^1 c_i \binom{n}{1} \binom{1}{1} = 0 \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &\sum_{i=0}^n c_i \binom{n}{n} \binom{n}{n} = 0
 \end{aligned}$$

Ce qui implique que $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ (c_0 est clairement nul, en remplaçant ceci dans la seconde équation donne $c_1 = 0$, en remplaçant ces deux par la troisième équation...)

3.5 Représentation matricielle des polynômes de Bernstein

Dans plusieurs applications, les matrices associées aux polynômes de Bernstein sont très important voir ([2]. page 12).

Le polynôme donné est écrit comme une combinaison linéaire des fonctions des bases de Bernstein

$$B(t) = c_0 B_{0,n}(t) + c_1 B_{1,n}(t) + \dots + c_n B_{n,n}(t)$$

On peut facilement écrire :

$$B(t) = [B_{0,n}(t) + B_{1,n}(t) + \dots + B_{n,n}(t)] \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix}$$

où

$$B_{i,n}(t) = \begin{cases} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.7)$$

et

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Et on peut convertir à :

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & t^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{1,0} & b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ b_{n,0} & b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Telle que les $b_{i,j}$ sont les coefficients de la base canonique de l'espace des polynômes et on dit que la matrice est triangulaire inférieure.

Dans le cas carrée $n = 2$ on a :

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Dans le cas cubique $n = 3$ on a :

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

3.6 Approximation par les polynômes de Bernstein

3.6.1 Développement d'une fonction en série de Bernstein

Une fonction $f \in L^2[0, 1]$ peut être écrite

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n c_{i,n} b_{i,n}(t).$$

Où, $c_{i,n} = \langle f, b_{i,n} \rangle$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire standard sur $L^2[0, 1]$.

Si la série est tronquée au $n = m$, alors nous avons

$$f \cong \sum_{i=0}^m c_{i,m} b_{i,m} = C^T B(t)$$

où, C et $B(t)$ sont les matrices $(m+1) \times 1$ données par

$$C = [c_{0,m}, c_{1,m}, \dots, c_{m,m}]^T.$$

et

$$B(t) = [b_{0,m}, b_{1,m}, \dots, b_{m,m}]^T.$$

Exemple 3.6.1 Soit la fonction f défini par :

$$f(t) = -4t \exp(t).$$

La développement de f en série de Bernstein pour $n = 3$:

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n c_{i,n} b_{i,n}(t).$$

$$f \cong \sum_{i=0}^3 c_{i,3} b_{i,3}(t) = C^T B = \tilde{f}.$$

$$\begin{pmatrix} 1,0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2963 & 0,4444 & 0,2222 & 0,0370 \\ 0,0370 & 0,2222 & 0,4444 & 0,2963 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 \\ -1,8608 \\ -5,1940 \\ -10,8731 \end{pmatrix}$$

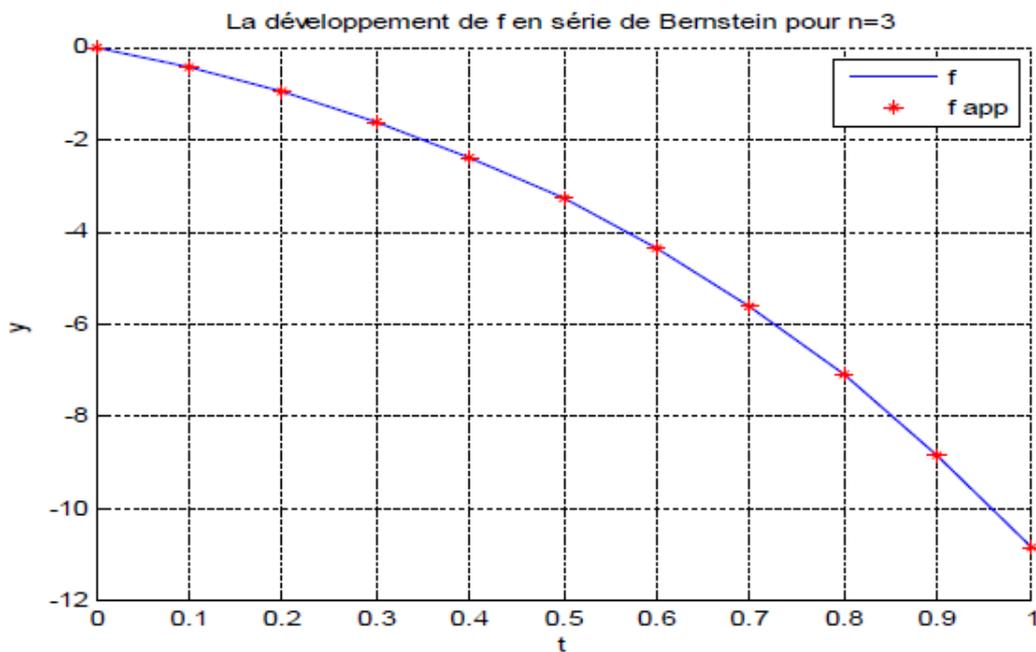
Alors :

