N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique etPopulaire
Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ D'EL-OUED

FACULTÉ DESSCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCEACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation numérique

Présenté par: ABBAS Salima
BEHIR Hadjer
GHERBI Khaoula

Thème

Théorème de Lax-Milgram

Soutenu juin 2014

Devant le jury composé de:

Mr. MILOUDI Madjda	MA (A) Univ. El-Oued	Président
Mr. HABITA Khaled	MA(B) Univ. El-Oued	examinateur
Mr. BAGGAS Mohammed	MA(A) Univ. El-Oued	Rapporteur

Année universitaire 2013 – 2014

Remerciements

Nous remercions Dieu le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience pour l'accomplissement de ce travail.

Ce travail à été réalisé sous l'encadrement de professeur ***"BEGGAS Mohammed"****, à l'université d'* ***El Oued****, a qui nous voudrons exprimer nos profonde gratitude pour leurs disponibilités, leurs aides et leurs conseils pour réaliser ce travail.*

ainsi qu'à les professeurs " ***HARIZ BEKKAR Lourabi, TOUATI Saïd, GHARBI Ismeïle*** *"et à tous les professeurs de l'université d'****El Oued****.*

Nous remercions vivement nos familles surtouts mes parent pour l'aide et le soutient moral.

Nous tenons a remercie: ***REDOUANI Farouk, MOULA Chouchane, RAZOUGUE Aicha,*** *et tous les étudiants de La promotion 2014 de Math de l'université d'****El Oued*** *.*

Table des matières

Notations

Ω	: Ouvert de $\mathbb{R}^d$
H	: Espace de Hilbert
H'	: Dual topologique de H
Γ	: Le frontière de Ω
$D(\Omega)$	: Espace de fonction C^∞ à support compact dans Ω
$L^2(\Omega)$	: Espace des fonction de carré intégrable sur Ω
$H^1(\Omega)$	: Espace de sobolev d'ordre 1sur Ω
$H_0^1(\Omega)$	: Adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$
$P_K(\Omega)$	: Espace des polynôme de degré $\leq K$ sur Ω
$\Vert.\Vert_{1,\Omega}$	: Norme de l'espace de sobolev $H^1(\Omega)$
$\vert.\vert_{1,\Omega}$	: Semi-norme del'espace de sobolev$H^1(\Omega)$
$\langle.,.\rangle$	: Paire de dualité
D^α	: Dérivée partielle par rapport au multi-indiceα
$\frac{\partial}{\partial v}$	: Dérivée normale sortante
∇u	: Legradien de u (encolonne) $\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$
Δ	: Opérateur laplacien
$p.p$	: Presque partout
$\oplus$	: Somme directe
$\overline{\Omega}$	: Fermetire de Ω
δ_a	: Mesure de dirac

Introduction générale

Dans la plupart des problèmes aux limites, il n'est pas possible de trouver une solution analytique, c'est à dire le calcul explicite de la solution exacte est souvent hors d'être attaint.

Le théorème de Lax-Milgram est un outil simple et éfficace pour la résolution des équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques, aprés avoir transformer le problème de forme originale dite classique au forme variationnelle.

L'approche variationnelle offre un grand accés à des résultats fondamentaux sur le caractère bien posé de l'équation, c'est à dire: l'existence et l'unicité de la solution, la stabilité de cette solution par rapport à des prerturbations des données.

l'approche variationnelle est à la base de méthode performante pour l'approximation variationnelle où on peut utiliser des approximations numériques efficaces, comme: les éléments finis.

Ce mémoire est composé d'une introduction et trois chapitres, aprés un bref citation sur la thématique abordée.

On a introduit au premier chapitre quelques notions et définitions de base.

Le deuxième chapitre, est consacré au théorème de Lax-Milgrame, avec deux méthodes de démonstration , l'un algèbrique et l'autre analytique basé sur le théorème de point fixe.

Par la suite on a étudie d'une façons analogue l'approximation variationnelle pour bien montre l'importance de l'approche variationnelle.

En fin, on va donner une généralisation du théorème de Lax-Milgram. C'est un résultat developpé par Stampacchia.

Le dernier chapitre, présente des applications où, en utilisant le théorème de Lax-Milgram, en précisant les étapes qui nous amène à la "formulation variationnelle".

En finissant par l'interprétation qui nous assure l'équivalence entre le problème classique et le problème variationnelle.

Finalement, ce mémoire se termine par une conclusion où en résume notre travail.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré essentiellement à l'introduction de quelques notions fondamentales d'analyse et certaines définitions des espaces de Hilbert que nous utiliserons dans le chapitre 2 et 3.

1.1 Les espaces de Hilbert

1.1.1 Produit scalaires

Définition 1.1.1 [9] *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un produit scalaire sur E est une fonction $f : E \times E \to \mathbb{R}$ définie sur le produit cartésien $E \times E$ à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombers réel, vérifiant le cinq propriétés suivant:*

$\forall u, v, w \in E, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $f(\lambda u + \beta v, w) = \lambda f(u, w) + \beta f(v, w)$. *(linéarité)*

. $f(u, \lambda v + \beta w) = \lambda f(u, v) + \beta f(u, w)$.

2. $f(u, v) = f(v, u)$ *(symétrie)*

3. $f(u, u) \geq 0$ *(positivité)*

4. $f(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

on note le produit scalaire par : $\langle .,. \rangle$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, $(E, \langle .,. \rangle)$ *est dit: espace préhilbertien.*

Définition 1.1.2 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle u, v \rangle$ qui est complet pour le norme assaciée au produit scalaire.* $|u| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$

Exemple 1.1.1 *Le produit scalaire traditionnel de deux vecteurs est une forme bilinéaire symétrique dans leur espace vectoriel.*

Exemple 1.1.2 *L'opération qui associe à deux applications* f *et* g *continues par morceaux entre* a *et* b *le nombre* $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ *est une forme bibinéaire symétrique dans l'espace vectoriel de ces applications muni de l'addition de fonction et de la multiplication d'une fonction par un nombre scalaire.*

Remarque 1.1.1 *Un espace de Hilbert est un espace de Banach pour la norme dérivée du produit scalaire.*

Proposition 1.1.1 [2]*(Inégalité de Schwarz) dans un espace préhilbertien* $(H, \langle .,. \rangle_H)$:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|_H \|v\|_H \qquad \forall u, v \in H$$

1.1.2 Quelques exempels sur les espaces de Hilbert

pour simplifier l'exposé on se retreint aux fonctions à valeur réelles. On considère un ouvert borné regulier Ω de $\mathbb{R}^d$

Exemple 1.1.3 *L'espace* $L^2(\Omega)$ *des fonctions mesurables de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *carré integrabel est un espace vectoriel muni du produit scalaire et la norme associeé.*

pour tout $u, v \in L^2(\Omega)$:

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int\limits_\Omega u(x)\,v(x)\,dx$$

la norme acossieé est

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Théorème 1.1.1 [4] $\left(L^2(\Omega), \| \, . \, \|_{L^2}\right)$ *est un espace Hilbert et on a les propriétés suivantes:*

1.
$$\mid \int_\Omega f \mid \leq \int_\Omega \mid f \mid$$

2.
$$(f = g \quad p.psur\Omega) \Rightarrow \int_\Omega f = \int_\Omega g$$

3.
$$\left(\int_\Omega f = 0\right) \Rightarrow (f = 0) \quad p.psur\Omega \tag{1.1.1}$$

Théorème 1.1.2 *(Riesz Fischer)* $L^2(\Omega)$ *muni du produit scalaire* $\langle ., . \rangle_{L^2(\Omega)}$.

On rappelle l'inégalité de Schwarz:

$$\left| \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} \right| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} . \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

c'est à dire

$$\left(\int_\Omega u(x).v(x)\, dx \right)^2 \leq \left(\int_\Omega u^2(x)\, dx \right) \left(\int_\Omega v^2(x)\, dx \right)$$

Exemple 1.1.4 *L'espace de Sobolev* $H^1(\Omega)$ *est défini par:*

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \| : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \ldots, n \right\}$$

On lui associe le produit scalaire:

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x).v(x)\, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) . \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx$$

La norme associée est noteé:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)}} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Remarque 1.1.2 *La derrivé est au sens de distribution.*

Théorème 1.1.3 *L'espace* $\left(H^1(\Omega), \| \, . \, \|_{H^1(\Omega)}\right)$ *est un espace de Hilbert.*

Exemple 1.1.5 *L'espace* $H_0^1(\Omega)$ *est le sous-espace de* $H^1(\Omega)$ *formé des fonctions qui s'annulent au bord de* Ω

$$H_0^1(\Omega) = \left\{v \in H^1(\Omega) : v \mid_\Gamma = 0\right\}$$

ou Γ*est le frontière de* Ω.

Théorème 1.1.4 *(Inégalité de Poincaré) Si l'ouvert* Ω *est borné alors il existe une constante* $C > 0$ *qui depend que de* Ω *telle que:*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial n_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Remarque 1.1.3 *Ce resultat est evidemment faux dans* $H^1(\Omega)$ *il suffit de prendre* $v = 1$.

On deduit de l'inégalité de poincaré:

Proposition 1.1.2 *Si* Ω *est borné, la semi-norme de* $H^1(\Omega)$ *definie par :*

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

C'est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ *équivalente à la norme* $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ *c'est à dire l'espace* $H_0^1(\Omega)$ *muni de so norme* $\|.\|_{H_0^1(\Omega)}$ *est un espace de Hilbert.*

Remarque 1.1.4 *Si* $\Omega = \mathbb{R} : H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$

1.1.3 Orthogonalité

Définition 1.1.3 [9] *Soit* $(E, \langle ., . \rangle)$ *espace préhilbertien réel. On dit que deux vecteurs* u *et* v *sont orthogonaux si* $\langle u, v \rangle = 0$ *(ce qu'on notera* $u \perp v$*).*

Cette relation est bien sur symétrique. Le vecteurs nul 0*, est orthogonal à tous les vecteur de* E*, y compris à lui-même c'est le seul vecteur qui possé de cette propriété, car si* $u \neq 0$ *on a :*

$$\langle u, u \rangle = \|u\|^2 \neq 0$$

La relation $\perp$ *n'est ni réflexive ni transitive.*

On dit que deux partie $A \neq 0$ *et* $B \neq 0$ *de* E *sont orthogonaux si :* $\forall a \in A, b \in B : a \perp b$*,c'est à dire ,* $\langle a, b \rangle = 0$

Théorème 1.1.5 [4] $(H, \langle .,. \rangle)$ *espace de Hilbert et* G *est un sous espace fermé de* H *alors* $H = G \oplus G^{\perp}$ $\forall\ x \in H,\ \ \exists!\ x_1 \in G, \exists! x_2 \in G^{\perp}$ *tel que:*$x = x_1 + x_2$

Définition 1.1.4 (*Convexe Fèrmé*)

Soit H *un espace de Hilbert et* $K \subset H$*;*

(A *est convexe)* $\Longleftrightarrow \forall x, y \in A, \forall t \in [0,1]$ *on a:*

$[tx + (1-t)\, y] \in A$*.*

A *est un ensmble fèrmé si pour toute* $(x_n)_{n\ \in \mathbb{N}} \in A$ *un suite de Cauchy qui converge vers* x *alors :*

$x \in A$ *donc* A *est fèrmé.*

Théorème 1.1.6 [4]*(Projection sur un convexe fermè)*

soit $k \subset H$ *un convexe fermè non vide et* H *un espace de Hilbert . alors pour toute* $f \in H$ *, il existe* $u \in k$ *unique tel que :*

$$|f - u| = \min_{v \in k} |f - v|$$

u *caracteriser par:*

$$\langle f - u, v - u \rangle \leq 0 \qquad \forall u, v \in k$$

on note $u = P_k f$ *projection de* f *sur* k*.*

Définition 1.1.5 *(Espace complet)*

Un espace est dit complet ssi: toute suite de cauchy converge.

Définition 1.1.6 (*Dual*)

Soit $1 < p < \infty$ *et soit* $\varphi \in \left(L^P\right)'$ *Alors: il existe* $u \in L^{P'}$*unique tel que :* $\langle \varphi, f \rangle = \int uf$ $\forall f \in L^P$*de plus* $\| u \|_{L^{P'}} = \| \varphi \|_{(L^P)'}$

Le dual de L^P*est* $L^{P'}$ *tel que :*$\frac{1}{p} + \frac{1}{P'} = 1$

p' *est l'exposent conjugue du* p

Si $p = 1 \qquad p' = \infty$

Exemple 1.1.6 *Le dual de* L^1 *est* L^{∞}

Le dual de L^{∞} *contient strictement* L

Le dual de L^2 *est lui même* $(L^2)' = L^2$

Théorème 1.1.7 *(Rep de Riesz)*

Etant donné $\varphi \in H\ '$ $(H'$*espace dual de* $H)$ *il existe* $f \in H$ *unique tel que :*

$$\langle \varphi, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H$$

de plus :$|f| = \|\varphi\|_{H'}$

on a le schema : $v \in H \subset H'$*où les injection cononique sont continues et denses*

Définition 1.1.7 *(Application bijective)*

On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ *est bijective si elle est à la fois injective et surjective, autrement dit si :*

$\forall y \in Y, \exists! x \in X$ *tel que:* $y = f(x)$

Exemple 1.1.7 *Il est clair par exemple que ,pour tout ensemble* X *L'application identique est bijective.*

Définition 1.1.8 *(Endomorphismes)*

Les endomorphismes vérifient les proprietés générales à toutes les applications linéaires, Par exemple : l'ensmble $L(E, F)$ *des applications linéaires d'un* $\mathbb{k}$ *espace vectoriel dans un autre est un* $\mathbb{k}$*.espace vectoriel muni de la loi d'addition des fonctions et de la multiplication exterme par un scalaire de* $\mathbb{k}$ *,en particulier* $(L(E), +, .)$ *est un* $\mathbb{k}$*. espace vectoriel .*

Théorème 1.1.8 *(Le point fixe de Banach)*

Soit X *un espace métrique complet et soit* $S : X \rightarrow X$ *une application contractante c'est à dire:*

$$d(sv_1, sv_2) \leq kd(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in X \quad 0 < k < 1$$

Alors S *admet un point fixe unique:* $Su = u$

1.2 Approche variationnelle:

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des équation aux dérivéer partielle est de remplacer l'équation par une formulation équivalente ,dite variationnelle ,obtenue en intégran l'équation multipliée par une fonction quelconque,dite test .Comme il est nécessaire de procéder à des intégration par partie dans l 'établissement de la formulation variationnelle, nous commençons par donner quelques résultats essentiels à ce sujet.

1.2.1 Formules de Green :

Théorème 1.2.1 [3]*(Formule d'intégration par partie):*

Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1. Soit u et v deux fonction de $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$ .Alors elle vérifient la formule d'intégration par partie

$$\int_{\Omega} u\left(x\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}\left(x\right)dx = -\int_{\Omega} v\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(x\right)dx + \int_{\partial\Omega} u\left(x\right)v\left(x\right)n_i\left(x\right)ds$$

Corollaire 1.2.1 *Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1.Soit u une fonction de $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ et v une fonction de $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$,toutes deux à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par partie*

$$\int_{\Omega} \triangle\, u\left(x\right)v\left(x\right)dx = -\int_{\Omega} \bigtriangledown\, u\left(x\right)\cdot\bigtriangledown v\left(x\right)dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\left(x\right)v\left(x\right)ds$$

où $\bigtriangledown u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\ \leq N}$ est le vecteur gradient de u,et $\frac{\partial u}{\partial n} = \bigtriangledown u\cdot n$.

Pruve.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}\nabla u.v &= \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.v\right) = \sum_{i=1}^{d}\left[\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right).v\right] \\
&= \sum_{i=1}^{d}\left[\int_{\Gamma} v.\frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i - \int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_i}\right] \\
&= \int_{\Gamma}\sum_{i=1}^{d} v.\frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i - \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_i} = \int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial \eta}.vds - \int_{\Omega}\nabla u.\nabla v
\end{aligned}$$

1.3 Espace $D(\Omega)$

Définition 1.3.1 [3] *On appelle support d'une fonction f l'ensemble :*

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

Exemple 1.3.1 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

$$\{x \in \mathbb{R} \ f(x) \neq 0\} = \mathbb{Q}$$

alors:

$$supp f = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \qquad (\ \mathbb{Q} \ \textit{est dense dans } \mathbb{R}\ )$$

donc f n'est pas à support compact.