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,4172 \\ -3,7295 \\ -10,8731 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{f}(t) = -1,2553t^4 - 1,4318t^3 - 4,2121t^2 - 3,9740t.$$

t	f	\tilde{f}	erreur
0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	-1,8608	-1,8612	0,4000
$\frac{2}{3}$	-5,1940	-5,1936	0,4000
1	-10,8731	-10,8732	0

Tableau (1)



Figure(2)

3.6.2 Théorème de Weierstrass

Définition 3.6.1 Voir ([3]. page 111) le polynôme de Bernstein d'ordre n associé à $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est égal à :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (3.10)$$

Les polynômes de Bernstein permettent de démontrer facilement le théorème de Weierstrass

Théorème 3.6.1 (Weierstrass) pour toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, il existe une suite (B_n) de polynômes qui converge vers f uniformément sur $[a, b]$

La démonstration que nous allons en donner est due à Bernstein. L'intérêt essentiel de cette preuve est de fournir un procédé constructif d'une telle suite : ce sont les fameux polynômes de Bernstein.

Par un changement de variable affine, nous pouvons ramener notre étude à l'intervalle $[0, 1]$. Ce que nous ferons désormais.

Théorème 3.6.2 (Bernstein) ([3]. page 113) Pour toute fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la suite $(B_n(f))$ converge vers f uniformément sur $[0, 1]$

Preuve. Voir ([3]. page 113) Comme la fonction f est continue sur $[0, 1]$, elle bornée sur cet intervalle : il existe $M > 0$ tel que : $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [0, 1]$. Puisque f est continue sur $[0, 1]$. Elle est uniformément continue. Autrement dit, Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que. Pour tout x et $y \in [0, 1]$, $|x - y| \leq \delta$ implique

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Donnons-nous $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ correspondants. Pour tout $x \in [0; 1]$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{n,k}(x) \right| \\ &\leq \sum_{|x - \frac{k}{n}| \leq \delta} |f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)| B_{n,k}(x) + \sum_{|x - \frac{k}{n}| > \delta} |f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)| B_{n,k}(x). \end{aligned}$$

La première somme est majorée par

$\sum_{k=0}^n \epsilon B_{n,k}(x) = \epsilon$ et le second somme par :

$$\sum_{|x - \frac{k}{n}| > \delta} 2M B_{n,k}(x) \leq \frac{2M^2}{\delta} \sum_{|x - \frac{k}{n}| > \delta} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 B_{n,k}(x) \leq \frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{M}{2n\delta^2}.$$

En utilisant les propriétés de polynômes de Bernstein et l'inégalité $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$: On obtient donc :

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \epsilon + \frac{M}{2n\delta^2} \leq 2\epsilon.$$

Dès que $n > \left\lceil \frac{M}{2n\delta^2} \right\rceil + 1$ (les crochets indiquent la partie entière). Comme cette dernière quantité est indépendante de $x \in [0; 1]$. On a bien prouvé que la convergence est uniforme sur cet intervalle.

Chapitre 4

Applications et Exemples numériques

Dans ce chapitre, on utilise les polynômes de Bernstein pour trouver une solution approximative de l'équation intégrale de Fredholm. Et on donne des exemples numériques pour comparer entre la solution exacte et une solution approchée.

4.1 Applications

On considère l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce est donné par :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad x \in [a, b] \quad (4.1)$$

Tels que, $\varphi(x)$ une fonction inconnue à déterminer, $k(x; t)$ est le noyau et f est une fonction connue.

Pour trouver une solution approchée de l'équation (4 :1), on utilise la méthode des polynômes de Bernstein.