Définition 1.3.2 $D(\Omega) = \{\varphi \in C^{\infty}(\Omega)$ *telle que* $\sup p \ \varphi$ *compact de* $\Omega\}$.

Définition 1.3.3 *On appelle distribution une forme linéaire continue sur l'espace vectoriel $D(\Omega)$, on note par $D'(\Omega)$ l'espace de distribution.*

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$$

$D'(\Omega)$ dual de $D(\Omega)$

1.4 Dérivée au sens des distributions

Définition 1.4.1 [3] *Soit $T \in D'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ la dérivée $D^\alpha T$ est définie par*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad , \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Exemple 1.4.1

$$\begin{aligned} \delta_a &: D(\Omega) \to \mathbb{R} \backslash \delta_a(\varphi) = \varphi(a) \\ \delta'_a(\varphi) &= -\langle \delta_a, \varphi' \rangle = -\delta_a(\varphi') = -\varphi'(a) \\ \delta'_a(\varphi) &= -\varphi'(a) \end{aligned}$$

Chapitre 2

Théorie de Lax -Milgram

Dans ce chapitre, on va aborder le Théorème de Lax-Milgram avec les deux démonstration: Analytique et algébrique .

Dans la prémiere partie nous proposons l'approche variotionnelle.

La dauxième partie est consacré au approximation variotionnelle.

Nous finissant ce chapitre par une généralisation du Théorème.

2.1 Théorie de Lax -Milgram

Prémièr partie (Approche variationnelle)

2.1.1 Cader abstrait

Nons décrivons une théorie abstrait pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert .On note H un espace de Hilbert réel muni de produit scalaire$\langle .,. \rangle$ et de norme$\| \ . \ \|$. Nons considérons une formulation variationnelle du type:

trouver $u \in H$ tel que :

$$a(u,v) = L(v) \qquad \text{pour toute fonction } v \in H \tag{2.1.1}$$

Les hypothèses sur a et L sont

1. $L(.)$ est une forme linéaire continue sur H , c'est -à-dire que $v \rightarrow L(v)$est linéaire de$H$ dans $\mathbb{R}$ et il existe $C > 0$ tel que:

$$|L(v)| \leq C\|v\| \qquad \text{pour tout } v \in H$$

2. $a(u,v)$est une forme bilinéaire sur H, c'est-à-dire que $w \rightarrow a(w,v)$ est une forme linéaire de H dans $\mathbb{R}$ pour tout $v \in H$,et $v \rightarrow a(w,v)$ est une forme linéaire de v dans $\mathbb{R}$ pour tout $w \in H$;

3. $a(.,.)$ est continue, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que:

$$|a(w,v)| \leq M\|w\|\|v\| \text{ pour tout } w,v \in H \tag{2.1.2}$$

4. $a(.,.)$ est coercive (ou elliptique), c'est -à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que:

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2 \text{pour tout} v \in H. \tag{2.1.3}$$

Comme nous le verrons au cours de cette sous-section, toutes les hypothèses ci-dessus sont nécessaire pour pouvoir résoudre (2.1.1). En particulier, la coercivité de $a(.,.)$ est essetielle.

Théorème 2.1.1 *(Lax-Milgram) Soit H un espace de Hilbert réel , $L(.)$ une forme linéaire continue sur H, $(.,.)$, une forme bilihnéaire continue coercive sur H. Alors la formulation variationnelle* (2.1.1) *admet une unique solution. De plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire L.*

Démonstration. [7]Pour la démonstration on va utiliser deux approche.L'un algebrique et l'autre analytique .

Cas non symetrique:

Première démonstration (Approche Algebrique).

Par application du théorème de Riesz sur la forme linéaire continue il existe un vecteure $f \in H$ tel que:

$$\forall v \in H, \quad L(v) = \langle f, v \rangle$$

Par application de ce même théorème aux forme bilinéaire continues, il existe un endomorphisme linéaire continu $A \in L(H)$

$$\forall u, v \in H, \quad a(u,v) = \langle Au, v \rangle$$

La proposition (2.1.1) se réécrit alors:

$$\exists! u \in H, Au = f$$

Pour prouver cette proposition ,il suffit donc de montrer que A est une bijection de H sur H. On montre dans un premeir temps que l'operateur est injectif.

a. A est Injective:

On dit que A est injective ssi :

$\forall v_1, v_2 \in H : Av_1 = Av_2 \Rightarrow v_1 = v_2$

On a

$$Av_1 = Av_2 \Rightarrow Av_1 - Av_2 = 0$$

Donc

$$A(v_1 - v_2) = 0 \qquad\qquad (A \text{ est lineaire})$$

$A(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0$

$$(v_1 - v_2 = 0) \Rightarrow v_1 = v_2$$

d'où A est injective.

Par la coercivité de a et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $v \in H$

$$\alpha \|v\|^2 \leq a(v, v) = \langle Av, v \rangle \leq \|Av\| \|v\| \tag{2.1.4}$$

d'où

$$\|Av\| \geq \alpha \|v\|$$

pour tout v de H, ce qui montre que A est injectif et d'image fermé.

b. A est Surjective:

On dit que A est surjective ssi $\operatorname{Im} A = H$.

$$(\operatorname{Im} A = H) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} .\operatorname{Im} A \text{ dense dans } H : \overline{\operatorname{Im} A} = H \\ .\operatorname{Im} A \text{ est fermé} : \overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} A \end{array} \right\}$$

Notons $\operatorname{Im} A$ cette image. Par le théorème du supplémentaire orthogoal d'un fermé on sait que

$$H = \operatorname{Im} A + (\operatorname{Im} A)^{\perp}$$

Soit ensuite un élément w de $(\operatorname{Im} A)^{\perp}$,on a par définition $\langle Aw, w\rangle = 0$ et donc :

$$\alpha \|w\|^2 \leq a(w, w) = \langle Aw, w\rangle = 0$$

d'où $w = 0$.Ainsi,$(\operatorname{Im} A)^{\perp}$ est réduit à $\{0\}$,ce qui montre que A est surjectif.

L'endomorphisme A est bijectif, il existe donc un unique u de H tel que $Au = f$ donné par

$$u = A^{-1} f.$$

la continuté de l'operateur inverse A^{-1} nous donne la dependance de u par rapport à L.

Remarque : Si l'espace de Hilbert H est de demension finie, la démenstration du Théorème (2.1.1) de Lax-Milgram se simplifie considérablement. En effet, en dimension finie toutes les applications linéaire sont continues et l'injectivité (2.1.4) de A est équivalent à son inversibilité. On voit bien dans ce cas (comme dans le cas générale)quel'hypothèse de coercivité de la forme bilinéaire $a(w, v)$ est indispensable puisque c'est elle qui donne l'injectivité de A. Remarquons pour finir que, si $H = \mathbb{R}^d$, une formulation variationnelle n'est que l'écriture,

$$\langle Au, v\rangle = \langle f, v\rangle$$

pour tout $v \in \mathbb{R}^d$,d'un simple système linéaire

$$Au = f$$

Deuxième demenstration [6] (Approche Analytique)

Par application du théorème de Reisz sur la forme linéaire continues, il existe un vecteur $f \in H$ tel que

$$\forall v \in H, L(v) = \langle f, v\rangle$$

Par application de ce même théorème aux forme bilinéaire continues, il existe un endomorphisme linéaire continu $A \in L(H)$ tel que :

$$\forall u, v \in H, a(u, v) = \langle Au, v\rangle$$

La proposition (2.1.1) se réecrit alors:

$$\exists! u \in H, Au = f \tag{2.1.5}$$

Soit $\rho > 0$.Définissons

$$T_\rho : H \to H$$

par

$$T_\rho (u) = u - \rho (Au - f) \tag{2.1.6}$$

u est solution de (2.1.5) si et seulement si:

$$T_\rho (u) = u \tag{2.1.7}$$

On va appliquer le théorème de point fixe de Banach c-à-d on doit prouver que T_ρ est une contraction on a:

$$\begin{aligned} \|T_\rho (u) - T_\rho (v)\|^2 &= \|u - v\|^2 - 2 \langle u - v, \rho (Au - Av)\rangle + \rho^2 \|A (u - v)\|^2 \\ &= \|u - v\|^2 - 2\rho \langle u - v, A (u - v)\rangle + \rho^2 \|A (u - v)\|^2 \end{aligned}$$