Où $\varphi(x)$ est approximée par les polynômes de Bernstein sur $[a; b]$ par

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n c_i B_{i,n}(x) = C \cdot B(x) \quad (4.2)$$

Tels que, C et $B(x)$ sont des matrices données par

$$C = [c_0, c_1, \dots, c_n]^t$$

$$B(x) = [B_{0,n}, B_{1,n}(x), \dots, B_{n,n}(x)]$$

Et $B_{i,n}(x)$ sont les polynômes de Bernstein de degré n et ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), définis sur $[a; b]$ par

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{(b-a)^n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

et $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ sont des coefficients inconnus à déterminer.

La substitution de la relation (4 :2) en (4 :1) nous donne l'équation suivante

$$\sum_{i=0}^n c_i B_i^n(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) \sum_{i=0}^n c_i B_i^n(t) dt = f(x), \quad x \in [a, b]$$

Pour déterminés les coefficients inconnues $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$, nous choisissons les points collocation

$$x_0, x_1, \dots, x_n.$$

Tels que

$$x_j = a + \frac{j(b-a)}{n}, j = 0, 1, 2, \dots, n$$

Alors, on obtient un système linéaire

$$Ax = b \tag{4.3}$$

Tels que

$$A = [a_{ij}]_{(n+1)(n+1)}, j = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$x = [B_i^n(x_j) - \lambda \int_a^b k(x_j, t) B_{i,n}(t) dt]_{(n+1)(n+1)}, j = 0, 1, 2, \dots, n \text{ et } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$b = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^t$$

$$C = [c_0, c_1, \dots, c_n]^t$$

Le système linéaire (4 :3) peut être résolu par n'importe quelle méthode de résolution de système linéaire pour trouver les $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$: Ces $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ lorsqu'ils remplacés dans (4 :2) produisent $\varphi(x)$ approximativement.

4.2 Exemples numériques

En utilisant le logiciel MATLAB pour calculer et illustrer les graphes, pour comparer entre la solution exacte et une solution approchée.

Exemple 4.2.1 On considère l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce par :

$$\varphi(x) - \int_0^1 x e^t \varphi(t) dt = e^{-x} \tag{4.4}$$

De la solution exacte

$$\varphi(x) = e^{-x} - \frac{x}{2}$$

Tel que

$$f(x) = e^{-x}$$

$$\lambda = 1$$

$$K(x, t) = x e^t$$

Si on prend $n = 2$, alors

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^2 c_i B_{i,2}(x)$$

$$\varphi(x) = [1, x, x^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Donc

$$[1, x, x^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} - \int_0^1 x \exp^t [1, t, t^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} dt = e^{-x}$$

Et après le calcul, on trouve l'équation suivante

$$c_0(1-x)^2 + 2c_1(1-x) + c_2x^2 - xc_0 \int_0^1 (1-2t+t^2)e^t dt - 2xc_1 \int_0^1 (t-t^2)e^t dt - xc_2 \int_0^1 t^2 e^t dt = e^{-x}$$

Maintenant pour trouver toute l'intégrale. Il faut déterminer c_0, c_1 et c_2 Alors nous avons besoin de trois équations. Donc, on choisisse x_j (**méthode de collocation**), tel que $j = 0, 1, 2$ dans l'intervalle $[0; 1]$, qui donne trois équations, on prend

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = 1$$

Alors

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \quad \text{pour } x_1 = 0 \\ \frac{1}{4}c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_2 - \frac{1}{2}c_0 \int_0^1 (1-2t+t^2)e^t dt - c_1 \int_0^1 (t-t^2)e^t dt - \frac{c_2}{2} \int_0^1 t^2 e^t dt &= e^{-\frac{1}{2}} \quad \text{pour } x_2 = \frac{1}{2} \\ c_2 - c_0 \int_0^1 (1-2t+t^2)e^t dt - 2c_1 \int_0^1 (t-t^2)e^t dt - c_2 \int_0^1 t^2 e^t dt &= e^{-1} \quad \text{pour } x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (1-2t+t^2)e^t dt = 2e-5$$

$$\int_0^1 (t-t^2)e^t dt = 3-e$$

$$\int_0^1 t^2 e^t dt = e-2$$

Alors, on va résoudre ce système

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ \left(\frac{7}{2} - e\right)c_1 + \left(\frac{e}{2} - \frac{3}{4}\right)c_2 = e^{\frac{1}{2}} - e + \frac{9}{4} \\ (6-2e)c_1 + (e-1)c_2 = e^{-1} - 2e + 5 \end{cases}$$