Comme

$$\langle u - v, A (u - v)\rangle = a (a - v, u - v) \geq \alpha \|u - v\|^2 \qquad \text{(coércivité)}$$

et

$$\|A (u - v)\| \leq c \|u - v\| \qquad \text{(continuté de } A\text{)}$$

On a donc

$$\|T_\rho (u) - T_\rho (v)\|^2 \leq \|u - v\|^2 (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 c^2)$$

Il suffit de montre qu'il existe $\rho > 0$,tel que:

$$0 < \left(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 c^2\right) < 1$$

Soit l'inégalité :

$$1 - 2\rho\alpha + \rho^2 c^2 < 1$$

d'où

$$(-2\rho\alpha + \rho^2 c^2) < 0 \Rightarrow \rho \left(c^2 \rho - 2\alpha\right) < 0$$

$$\rho \left(c^2 \rho - 2\alpha\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \vee \\ \rho c^2 - 2\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\rho\left(c^2\rho - 2\alpha\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \vee \\ \rho = \frac{2\alpha}{c^2} \end{cases}$$

L'ingalité de droite donne $\rho \in \left]0, \frac{2\alpha}{c^2}\right[$

Soit maintenant l'inégalité:

$$1 - 2\alpha\rho + c^2\rho^2 > 0 \tag{2.1.8}$$

et soit l'équation:

$$\varphi(\rho) = 1 - 2\alpha\rho + c^2\rho^2 = 0 \tag{2.1.9}$$

$$\Delta' = b'^2 - ac$$

$$\Delta' = \alpha^2 - c^2$$

Si le discriminant $(\Delta' = \alpha^2 - c^2 < 0)$ alors (2.1.8) est satisfaite quelque soit le réel ρ,d'où lopérateur S_ρ est une contraction $\rho \in \left]0, \frac{2\alpha}{c^2}\right[$.

Si $\Delta' \geq 0$, alors il suffit de remarquer que :

$$\varphi(0) = 1 - 2(0)\alpha + c^2(0)^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{2\alpha}{c^2}\right) &= 1 - 2\left(\frac{2\alpha}{c^2}\right)\alpha + c^2\left(\frac{2\alpha}{c^2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{4\alpha^2}{c^2} + c^2\left(\frac{4\alpha^2}{c^4}\right) = 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\varphi(0) = \varphi\left(\frac{2\alpha}{c^2}\right) = 1$$

d'ou l'on a:

$$0 < \rho_1 \leq \rho_2 < \frac{2\alpha}{c^2}$$

où $\rho_1$et ρ_2 sont les racines de (2.1.9) .Donc (2.1.8) est satisfaite, et l'operateur S_ρ est une contraction.

Lorsque $\rho \in \left]0, \rho_1\right[\cup \left]\rho_2, \frac{2\alpha}{c^2}\right[$

Alors d'aprés le théorème du point fixe , on a l'existence et l'unicité de la solution de (2.1.7) , d'où la solution de (2.1.6)

Soit alors $\overline{\rho} = \frac{\alpha}{c^2} > 0$.On a

$$1 - 2\overline{\rho}\alpha + \overline{\rho}^2 c^2 = 1 - \frac{2\alpha^2}{c^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{c^2}$$

Comme $0 \leq 1 - \frac{\alpha^2}{c^2} < 1$,on obtient que T_ρ est une contraction que admet donc un point fixe unique $u \in H$.

cas symétrique:

La démonstration est simple par rapport au cas général.

L'existence:

si $a(v,u) = a(u,v)$ donc: $a(.,.)$ est un produit scalaire sur H norme : $(a\ ,(u,v))^{\frac{1}{2}}$ est une norme équivalent $a \left\|.\right\|_H$

D'apré le théorème de Riesz $\exists!$ $\sigma L \in H$ tel que:

$$a(\sigma L, v) = (\sigma L, v) = L(v)$$

$$\left\|\sigma L\right\| = \sup_{v \in H,\ v \neq 0} \frac{a(\sigma L, v)}{\left\|v\right\|} = \sup_{v \in H, v \neq 0} \frac{L(v)}{\left\|v\right\|} = \left\|L\right\|_H$$

L'unicité:

Soit u_1, u_2

$$\left.\begin{array}{l} a(u_1, v) = L(v) \\ a(u_2, v) = L(v) \end{array}\right\} a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in H$$

Prenons $v = u_1 - u_2$,$a(.,.)$ est coercive

donc:

$$0 = a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq \alpha \left\|u_1 - u_2\right\|^2$$

donc:

$$(u_1 - u_2 = 0) \Rightarrow (u_1 = u_2)$$

d'où l'unicité.

Cette deuxième partie du théorème de Lax-Milgram suppose de plus que la forme bilinéaire est symétrique afin de donner une equivalence entre la formulation variationnelle (2.1.1) et un problème de minimisation. $\blacksquare$

Proposition 2.1.1 [6] *On se place sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. On suppose en plus que la forme bilinéaire est symétrique pour tout $v, w. \in H$. Soit $j(v)$ l'énergie définie pour $v \in H$ par :*

$$j(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) \tag{2.1.10}$$

Soit $u \in H$ la solution unique de la formulation variationnelle (2.1.1). *Alors u est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que:*

$$j(u) = \min_{v \in H} j(v)$$

Réciproquement, si $u \in H$ est un point minimumde l'énergie $j(v)$,alors u est la solution unique de la formulation variationnelle (2.1.1)

Démonstration. Si $u \in H$ est solution de la formulation variationnelle (2.1.1), on développe(grâce à la symétrie de a)

(2.1.1) $\Rightarrow$ (2.1.10) :

$$\begin{aligned} j(u+v) &= \frac{1}{2}a(u+v,u+v) - L(u+v) \\ &= \frac{1}{2}(a(u,u) + a(u,v) + a(v,u) + a(v,v)) - L(u) - L(v) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) + \frac{1}{2}a(u,v) + \frac{1}{2}a(v,u) + a(v,v) - L(u) - L(v) \\ &= (\frac{1}{2}a(u,u) - L(u)) + \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) + a(u,v) && [a \text{ linéair}] \\ &= j(u) + \frac{1}{2}a(u,v) \geq j(u) \end{aligned}$$

Comme $u + v$ est quelconque dans H, u minimise bien l'énergie j dans H. Réciproquement

(2.1.10) $\Rightarrow$ (2.1.1)

soit $u \in H$ tel que

$$j(u) = \min_{v \in H} j(v)$$

Pour $v \in H$, on définit une fonction $j(t) = j(u+tv)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (il s'agit d'un polynôme du deuxième degré en t). Comme $t = 0$ est un minimum de j, on en déduit que $j'(0) = 0$

Or

$$\begin{aligned} j(u+tv) &= \frac{1}{2}a(u+tv,u+tv)-L(u+tv) \\ &= \frac{1}{2}\left(a(u,u)+a(u,tv)+a(tv,u)+a(tv,tv)-L(u)-L(tv)\right) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u)+\frac{1}{2}ta(u,v)+\frac{1}{2}ta(v,u)+\frac{1}{2}t^2a(v,v)-L(u)-L(v) \\ &= j(u)+ta(u,v)-tL(v)+\frac{1}{2}t^2a(v,v). \end{aligned}$$

D'où $a(u,v)-L(v)=j'(0)=0$ qui est exactement la formulation variationnelle (2.1.1). ■

Deuxième partie (Approximations variationnelle)

Il s'agit de résoudre numériquement un problème sous forme variationnelle : sachant que la solution cherché n'est pas représentable en général sous une forme fonctionnelle explicite simple (comme une fonction polynôme ou exponentielle ou sinusoïdale ou ...) on cherche une solution approché par morceaux. c'est à dire on va découper le domaine Ω sur lequel on cherche la solution, et sur chaque morceau on va chercher à approcher la solution par une fonction simple (de type polynomiale par exemple).

Nous limition notre travail sur le cader abstraite.