On obtient

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = 0,2794$$

$$c_2 = 0,1316$$

On a

$$\varphi(x) = c_0 B_{0,2}(x) + c_1 B_{1,2}(x) + c_2 B_{2,2}(x)$$

$$B_{0,2}(x) = (1-x)^2$$

$$B_{1,2}(x) = 2x(1-x)$$

$$B_{2,2}(x) = x^2$$

Donc, la solution approchée est un polynôme de deuxième degré

$$\varphi(x) = 0,3096x^2 - 1,4412x + 1$$

Le graphe ci-dessous illustre la différence entre la solution exacte et la solution approchée

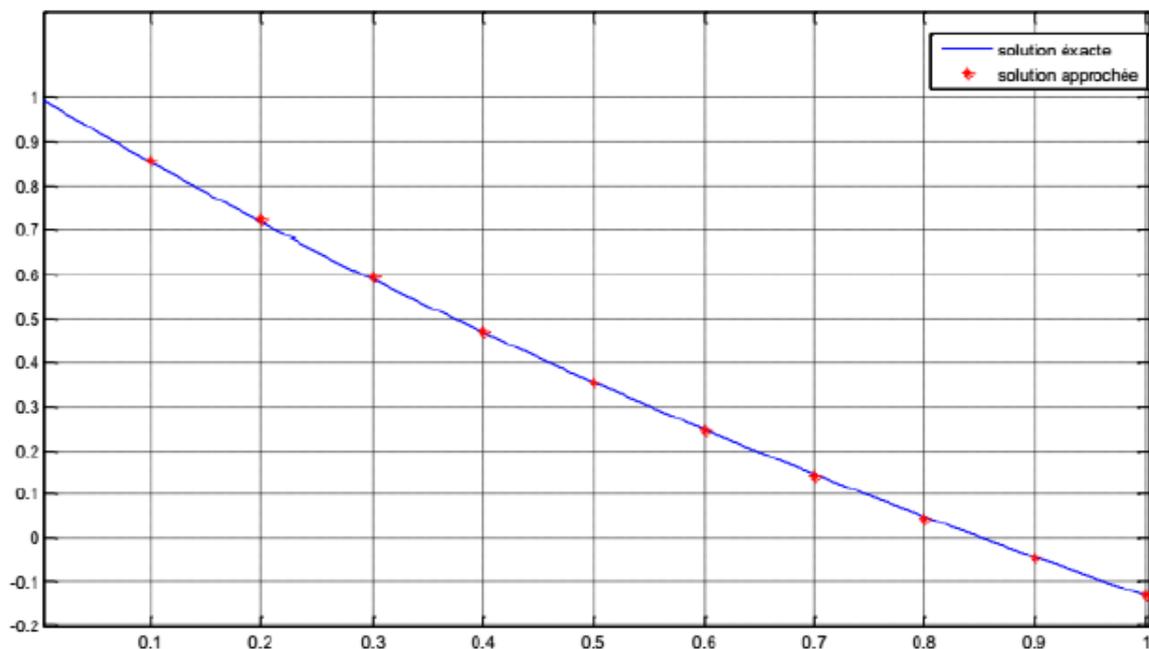


Fig. 4-1: approximation de la solution de l'équation intégrale de Fredholm
 $\varphi(x) - \int_0^1 x e^t \varphi(t) dt = e^{-x}$

Figure (03)

x	<i>solution exacte</i>	<i>solution approchée</i>	<i>erreur</i> $ x_{exact} - x_{app} _{\infty}$
0	1	0	0
0,1	0,8548	0,8590	0,0042
0,2	0,7187	0,7241	0,0052
0,3	0,5908	0,5955	0,0047
0,4	0,4703	0,4730	0,0027
0,5	0,3565	0,3568	3×10^{-4}
0,6	0,2488	0,2467	0,0021
0,7	0,1466	0,1428	0,0038
0,8	0,04993	0,0452	0,0041
0,9	-0,0434	-0,0463	0,0021
1	-0,1321	-0,1316	5×10^{-4}

Tableau (02)