Approximation variationnelle abstraite

le problème variationnel abstrait [1] Dans un espace de Hilbert H, il s'agit de résoudre le problème (2.1.1):

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H \text{ tel que:} \\ a(u,v)=l(v), \quad \forall v \in H \end{cases} \tag{2.1.11}$$

où l est une forme linéaire donné, et $a(.,.)$ une forme bilinéaire donné.

Si on ne connaît pas la solution $u \in H$ explicitement, on essaie de trouver une fonction approchée u_h dans un sous-espace H_h de demension finie n, solution du problème :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in H_h \text{ tel que :} \\ a(u_h,v_h)=l(v_h), \quad \forall v_h \in H_h. \end{cases} \tag{2.1.12}$$

Si on connaît une base $(\varphi_i)\, i=1,...,n$ de H_h,alors (2.1.12) est équivalent à :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in H_h \text{ tel que :} \\ a(u_h,\varphi_i)=l(\varphi_i), \ \forall i=1,...,n \end{cases} \tag{2.1.13}$$

Et pour connaître u_h sur H_h il suffit de connaitre ses composantes u_h^j sur la base, c'est à dire. notant:

$$u_h = \sum_{j=1}^{n} u_h^j \varphi_j, \qquad u_h^j \in \mathbb{R} \text{pour} j = 1, ...n \tag{2.1.14}$$

il suffit de connaitre les réels u_h^j.le probléme (2.10) s'écrit donc comme le systéme matriciel:

$$\begin{cases} \text{trouver les } u_h^j \in \mathbb{R}, j = 1, ..., n, \text{tels que:} \\ \sum_{j=1}^{n} a\left(\varphi_j, \varphi_j\right) u_h^j = \ell\left(\varphi_j\right), \qquad \forall i = 1, ..., n \end{cases} \tag{2.1.15}$$

on note alors:

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_{h1} \\ . \\ . \\ . \\ u_{hn} \end{pmatrix}, A = [a_{ij}]\, 1 \leq i, j \leq n \text{ , } a_{ij} = a\left(\varphi_j, \varphi_i\right), \qquad \overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} \ell\left(\varphi_1\right) \\ . \\ . \\ . \\ \ell\left(\varphi_n\right) \end{pmatrix}$$

et il s'agit de trouver $\overrightarrow{u}$ tel que:

$$A.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f} \tag{2.1.16}$$

c'est un systéme matriciel $n \times n$ qu'on peut résoudre dés que A est inversible. une fois $\overrightarrow{u}$ trouvé,la fonction solution est donnée par $(2.1.14)$.

on supposera que $a(.,.)$est une forme bilinéaire continue et a-coercive sur v,et que $\ell(.)$est une forme linéaire continue sur v.Dans ces conditions, la probléme (2.1.11) est bien posé (théoréme de lax-Milgram),et la matrice A sera inversible et bien conditionnée.

2.1.2 conformité

Hypothése de conformité.On suppose que $H_h \subset H$ avec H_h sous-espace de Hilbert muni de la norme induite par v.on dit dans ce cas que v_h est une approximation conforme de v.

Dans ces conditions, $a(.,.)$ est également une forme bilinéaire continue et α-coercive sur H_h,et l est une forme linéaire continue sur H_h. Et le problème (2.1.12) est bien posé indépendamment de h.

Remarque 2.1.1 *Il n'est pas suffisant de vérifier que $a(.,.)$ est coercive sur H_h : on obtiendrait uniquement dans ce cas que $a(v_h, v_h) \geq \alpha_h \|v_h\|^2$ pour tout $v_h \in H_h$.Et il se pourrait que α_h tend vers 0 avec h.Par contre, vérifier que $a(.,.)$ est coercif sur H implique avec la conformité que $\alpha_h \geq \alpha$ quel que soit h,et donc α_h ne peut pas tendre vers 0, et le problème est bien posé indépendamment de h :*

$$\|u_h\|_H \leq \frac{1}{\alpha_h}\|l\| \leq \frac{1}{\alpha}\|l\| \tag{2.1.17}$$

Et $\|u_h\|_H$ dépend alors continûment de $\|l\|$ indépendamment de h.

2.1.3 Convergence de u_h vers u

On note u la solution du problème continu (2.1.11) et u_h la solution du problème discret (2.1.12). La question est de savoir si $\|u - u_h\|$ est 'petit'.et de mesurer ce 'petit'

Ici on ne dispose que de la norme $\|.\|_H$ et ce sera donc $\|u - u_h\|_H$ qu'on pourra mesure. On a le resultat suivant , qui donne l'erreur d'approximation a priori:

Théorème 2.1.2 *Si $H_h \subset H$ (conformité), si $\|a\|$ et α sa constante de coercivité sur H , alors:*

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{\|a\|}{\alpha} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H \tag{2.1.18}$$

c'est à dire

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{\|a\|}{\alpha} d(u, H_h)$$

où $d(u, H_h)$ est la distance de u à H_h.

Preuve. Ayant supposé $H_h \subset H$ (approximation conforme), il vient à partir de (2.1.11) (valable donc pour tout $v_h \in H$) et de (2.1.12) :

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \qquad \forall v_h \in H_h. \tag{2.1.19}$$

Et donc :

$a(u-u_h, u-u_h) = a(u-u_h, u-u_h+v_h), \qquad \forall v_h \in H_h.$

Et puisque H_h est un espace vectoriel, c'est équivalent à :

$$a(u-u_h, u-u_h) = a(u-u_h, u-w_h), \qquad \forall w_h \in H_h. \tag{2.1.20}$$

Puis la coercivité de $a(.,.)$ et sa continuité donnent:

$$\alpha \|u-u_h\|_H^2 \leq \|a\| \|u-u_h\|_H \|u-w_h\|_H, \quad \forall w_h \in H_h, \tag{2.1.21}$$

ce qui est le résultat annoncé. ■

2.2 Généralisition de Lax-Milgram (Théorème de Stampacchia)

Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue et coercive. Soit K une convexe, fermé et non vide.

Étant donné $\varphi \in H'$ il existe $u \in K$ unique tel que :

$$a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle, \quad \forall v \in K.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in K, \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \underset{v \in K}{Min} \frac{1}{2} \{a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle\}$$

Chapitre 3

Applications sur quelques problèmes elliptique

On va proposer des applications concernant les équations aux derivées partielles elliptiques où en va appliquer le Théorème de LAX-Milgram , apres avoir mettre notre problème sous forme variationnelle.

3.1 Un problème elliptique avec le condition de dirchlet

Soit $\Omega =]a, b[$ un ouvert borné de $\mathbb{R}, f \in L^2(\Omega)$, trouver $u \in H^2(\Omega)$ tel que:

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{sur } \Omega =]a, b[\\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

a. Formulation variationnelle du problème (3.1.1):

$$-u'' + u = f$$

On multiplie les deux membres par v on trouve:

$$-u''v + uv = fv$$

puis on intégre les deux membres

$$\int -u''v + \int uv = \int fv$$

une intégration par partie nous donne:

$$\int_a^b u''v = [-u'v]_a^b + \int_a^b u'v'$$

alors

$$\int_a^b u^{'}v^{'} + \int_a^b uv = \int_a^b fv \qquad \forall v \in H$$

on pose

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_a^b u^{'}v^{'} + \int_a^b uv \qquad \forall v \in H \\ L(v) &= \int_a^b fv \qquad\qquad \forall v \in H \end{aligned}$$

alors la Formulation variationnelle du problème:

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H \\ a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H \end{cases} \tag{3.1.2}$$

On choisit ici:

$$H = H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : u^{'} \in L^2(\Omega), u(a) = u(b) = 0 \right\}$$

car u, $u^{'}$ existent dans le problème et $u(a) = u(b) = 0$, on sait que $H = H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, muni du prouduit scalaire:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{1,\Omega} &= \langle f, g \rangle_{0,\Omega} + \left\langle f^{'}, g^{'} \right\rangle_{0,\Omega} \\ &= \int_\Omega f.g + \int_\Omega f^{'}.g^{'} \end{aligned}$$

donc le problème sera :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H_0^1 \\ \langle u, v \rangle_{1,\Omega} = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

b. Solution la Formulation variationnelle du problème avec théorème de Riesz:

pour appliquer le théorème de Riesz, on montre que $L \in \left(H_0^1\right)'$:

$$L = H_0^1 \to \mathbb{R} \setminus L(v) = \int_b^a fv$$

On montre que $L(v)$ est linéaire et continue

1. $L(v)$ est linéaire:

$$\begin{aligned} L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= \int_a^b f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \\ &= \alpha_1 \int_a^b f v_1 + \alpha_2 \int_a^b f v_2 \\ &= \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) \end{aligned}$$

2. $L(v)$ est continue:

$$\exists M > 0 telleque : |L(v)| \leq M \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(v)$$

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left| \int_a^b fv \right| \leq \int_a^b |fv| \leq \left(\int_a^b |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b |v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} & \text{(Inégalité de Schwartz)} \\ &= \|f\|_{0,\Omega} \cdot \|v\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|f\|_{0,\Omega} \cdot \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

$\left(\text{car: } \|v\|_{1,\Omega} = \|v\|_{0,\Omega} + \left\|v'\right\|_{0,\Omega}\right)$ .Tous les conditions du théorème de Riesz sont vérifiés, Donc le problème admet une solution unique et on a: $\|L\|_{\left(H_0^1\right)'} = \|u\|_{H_0^1}$ .Donc le problème est bien posé.

c. Retour au problème (3.1.1) : [(3.1.2) ⇒ (3.1.1)]

supposons que le Formulation variationnalle du problème elliptique:

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H = H_0^1(\Omega) \quad \text{telle que:} \\ \langle u, v \rangle_{1,\Omega} = \int_a^b fv \qquad ,\forall v \in H \end{cases}$$

admet une solution unique alors :

$$\langle u, v \rangle_{1,\Omega} = \int_\Omega uv + \int_\Omega u'v' = \int_a^b fv \qquad ,\forall v \in H$$

on a:

$$\begin{aligned} \int_a^b u'v' &= u'v\,|_a^b - \int_a^b u''v \\ &= u'(b).v(b) - u'(a).v(a) - \int_a^b u''v = -\int_a^b u''v \qquad (v(a) = v(b) = 0) \end{aligned}$$

d'ou

$$\int_a^b uv - \int_a^b u''v = \int_a^b fv \quad , \quad \forall v \in H$$

alors

$$\int_a^b (-u'' + u - f)\, v = 0 \Rightarrow -u''+u-f = 0 \quad \text{(presque partout sur}\Omega\text{)} \quad \text{(on appliquer la relation (1.1.1))}$$

et $u(a) = u(b) = 0$,Donc u est une solution du problème aux limite:

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u(a) = u(b) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : u' \in L^2(\Omega), u(a) = u(b) = 0 \right\}$$

3.2 Un problème multidimensionnelle avec le condition de Dirchlet

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$,trouver $u \in L^2(\Omega)$ telle que:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{sur } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{3.2.1}$$

a.Formulation varitionnelle du problème (3.2.1):

$$-\Delta u = f$$

On multiplie les deux membres par v on trouve:

$$-\Delta u.v = fv$$

Puis on intégre les deux membres

$$\int\limits_{\Omega} -\Delta u.v = \int\limits_{\Omega} fv$$

alors

$$(3.2.1) \Rightarrow \int\limits_{\Omega} -\Delta u.v = \int\limits_{\Omega} f.v \ ,\forall v \in H$$

appliquer le formule de Green:

$$\int\limits_{\Omega} -\Delta u.v = \int\limits_{\Omega} \nabla u.\nabla v - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v \qquad \text{(car } v = 0 \text{ sur } \Gamma\text{)}$$

alors

$$\int\limits_{\Omega} -\Delta u.v = \int\limits_{\Omega} \nabla u.\nabla v \quad ,\forall v, u \in H_0^1(\Omega)$$

donc

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u.\nabla v = \int\limits_{\Omega} fv \quad ,\forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \nabla u.\nabla v = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)$$

$$L(v) = \int\limits_{a}^{b} fv \qquad ,\forall v \in H = H_0^1(\Omega)$$

alors la formulation variationnelle:

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H \\ a(u,v) = L(v) \ ,\forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.2.2}$$

b.On va appliquer le théorème de Lax-Milgram sur le problème (3.2.2) d'abord en va verifie le condition du théorème:

1.$a(u, v)$ bilinéaire

$\forall\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}, \forall\ u_1, u_2, v \in H(\Omega)$:

$$
\begin{aligned}
a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial(\alpha u_1 + \beta u_2)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \alpha u_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \beta u_2}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \alpha u_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \beta u_2}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \\
&= \alpha \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + \beta \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \\
&= \alpha \int_\Omega (\nabla u_1 \nabla v) + \beta \int_\Omega (\nabla u_2 \nabla v) \\
&= \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v)
\end{aligned}
$$

$\forall\ t,\ d \in \mathbb{R}, \forall\ u, v_1, v_2 \in H(\Omega)$:

$$
\begin{aligned}
a(u, tv_1 + dv_2) &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial(tv_1 + dv_2)}{\partial x_i} \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial tv_1}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial dv_2}{\partial x_i} \\
&= \int_\Omega t \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial tv_1}{\partial x_i} \right) + d \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial dv_2}{\partial x_i} \right)
\end{aligned}
$$

donc $a(u, v)$ bilinéaire

2.$a(u, v)$ continue:

on a

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \right| \\
&\leq \int_\Omega \left| \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \right| \leq \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{d} \left[\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(Inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{d} \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0.\Omega} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0.\Omega} \right) \\
&= \|\nabla u\|_{0.\Omega} \|\nabla v\|_{0.\Omega} = |u|_{1.\Omega} |v|_{1.\Omega} \leq \|u\|_{1.\Omega} \|v\|_{1.\Omega}
\end{aligned}
$$

Donc: la forme bilinéaire est continue.

3.$a(u,v)$ coercive:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad : a(v,v) = \int_\Omega \nabla v \nabla v = \int_\Omega |\nabla v|^2 = \|\nabla v\|_{0.\Omega}^2 = |v|_{1.\Omega}^2$$

inégalité poincaré:

On sait que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \exists c > 0 : |v|_{1.\Omega} = \|v\|_{0.\Omega} \leq c \|\nabla v\|_{0.\Omega}$$

$$\leq (c+1) \|\nabla v\|_{0,\Omega} = (c+1) |v|_{1,\Omega} \tag{3.2.3}$$

et

$$|v|_{1.\Omega} \leq \|v\|_{1.\Omega} = \|v\|_{0.\Omega} + |v|_{1.\Omega} \tag{3.2.4}$$

d'aprés (3.2.3) et (3.2.4)alors

$$|v|_{1.\Omega} \leq \|v\|_{1.\Omega} \leq (c+1) \|\nabla v\|_{0.\Omega} = (c+1) |v|_{1.\Omega}$$

on a :

$$(|v|_{1.\Omega} = 0) \Rightarrow (\|v\|_{1.\Omega} = 0) \Rightarrow (v = 0)$$

donc:$|v|_{1.\Omega}$ est une norme équivalent à $\|v\|_{1.\Omega}$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Donc:

$$a(v,v) = |v|_{1.\Omega}^2 \geq \alpha^2 \|v\|_{1.\Omega}^2 \Rightarrow a(v,v) \geq \alpha^2 \|v\|_{1.\Omega}^2 \text{ telle que } \alpha = \frac{1}{\sqrt{c+1}}$$

d'où la coercivité.

4. $L(v)$ linéaire :

$$\begin{aligned} L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= \int_a^b f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \\ &= \alpha_1 \int_a^b f v_1 + \alpha_2 \int_a^b f v_2 \\ &= \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) \end{aligned}$$

donc $L(v)$ est linéaire.