Exemple 4.2.2 On considère l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce par :

$$\varphi(x) - \int_{-1}^1 (xt + x^2 t^2) \varphi(t) dt = 1 \quad (4.5)$$

de la solution exacte

$$\varphi(x) = 1 + \frac{10}{9} x^2$$

Tel que

$$f(x) = 1$$

$$\lambda = 1$$

$$k(x, t) = (xt + x^2 t^2)$$

On prend $n = 4$, alors

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^4 c_i B_{i,4}(x), -1 \leq x \leq 1 \quad (4.6)$$

et on a

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{(b-a)^n}, i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Donc, (4,6) devient

$$\sum_{i=0}^4 c_i \binom{4}{i} \frac{(x+1)^i (1-x)^{4-i}}{(2)^4} - \int_{-1}^1 (xt + x^2 t^2) \left[\sum_{i=0}^4 c_i \binom{4}{i} \frac{(t+1)^i (1-t)^{4-i}}{(2)^4} \right] dt = 1$$

$$=$$

$$\frac{3}{2} \sum_{i=0}^4 c_i \frac{1}{i!(4-i)!} (x+1)^i (1-x)^{4-i} - \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (xt + x^2 t^2) \left[\sum_{i=0}^4 c_i \frac{1}{i!(4-i)!} (x+1)^i (1-x)^{4-i} \right] dt = 1$$

Pour déterminer les coefficients inconnues c_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$), nous choisissons les points collocation

$$x_0 = -1, x_1 = -0,5, x_2 = 0, x_3 = 0,5, x_4 = 1.$$

Alors, on obtient un système linéaire

$$Ax = b$$

Tel que

$$A = [a_{ij}]_{5 \times 5}, j = 0, 1, 2, \dots, 4$$

$$A = [B_i^4(x_j) - \lambda \int_{-1}^1 k(x_j, t) B_i^4(t) dt]_{5 \times 5}, j = 0, 1, 2, \dots, 4 \text{ et } i = 0, 1, 2, \dots, 4$$

$$b = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_4)]$$

$$x = [c_0, c_1, \dots, c_4]^t$$

Et après calculer toutes les intégrales, on obtient

$$A = \begin{pmatrix} 0,523809 & -0,228571 & -0,057142 & 0,038095 & 0,057142 \\ 0,130691 & 0,331398 & 0,196651 & 0,089732 & 0,084858 \\ 0,062500 & 0,250000 & 0,375000 & 0,250000 & 0,062500 \\ 0,084858 & 0,089732 & 0,196651 & 0,331398 & 0,130691 \\ 0,057142 & 0,038095 & -0,057142 & -0,228571 & 0,523809 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

Après résoudre ce système, on obtient

$$x = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,1111111111111111e^{+000} \\ 9,999999999999999e^{-001} \\ 6,296296296296299e^{-001} \\ 1,0000000000000000e^{000} \\ 2,1111111111111112e^{+000} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\approx c_0 B_{0,4}(x) + c_1 B_{1,4}(x) + c_2 B_{2,4}(x) + c_3 B_{3,4}(x) + c_4 B_{4,4}(x) \\ &\approx \frac{c_0}{16}(1-x)^4 + \frac{c_1}{4}(x+1)(1-x)^3 + \frac{3c_2}{8}(x+1)^2(1-x)^2 + \frac{c_3}{4}(x+1)^3(1-x) + \frac{c_4}{16}(x+1)^4 \end{aligned}$$