5. $L(v)$ et continue:

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left| \int_\Omega f v \right| \leq \int_\Omega |fv| \\ &\leq \left(\int_\Omega |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega |v^2| \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(Inégalité de Cauchy-Schwartz)} \\ &\leq \|f\|_{0.\Omega} \cdot \|v\|_{0.\Omega} \\ &\leq \|f\|_{0.\Omega} \cdot \|v\|_{1.\Omega} \end{aligned}$$

Donc: le problème (3.2.2) admet une solution unique d'apré le théorème de Lax-Milgram.

c. Retour au problème (3.2.1):

suppsons que $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (3.2.2)

alors

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v = \int_\Omega f v \quad , \forall v \in H = H_0^1(\Omega)$$

On sait que:

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v = \int_\Omega - \Delta u . v + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v$$

$$\int -\Delta u.v + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v = \int_{\Omega} fv \quad ,\forall v \in H = H_0^1(\Omega)$$

On peut choisir $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que:

$u \in D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$

donc :

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v \ = 0 \qquad\qquad (\text{car } v = 0 \text{ sur } \Gamma) \tag{3.2.5}$$

alors

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f)\, v = 0 \ \ \text{pp sur } \Omega, \forall v \in D(\Omega)$$

d'apré la relation (1.1.1) on a alors:

$$-\Delta u = f \quad \text{pp sur } \Omega$$

et

$$u = 0 sur \Gamma \qquad (\text{car } u \in H_0^1(\Omega)) \tag{3.2.6}$$

de(3.2.5) et (3.2.6) alors u solution du problème:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u(a) = u(b) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

3.3 Un problème avec le condition de Neuman

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d, f \in L^2(\Omega), c \in L^\infty(\Omega)$ et $\forall x \in \Omega$:

$0 < c_0 < c(x)$,trouver $u \in L^2(\Omega)$ telle que:

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{3.3.1}$$

a. Formulation variationnelle de problème elliptique (3.3.1):

$$-\Delta u + cu = f$$

On multiplie les deux membres par v on trouve:

$$-\Delta uv + cuv = fv \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Puis on intégre les deux membres

$$\int_\Omega -\Delta uv + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fv \quad ,\forall v \in H^1(\Omega) \tag{3.3.2}$$

a l'aide le formule de Green

$$\int_\Omega \Delta uv = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v - \int_\Omega \nabla u \nabla v$$

$$\int_\Omega \Delta uv = -\int_\Omega \nabla u \nabla v$$

on remplace par (3.3.1) on trouve:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fv \tag{3.3.3}$$

donc

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega cuv = \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i} . \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Omega cuv$$

et

$$L(v) = \int_\Omega fv$$

donc le problème sera:

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \\ a(u,v) = L(v) \end{cases} \tag{3.3.4}$$

b. Solution problème elliptique application de théorème Lax-Milgram (3.3.4):

1. $a(.,.)$ bilinéaire: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u_1, u_2, v \in H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
a(\alpha u_1+\beta u_2,v) &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial(\alpha u_1+\beta u_2)}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_i}+c(\alpha u_1+\beta u_2)v \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \alpha u_1}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \beta u_2}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)+c\alpha u_1 v+c\beta u_2 v \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \alpha u_1}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_i}+\int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \beta u_2}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_i}+\int_\Omega c\alpha u_1 v+\int_\Omega c\beta u_2 v \\
&= \alpha\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u_1}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_i}+cu_1 v\right)+\beta\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u_2}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_i}+cu_2 v\right) \\
&= \alpha\int_\Omega (\nabla u_1 \nabla v+c\alpha u_1 v)+\beta\int_\Omega (\nabla u_2 \nabla v+cu_1 v) \\
&= \alpha a(u_1,v)+\beta a(u_2,v)
\end{aligned}$$

$\forall t,d\in\mathbb{R},\forall u,v_1,v_2\in H^1(\Omega):$

$$\begin{aligned}
a(u,tv_1+dv_2) &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial(tv_1+dv_2)}{\partial x_i}+cu(tv_1+dv_2) \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial tv_1}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial dv_2}{\partial x_i}+cutv_1+cudv_2 \\
&= \int_\Omega t\left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial tv_1}{\partial x_i}+cuv_1\right)+d\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial dv_2}{\partial x_i}+cuv_2\right)
\end{aligned}$$

donc $a(u,v)$ bilinéaire

2. $a(u,v)$ continue:

$\forall u,v\in H^1(\Omega),\exists M>0:$

$$|a(u,v)|\leq M\ \ \|u\|_{1,\Omega}\,\|v\|_{1,\Omega}$$

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left|\int_\Omega \nabla u \nabla v + cuv\right| \leq \int_\Omega |\nabla u \nabla v + cuv| \leq \int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| + |cuv| \\
&\leq \left(\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \|c\| \left(\int_\Omega |u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (Inégalité de Schwarz)} \\
&\leq \|\nabla u\|_{0,\Omega} \|\nabla v\|_{0,\Omega} + \|c\| \|u\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \\
&\leq \|\nabla u\|_{0,\Omega} \|\nabla v\|_{0,\Omega} + \|c\| \|u\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} + \|c\| \|\nabla u\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} + \|c\| \|u\|_{0,\Omega} \|\nabla v\|_{0,\Omega} \\
&\leq \max(1, \|c\|_{L^\infty}) \left(\|\nabla u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{0,\Omega}\right) \left(\|\nabla v\|_{0,\Omega} + \|v\|_{0,\Omega}\right) \\
&\leq \max(1, \|c\|_{L^\infty}) \left(\|u\|_{1,\Omega}\right) \left(\|v\|_{1,\Omega}\right)
\end{aligned}$$

donc $a(u,v)$ continue.

3. $a(u,v)$ coercive

$\forall u\ \exists \alpha > 0$ telle que:

$$a(u,v) \geq \alpha \|v\|_{1,\Omega}^2$$

$$a(u,u) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + (cu)^2 = \int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 + \int_\Omega c(u)^2$$

on a

$$0 < c_0 < c(x)$$

donc

$$a(u,u) \geq \min(1, c_0) \|u\|_{1,\Omega}^2$$

donc $a(u,v)$ coercive.

4. $L(v)$ linéaire:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v_1, v_2 \in H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
L(\alpha v_1 + \beta v_2) &= \int_\Omega f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \int_\Omega f v_1 + \beta \int_\Omega f v_2 \\
&= \alpha L(v_1) + \beta L(v_2)
\end{aligned}$$

donc $L(v)$ linéaire

5. $L(v)$ continue

$\forall u, v \in H^1(\Omega)\, \exists M > 0$:

$$|L(v)| \leq M \|v\|_{1,\Omega}$$

$$\begin{aligned}
|L(v)| &= \left| \int_\Omega fv \right| \leq \int_\Omega |fv| \\
&\leq \left(\int_\Omega |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega |v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(Inégalité de Cauchy-Schawrz)} \\
&= \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \\
&\leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}
\end{aligned}$$

donc $L(v)$ continue.

c. Retour au problème (3.3.1):

soit $u \in H^1(\Omega)$ solution de la Formulation variationnelle de problème elliptique alors:

$$\forall v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega \nabla u \nabla v + cuv = \int_\Omega fv$$

selon la formule de Green:

$$\int_\Omega \Delta uv = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v - \int_\Omega \nabla u \nabla v$$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v - \int_\Omega \Delta uv$$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = -\int_\Omega \Delta uv$$

(3.3.2) on remplace par :

$$\forall v \in H^1(\Omega) : \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v - \int_\Omega \Delta uv + cuv = \int_\Omega fv$$

on a $D(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ alors ce juste $\forall v \in D(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\Delta u + cu - f)\, v = 0 \quad ppsur\Omega$$

alors

$$\Delta u + cu - f = 0 \qquad ppsur\Omega$$

et $\frac{\partial u}{\partial v} = 0$ sur Γ alors u solution problème(3.3.1)

3.4 Un problème avec le condition de Dirichlet non homogène

Soit à résoudre le problème

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad \text{sur} \quad]0,1[= \Omega \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta \end{cases} \tag{3.4.1}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, E$ donnés et f fonction donnée.

a. formulation variationnelle de problème elliptique

$$-u'' + u = f$$

on multiplie les deux membres par v on trouve:

$$-u''v + uv = fv$$

puis on intègre les deux membres

$$\int -u''v + uv = \int fv$$

une intégration par partie nous donne:

$$\int_{\Omega} -u''v = \int_{\Omega} u'v' - [u'v]_0^1$$

alors

$$\int_{\Omega} u'v' - [u'v]_0^1 + uv = \int_{\Omega} fv$$

donc on travaille dans l'espace

$$K = v \in H^1(\Omega) : v(0) = \alpha, v(1) = \beta$$

Est-ce que K est une sous espace?

$$\forall v_1, v_2 \in K : v(0) = \alpha, v(1) = \beta$$

$$(v_1 + v_2)(0) = v_1(0) + v_2(0) = 2\alpha \notin k$$

$$\text{donc } v_1 + v_2 \notin k$$

alors K n'est pas sous-espace.