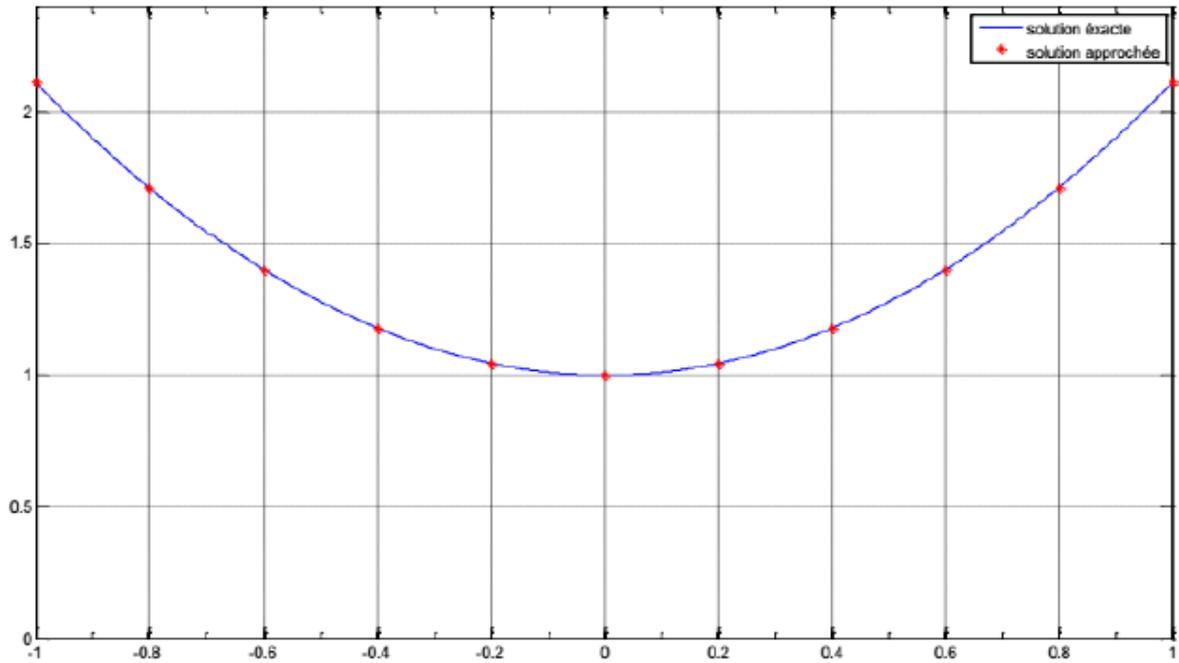


Fig. 4.2: approximation de la solution de l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) - \int_{-1}^1 (xt + x^2 t^2) \varphi(t) dt = 1$$

Figure (04)

x	solution exacte	solution approchée	erreur $ x_{xac} - x_{app} _{\infty}$
-1	2,11111 1111111111	2,11111 1111111111	0
-0,8	1,71111111111111	1,71111111111111	0
-0,6	1,40000000000000	1,40000000000000	$4,440892098 \times 10^{-16}$
-0,4	1,17777777777778	1,17777777777777	$4,440892098 \times 10^{-16}$
-0,2	1,04444444444445	1,04444444444445	0
0	1,00000000000000	1,00000000000000	0
0,2	1,04444444444445	1,04444444444445	0
0,4	1,17777777777778	1,17777777777778	$2,220446049 \times 10^{-16}$
0,6	1,40000000000000	1,40000000000001	$8,881784197 \times 10^{-16}$
0,8	1,71111111111111	1,71111111111112	$6,661338147 \times 10^{-16}$
1	2,11111111111111	2,11111111111112	$8,881784197 \times 10^{-16}$

Tableau (03)

Conclusion

Dans ce travail, on a résolu équation intégrale de Fredholm par les polynômes de Bernstein et la méthode de collocation.

Un avantage considérable de cette méthode est que les coefficients de la solution sont trouvés facilement en utilisant les programmes d'ordinateurs comme MATLAB, Qbasic, C⁺⁺, ..., etc...

Cette méthode peut être étendue et appliquée au système d'équations intégrales linéaires et non linéaires, équations intégro-différentielles linéaires et non linéaires, mais certaines modifications sont nécessaires.

Bibliographie

- [1] ORR MOSHE SHALIT. *A FIRST COURSE IN FUNCTIONAL ANALYSIS*, Technion - Israel Institute of Technology Haifa, Israel.
- [2] Kenneth I. Joy, 2000. *Bernstein polynomials*, University of California , Davis.
- [3] Alain. *Y, Jacques-Arther Weil*, Mathématiques appliquées.
- [4] Arthur Weil. *Mathématiques appliquées L3 cours complet avec 500 tests et exercices corrigés-* , p132.

Abstract

In this thesis we present a numerical solution of Fredholm integral equation of the second kind.

The method is based on the use of Bernstein polynomials with collocation method.

Some numerical examples are presented to illustrate the accuracy of this method.

Key words

- Integral Equation of Fredholm
- Projection Method
- Collocation Method
- Polynomials Bernstein

Résumé

Dans ce mémoire on a traité numériquement l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce, moyennant les polynômes de Bernstein et méthode de collocation. Des exemples numériques sont présentés pour vérifier cette méthode en indiquant sa précision ainsi que la convergence.

Mots clés

- Equation Intégrale de Fredholm
- Méthode de Projection
- Méthode de Collocation
- Polynômes de Bernstein

ملخص

في هذه المذكرة استخدمنا كثيرات حدود برنشتاين لتقريب حلول معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني وذلك باستخدام طريقة التجميع . وقدما أمثلة عديدة للتحقق من دقة هذه الطريقة.

وقدما أمثلة عديدة للتحقق من دقة هذه الطريقة .

الكلمات المفتاحية

- معادلة فريدهولم التكاملية
- طريقة الإسقاط
- طريقة التجميع
- كثيرات حدود برنشتاين