Donc on ne peut pas appliquer le théorème de Lax-Milgram, on va verifier si le condition du théorème de stampacchia sont saitisfaites.

Est-ce que k fermé?

$$K = \left\{v \in H^1 : v(0) = \alpha, v(1) = \beta\right\}$$

soit (u_n) suite de K convergente

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

$l \in K$?

$$l \in H^1 \Rightarrow l(0) = \alpha, l(1) = \beta$$

$$l(0) = \lim_{n \to +\infty} u_n(0) = \lim_{n \to +\infty} \alpha = \alpha.$$

$$l(1) = \lim_{n \to +\infty} u_n(1) = \lim_{n \to +\infty} \beta = \beta.$$

donc $l \in K$, alors K fermé

Est-ce que k convexe?

soit $v_1, v_2 \in K, t \in [0,1]$, on montrer que :$[tv + (1-t)v] \in K$

$$v_1 \in K \Rightarrow v_1 \in H^1 : v_1(0) = \alpha, v_1(1) = \beta$$

$$v_2 \in K \Rightarrow v_2 \in H^1 : v_2(0) = \alpha, v_2(1) = \beta$$

$$\begin{aligned} [tv_1 + (1-t)v_2](0) &= tv_1(0) + (1-t)v_2(1) \\ &= t\alpha + (1-t)\alpha = \alpha \in \ K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [tv_1 + (1-t)v_2](1) &= tv_1(1) + (1-t)v_2(1) \\ &= t\beta + (1-t)\beta = \beta \in K \end{aligned}$$

donc K convexe

K convexe et fermé on peut alors appliquer le théorème de Stampacchia

Si u est une solution classique de (3.4.1) on a

$$\int_\Omega u'(v-u)' + u(v-u) = \int_\Omega f(v-u) \qquad \forall v \in K$$

Donc en particulier on a

$$\int_\Omega u'(v-u)' + u(v-u) \geq \int_\Omega f(v-u), \forall v \in K$$

On utilise alors le théorème de Stampcchia: $\exists u \in H^1$,unique , vérifiant (3.5.2) ;de plus u s'obtien par

$$\underset{v \in K}{Min} \left\{ \frac{1}{2} \int \left(v'^2 + v^2\right) - \int fv \right\}$$

a. la Formulation variationnelle de problème elliptique

$$a(u, v-u) = \int_\Omega u'(v-u)' + u\ (v-u\ )\ et\ \ L(v-u) = \int_\Omega f(v-u)$$

alors Formulation variationnelle sera:

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1 \text{ telle que} \\ \ a(u, v-u) \geq L(v-u) \end{cases}$$

on vérifie les condition du théorème de Stampcchia:

1. $a(u, v-u)$ est bilinéaire c'est claire
2. $a(u, v-u)$ continue

$$\begin{aligned}
\forall u, v &\in H^1 : \ |a(u, v-u)| = \left| \int_\Omega u'(v-u)' + u(v-u) \right| \\
&\leq \int_\Omega |u'(v-u+u(v-u))| \\
&\leq \int_\Omega \left| u'(v-u)' \right| + \int_\Omega |u(v-u)| \\
&\leq \|u'\|_{0,\Omega} \left\|(v-u)'\right\|_{0,\Omega} + \|u\|_{0,\Omega} \|v-u\|_{0,\Omega} \\
&\leq \left(\|u'\|_{0,\Omega} + \|u\|_{0,\Omega} \right) \left(\left\|(v-u)'\right\|_{0,\Omega} + \|v-u\|_{0,\Omega} \right) \\
&\leq \|u\|_{1,\Omega} \|v-u\|_{1,\Omega}
\end{aligned}$$

$M = 1$ alors $a(u, v-u)$ continue

3. $a(u, v)$ coercive:

$$\begin{aligned}
a(v, v) &= \int_\Omega v'^2 + v^2 = \int_\Omega |v'|^2 + \int_\Omega |v|^2 \\
&= \left\| v' \right\|_{0,\Omega}^2 + \|v\|_{0,\Omega}^2 = \|v\|_{1,\Omega}^2
\end{aligned}$$

4. $L(v-u)$ est linéaire c'est claire
5. $L(v-u)$ continue

$$\begin{aligned}
|L(v-u)| &= \left| \int_\Omega f(v-u) \right| \leq \int_\Omega |f(v-u)| \\
&\leq \left(\int_\Omega |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_\Omega |v-u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|f\|_{0,\Omega} \|v-u\|_{0,\Omega} \\
&\leq \|f\|_{0,\Omega} \|v-u\|_{1,\Omega}
\end{aligned}$$

donc $L(v-u)$ continue.

(donc u solution unique du problème (3.5.2)).

Conclusion Générale

Dans ce travail, on a etudier le théorème de Lax-Milgram avec deux démonstration algebrique et analytique, en basont sur l'approche variationnelle qui nous offre une méthode numerique " Approximation variationnelle ", où cette théorème nous a clairement montré combien l'information peut être utilisée en mathématiques en général et en particulier, l'analyse fonctionnelle.

En terminant par de differents applications concernant les équations aux dérivées partielles elliptiques.

Bibliographie

[1] **Abert Cohen**; Approximation variationnelles de E.D.P, Notes du Cours, université Aix Marseille 1;2008-2009

[2] **Gilles Christol**, **Anne Cot et Charles-Michel Marie**; Topologie 2^{e} cycle, édition marketing S.A, 32 rue Bargue, Paris (15e); 1997.

[3] **Grégoire Allaire**; Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique; Les éditions de l'école polytechnique; France; Mai 2006.

[4] **H. Brezis;** Analyse fonctionnelle: Théorie et application; Masson; 1983.

[5] **Guillaume Carlier**; Note de Cours,Analyse fonctionnelle; université Aix Marseille; 2008-2009.

[6] **P.A.Raviart**; **J. M.Thomas**; Introduction à l'analyse numérique des équations aux derrivée partielles; 3$^{\text{ème}}$ Tirage; édition; 1992.

[7] **P.Allaire**; Introduction à la modélisatio numériques. Ecole Edition de l'école polytechnique; Paris; 2006.

[8] **Serge Nicaise**; Analyse numérique est équations aux dérivées partielle; Paris; 2000.

[9] **Yves Sonntag**; Topologie et analyse fonctionnelle Cours de licence avec 240 exercice et 30 problème corrigés;

université Aix Marseille; 2008-2009.

Résumé

Dans ce travail, nous avous étudiés le théorème de Lax-Milgram qui consiste a résoudre les problèmes variationnelles, en basant sur l'importance de cette approche qui nous offre une méthode numérique pour la résolution du problème variationnelle a partir d'approximation variationnelle avec en mettant l'accent sur l'importence sur l'approximation variationnelle .

Finalement, on a étudié quelques application concernant les équations aux dérivées partielles élliptiques.

Mots clés:

Espace de Hilbert, Approche variationnelle, Approximation variationnelle, Espace de Sobolev, Forme bilinéaire, Forme linéaire, Formule de Green.

Abstract

In this work we study the theory of Lax-Milgram this theory consist in given the solution of problem variationnal, with the confirmation to the importance of the approximation variationnalle from the side of number analysis from approach variationnalle.

Finally, we study some application of partiel differential equations elliptiques

Key words:

Hilbert space, Approch variationnelle, Approximation variationnelle, Soboleve space, Form billinear,Form linear, Green Formul.

ملخص

قمنا في هذا العمل بدراسة نظرية لاكس ميلغرام التي توفر حل للمسائل التغايراتية،مع التأكيد على أهمية المقاربة التغايراتية من جهة التحليل العددي من خلال التقارب التغايراتي.

أخيرا قدمنا بعض التطبيقات المتعلقة بالمعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية.

الكلمات المفتاحية:

فضاءهيلبرت،التقريب التغايراتي، المقاربة التغايراتية، فضاء سبولاف،شكل ثنائي الخطية، شكل خطي ، صيغة غرين.